CAPITULO 3. MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES.

En general e1 movimiento de los objetos verdaderos se realiza en el espacio real tridimensional. E1 movimiento de una partícula que se realiza en un plano es un movimiento en dos dimensiones, si el movimiento se realiza en el espacio, se produce en tres dimensiones. En este capítulo se estudia la cinemática de una partícula que se mueve sobre un plano. Ejemplos de un movimiento en dos dimensiones son el de un cuerpo que se lanza al aire, tal como una pelota, un disco girando, el salto de un canguro, el movimiento de planetas y satélites, etc. El movimiento de los objetos que giran en una órbita cuya trayectoria es una circunferencia, se conoce como movimiento circunferencial; es un caso de movimiento en dos dimensiones, que también es estudiado en este capítulo. El vuelo de una mosca, el de un avión o el movimiento de las nubes se produce en tres dimensiones.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES.

Continuamos restringiendo el estudio del movimiento al caso de una ***partícula que se mueve con aceleración constante***, es decir que su magnitud y dirección no cambian durante el movimiento. E1 vector posición de una partícula que se mueve en el plano *xy* es una función del tiempo, se escribe como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

Por definición, la velocidad de la partícula en movimiento en el plano *xy* es, el cambio de posición en el transcurso del tiempo y se puede determinar por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

es decir,

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$$

donde v_x y v_y son las componentes de la velocidad en la dirección x e y. Si la aceleración es constante, sus componentes a_x en la dirección x, y a_y en la dirección y, también lo son. Aplicando las ecuaciones cinemáticas de la velocidad deducidas para el movimiento en una dimensión, independientemente en cada dirección x e y, para una partícula que en el instante inicial t_o se mueve con velocidad inicial $\vec{v}_o = \vec{v}_{ox}\hat{i} + \vec{v}_{oy}\hat{j}$ se obtienen las componentes de la velocidad en función del tiempo:

$$v_x = v_{ox} + a_x(t - t_o)$$

$$v_y = v_{oy} + a_y(t - t_o)$$

reemplazando en la expresión de $\vec{v}(t)$, se obtiene la velocidad en cualquier instante t:

$$\vec{v}(t) = [v_{ox} + a_x(t - t_o)]\hat{i} + [v_{oy} + a_y(t - t_o)]\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = (v_{ox}\hat{i} + v_{oy}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})(t - t_o)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}(t - t_o) \qquad (3.1)$$

De manera similar reemplazando las expresiones de la posición en función del tiempo en cada dirección x e y, para una partícula que en el instante inicial t_o se encuentra en la posición inicial $\vec{r}_o = x_o\hat{i} + y_o\hat{j}$ se obtiene la posición $\vec{r}(t)$ de la partícula, en cualquier instante t:

$$x = x_o + v_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}a_x(t - t_o)^2$$

$$y = y_o + v_{oy}(t - t_o) + \frac{1}{2} a_y (t - t_o)^2$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_o)^2 \qquad (3.2)$$

Se concluye que el movimiento bidimensional con aceleración constante es equivalente a dos movimientos independientes en las direcciones x e y con aceleraciones constantes a_x y a_y. A esta propiedad se le llama ***principio de independencia del movimiento***.

3.2 MOVIMIENTO DE PROYECTILES.

Cualquier objeto que sea lanzado en el aire con una velocidad inicial $\vec{v}_o$ de dirección arbitraria, se mueve describiendo una trayectoria curva en un plano. Si para esta forma común de movimiento se supone que: a) la aceleración de gravedad es constante en todo el movimiento (aproximación válida para el caso en que el desplazamiento horizontal del cuerpo en movimiento sea pequeño comparado con el radio de la Tierra) y b) se desprecia el efecto de las moléculas de aire sobre el cuerpo (aproximación no muy buena para el caso en que la rapidez del cuerpo en movimiento sea alta), entonces a este tipo de movimiento se le llama ***movimiento de proyectil*** y se produce en dos dimensiones.

Se elige el sistema de coordenadas (x, y) tradicional como se ve en la figura 3.1, donde se dibuja la trayectoria de una partícula en movimiento en dos dimensiones, junto con los vectores velocidad y aceleración de gravedad. Suponiendo que en el instante inicial $t = t_o$ el proyectil se encuentra en la posición inicial (x_o, y_o) moviéndose con una velocidad inicial $\vec{v}_o$ que forma un ángulo α con la horizontal, bajo la acción de la aceleración de gravedad $\vec{g}$, las ecuaciones para la posición del cuerpo en movimiento en dos dimensiones, se pueden escribir, a partir de la ecuación general de posición 3.2, para cada componente x e y por separado. Pero del gráfico (x, y) de la figura 3.1 se pueden obtener las componentes de la velocidad inicial $\vec{v}_o$, de magnitud v_o, y las componentes de la aceleración $\vec{a}$ de magnitud g:

$$v_{ox} = v_o \cos\alpha, \quad v_{oy} = v_o sen\alpha,$$

$$a_x = 0, \quad a_y = g$$

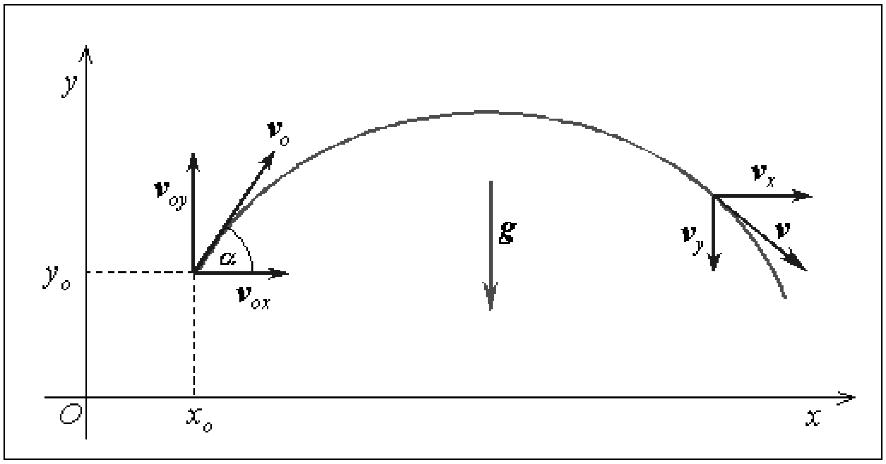

Figura 3.1 Sistema de referencia para el movimiento de un proyectil.

Reemplazando en las componentes de la ecuación 3.2, se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_o + v_o \cos\alpha (t - t_o) \\ y &= y_o + v_o sen\alpha (t - t_o) - \frac{1}{2} g (t - t_o)^2 \end{aligned}} \qquad (3.3)$$

Para las componentes de la velocidad se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_o \cos\alpha \\ v_y &= v_o sen\alpha - g(t - t_o) \end{aligned}} \qquad (3.4)$$

Como no hay aceleración en la dirección horizontal x, la componente x de la velocidad es constante, y como la aceleración en la dirección vertical y es g, las componentes de la posición y de la velocidad en esa dirección son idénticas a las ecuaciones para caída libre, con α = 90º. Entonces el movimiento de proyectil se compone de la superposición de un movimiento en dirección x con velocidad constante y un movimiento en dirección y de caída libre: es el principio de superposición del movimiento.

La ecuación de la trayectoria, esto es la curva geométrica que describe el cuerpo durante el movimiento del proyectil, se puede obtener despejando el parámetro $t - t_o$ de la ecuación en x y reemplazando en la ecuación para y:

$$t - t_o = \frac{x - x_o}{v_o \cos\alpha}$$

$$y = y_o + v_o sen\alpha \frac{(x - x_o)}{v_o \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_o)^2}{v_o^2 \cos^2\alpha}$$

$$y = y_o + \tan\alpha (x - x_o) - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}(x - x_o)^2 \qquad (3.5)$$

que es la ecuación de una parábola, por lo tanto la trayectoria del proyectil es parabólica y queda totalmente conocida si se conoce v_o y α. La velocidad del proyectil es siempre tangente a la trayectoria en cualquier instante, por lo que la dirección y la magnitud de la velocidad en cualquier instante se puede calcular en forma geométrica de las ecuaciones:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ejemplo 3.1: *Para un proyectil que se lanza en el instante inicial $t_o = 0$ desde el origen, con una velocidad inicial $\vec{v}_o$ formando un ángulo α con la horizontal, calcular: a) la altura máxima, b) la distancia horizontal.*

Solución: la situación se puede graficar en el esquema de la figura 3.2.

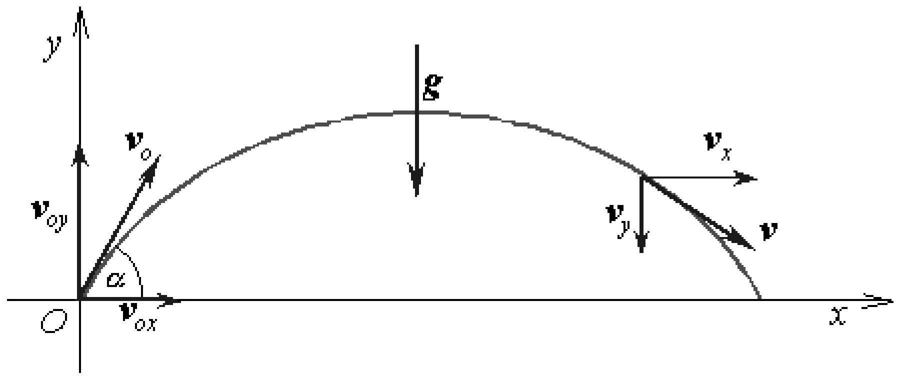

Figura 3.2 Ejemplo 1.

a) Cuando el proyectil alcanza su máxima altura, la componente *y* de la velocidad es cero ya que no sigue subiendo, además eso significa que la velocidad en esa posición es horizontal, entonces de v_y se obtiene:

$$v_y = v_o sen\alpha - gt = 0$$

$$t = \frac{v_o}{g} sen\alpha$$

que es el tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. Reemplazando en y

$$y = y_{máx} = v_o sen\alpha\left(\frac{v_o}{g} sen\alpha\right) - \frac{1}{2} g\left(\frac{v_o}{g} sen\alpha\right)^2$$

$$y_{máx} = \frac{v_o^2}{2g} sen^2\alpha$$

b) Para determinar la distancia horizontal, conocido también como alcance horizontal, usamos la condición que en esa posición el proyectil se encuentra en *(x,y) = (x,0)*, así que igualando la ecuación para *y* a cero se obtiene:

$$0 = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = 2\frac{v_o}{g} sen\alpha$$

que es el tiempo que demora el proyectil en llegar a la posición (x,0), se observa que es el doble del tiempo que demora en llegar a la altura máxima. Reemplazando este tiempo en x se obtiene la distancia horizontal x o alcance:

$$x = v_o \cos\alpha \left(2\frac{v_o}{g} sen\alpha \right) = \frac{v_o^2}{g} sen 2\alpha$$

Como consecuencia de esta expresión para la distancia horizontal, se puede obtener el alcance máximo para una velocidad inicial v_o conocida, este se produce cuando $sen 2\alpha = 1$, entonces

$$sen 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^o \Rightarrow \alpha = 45^o$$

E1 alcance máximo se produce para un ángulo de lanzamiento igual a 45°, como se muestra en la figura 3.3a. Además para cualquier ángulo distinto de 45° se puede obtener un mismo alcance para dos ángulos complementarios, tales como $\alpha = 30°$ y $\alpha = 60°$, situación que se ilustra en la figura 3.3b.

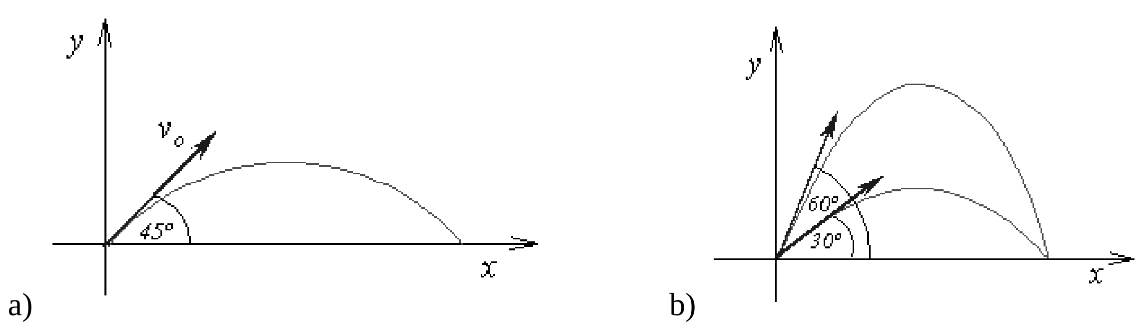

Figura 3.3. a) Alcance máximo, b) igual alcance para ángulos complementarios.

Ejemplo 3.2. *Se lanza un proyectil de manera que la distancia horizontal que recorre es el doble de su altura máxima, calcular su ángulo de lanzamiento*

Solución: Dado $x = 2y_{máx}$, se pide calcular α. De los resultados obtenidos en el ejemplo 1 para altura máxima y distancia horizontal, se tiene:

$$y_{\max} = \frac{v_o^2}{2g} sen^2\alpha \quad \text{y} \qquad x = \frac{v_o^2}{g} sen2\alpha$$

$$x = 2y_{\max} \Rightarrow \qquad \frac{v_o^2}{g} sen2\alpha = 2\frac{v_o^2}{2g} sen^2\alpha$$

$$sen2\alpha = sen^2\alpha$$

Usando la identidad trigonométrica $sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$ y separando $sen^2\alpha$ en sus factores, se obtiene la expresión:

$$2sen\alpha\cos\alpha = (sen\alpha)(sen\alpha) \Rightarrow 2\cos\alpha = sen\alpha$$

de donde se concluye que:

$$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63.4^\circ.$$

Ejemplo 3.3. *Se lanza una pelota desde la terraza de un edificio, con una rapidez inicial de 10 m/s en un ángulo de 20º debajo de la horizontal, y demora 3s en llegar al suelo. Calcular a) la distancia horizontal que recorre la pelota b) la altura desde donde se lanzó, c) el tiempo que tarda en llegar a 10 m debajo del punto de lanzamiento, d) la ecuación de la trayectoria.*

Solución: se debe hacer un esquema en un sistema de referencia con la información que se da en el enunciado del ejemplo; uno apropiado puede ser el que se muestra en la figura 3.4, pero dejamos en claro que este no es el único posible, por ejemplo, se puede cambiar el origen *O* y ubicarlo donde comienza el movimiento y no en el suelo, como en este caso (y no es necesario dibujar el edificio).

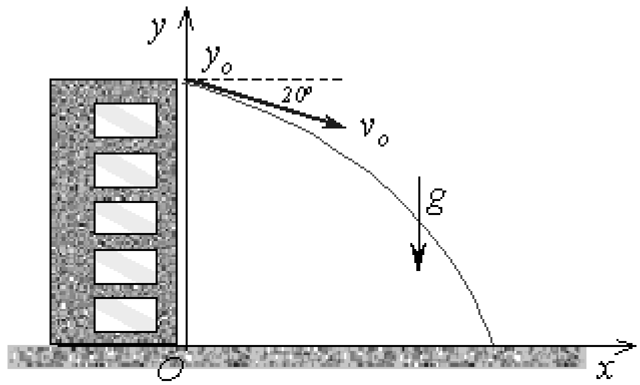

Figura 3.4 Sistema de referencia para el ejemplo 3.

Reemplazando los datos iniciales en las ecuaciones generales para el movimiento de proyectil (ec. 3.3), se tiene:

$$x = x_o + v_o(\cos\alpha)t \Rightarrow x = 10(\cos 20)t = 9.4t$$

$$y = y_o - v_o sen\alpha t - 5t^2 \Rightarrow y = y_o - 10(sen20)t - 5t^2$$

a) Para $t = 3s$, reemplazando en x,

$$x = 9.4 \times 3 = 28.2m$$

b) En $t = 3s$ la pelota llega al suelo donde $y = 0$, reemplazando en y,

$$0 = y_o - 10sen20 \times 3 - 5 \times 3^2$$

$$\Rightarrow y_o = 55.2\ m$$

c) Se pide calcular t cuando $y = y_o - 10 = 45.2\ m$, reemplazando en y:

$$45.2 = 55.2 - 10(sen20)t - 5t^2$$

$$5t^2 + 3.4t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-3.4 \pm \sqrt{(3.4)^2 + 4 \times 5 \times 10}}{10} = \frac{-3.4 \pm 14.5}{10}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1.1s \text{ y } t_2 = -1.8s$$

El valor válido es t_1, el tiempo t_2 negativo es un resultado matemático correcto, pero no es físicamente posible.

d) Para encontrar la ecuación de la trayectoria $y = y(x)$, es conveniente despejar t de la ecuación $x = 9.4\ t \Rightarrow t = x/9.4$; y reemplazar este valor de t en la ecuación para y:

$$y = 55.2 - 3.4t - 5t^2$$

$$y = 55.2 - 3.4\frac{x}{9.4} - \frac{5x^2}{(9.4)^2} \Rightarrow$$

$$y(x) = 55.2 - 0.36x - 0.056x^2$$

Ejercicio: *dibujar la ecuación de la trayectoria usando Excel, para ello dar valores a x en el rango 0 < x < 28 y calcular los valores de y.*

3.3 MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL.

Otro caso particular de movimiento en dos dimensiones es el de una partícula que se mueve describiendo una trayectoria circunferencial, con velocidad $\mathbf{v}$. Para un objeto que se mueve en una trayectoria circunferencial, si la ***rapidez*** v ***es constante***, el movimiento se llama circunferencial uniforme. Si en el instante inicial t_i el objeto tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_i$ y un instante posterior t_f tiene una velocidad final $\mathbf{v}_f$, como la rapidez es constante entonces $v_i = v_f$ y cambia sólo la dirección de la velocidad. Se puede calcular la aceleración media $\mathbf{a}_m$ de la partícula usando su definición:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

De la figura 3.5 se puede obtener $\Delta \boldsymbol{v}$ geométricamente. En la circunferencia (figura 3.5a) la longitud del arco Δs, subtendido por el ángulo $\Delta\theta$, es aproximadamente igual al lado del triángulo que une los puntos de $\boldsymbol{v}_i$ y $\boldsymbol{v}_f$. Observando que los triángulos de lados $r(\Delta s)r$ en la circunferencia y de lados $-v_i(\Delta v)v_f$ de la figura 3.5b son semejantes, entonces como $v_i = v_f$, se tiene la siguiente relación de semejanza de triángulos:

$$\frac{r}{\Delta s} = \frac{v}{\Delta v} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r}\Delta s$$

Reemplazando este valor de Δv en la magnitud de la aceleración media, se obtiene:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

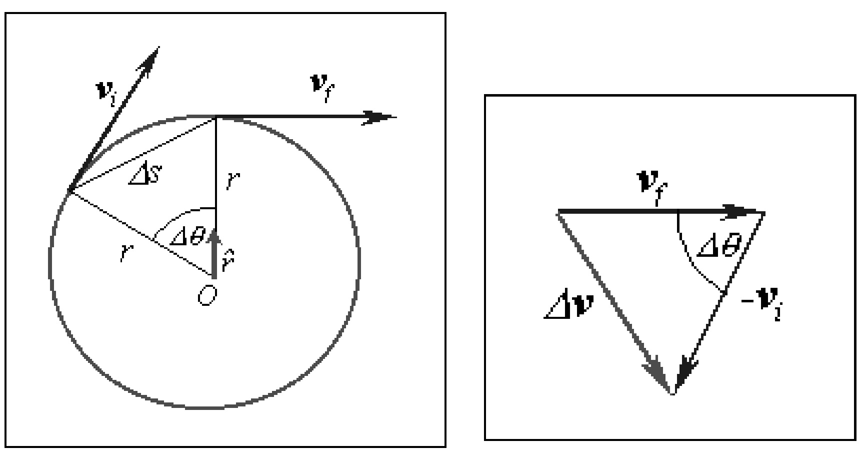

Figura 3.5 a) izquierda, b) derecha.

Si Δt es muy pequeño, tendiendo a cero, Δs y Δv también lo son, y Δv se hace perpendicular a **v**, por lo tanto apunta hacia el centro de la circunferencia. En el límite cuando $\Delta t \to 0$, $a_m \to a$ y se puede escribir:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r}v \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

Entonces en el movimiento circunferencial con rapidez constante, la aceleración apunta hacia el centro de la circunferencia (ya que en el límite Δ**v** apunta hacia el centro), por lo que se llama aceleración centrípeta a_c (también se usan los nombres central o radial) y el vector con su magnitud es:

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{v^2}{r}(-\hat{r})}, \qquad \boxed{a_c = \frac{v^2}{r}} \qquad (3.6)$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario radial dirigido desde el centro de la circunferencia hacia fuera, que se muestra en la figura 3.5a.

Para el caso en que durante el movimiento circunferencial de la partícula cambia la velocidad tanto en dirección como en magnitud, la velocidad siempre es tangente a la trayectoria (figura 3.6), pero ahora la aceleración ya no es radial, sino que forma un ángulo cualquiera con la velocidad. En este caso es conveniente escribir la aceleración en dos componentes vectoriales, una radial hacia el centro $\boldsymbol{a_r}$ y otra tangente a la trayectoria $\boldsymbol{a_t}$, entonces ***a*** se escribe como:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = a_r(-\hat{r}) + a_t\hat{t},$$

donde $\hat{t}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria, en la dirección del movimiento. En esta ecuación, la componente radial de la aceleración es la aceleración centrípeta originada por el ***cambio en la dirección*** de la velocidad y la componente tangencial es producida por el ***cambio en la magnitud*** de la velocidad, por lo tanto su valor numérico es:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

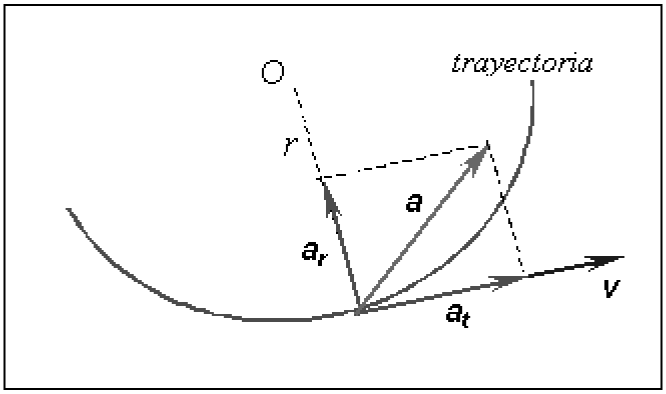

Figura 3.6

Entonces la aceleración total en el movimiento circunferencial es:

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} + \frac{dv}{dt}\hat{t}} \qquad (3.7)$$

En la figura 3.7 se ven los vectores unitarios para un movimiento circunferencial. Observar que en el caso del movimiento circunferencial uniforme $v = cte$, entonces $dv/dt = 0$ y $\vec{a} = \vec{a}_r = \vec{a}_c$. Y si no cambia la dirección de $\vec{v}$, $r \rightarrow \infty$, $a_r = 0$, el movimiento es en una dimensión con $\vec{a} = \vec{a}_t = d\vec{v}/dt$.

Aunque esta deducción fue realizada para el movimiento circunferencial, es válida para cualquier trayectoria curva, considerando el radio de curvatura de la trayectoria desde el punto donde se miden las variables hasta el centro de curvatura de la trayectoria en ese punto.

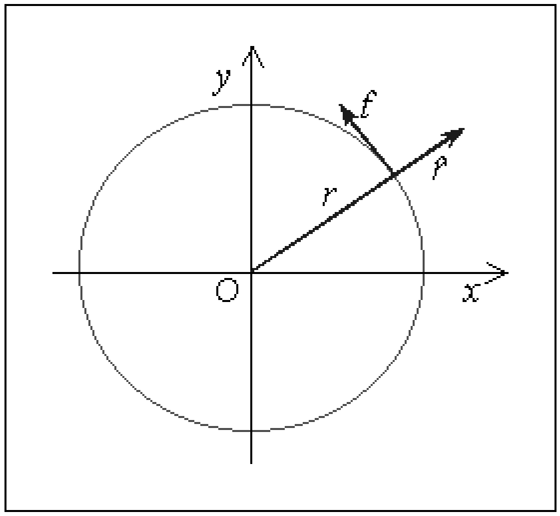

Figura 3.7

***Ejemplo 3.4**. Calcular la rapidez orbital de la traslación terrestre alrededor del Sol y la aceleración centrípeta correspondiente.*

Solución: la distancia media entre el Sol y la Tierra es d_{ST} = *149.6 x* 10^6 *km.* La Tierra completa una vuelta en torno al Sol en un año o 365.242199 días, entonces la rapidez orbital es:

$$x = x_0 + v(t - t_0) \Rightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\Delta t}$$

$$v = \frac{2\pi\, d_{TS}}{1\, año} = \frac{2\pi \times 1.496 \times 10^{11} m}{365.24 \times 24 \times 3600 s} = 2.98 \times 10^4 \frac{m}{s} = 29.8 \frac{km}{s}$$

Notar que la Tierra tiene una rapidez de traslación enorme en su movimiento en torno al Sol, es uno de los objetos mas veloces que cualquier otro que se mueva sobre la superficie terrestre. Pero su aceleración centrípeta es muy pequeña (comparada con *g* por ejemplo), como se obtiene del calculo siguiente:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{d_{TS}} = \frac{(2.98 \times 10^4)^2}{1.496 \times 10^{11}} = 5.9 \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

3.4 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULAR.

Una partícula que gira ubicada en un punto P a una distancia r del origen, describe una circunferencia en torno al origen. La posición de la partícula se puede expresar en coordenadas polares (r,θ), donde la única coordenada que cambia en el tiempo es el ángulo θ. Si la partícula se mueve desde el eje x positivo, donde $\theta = 0$ hasta un punto P, el arco de longitud s recorrido por la partícula, y el ángulo, como se ve en la figura 3.8, se definen como:

$$s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{r} \qquad (3.8)$$

Se observa que el ángulo es una variable adimensional, pero se le asigna como unidad de medida el nombre del ángulo, llamado ***radian***, con símbolo *rad*. De la ecuación 3.8, se define un radian como el ángulo subtendido por un arco de circunferencia de igual longitud que el radio de la misma. Como en una circunferencia, $s = 2\pi r$, y $2\pi\ (rad) = 360^o$, se puede encontrar la relación entre radianes y grados:

$$\theta(rad) = \frac{2\pi}{360^o}\theta^o$$

De aquí se deduce que el valor en grados de un radian es $1\ rad = 57.3^o$, y que por ejemplo, $45^o = \pi/4\ rad$.

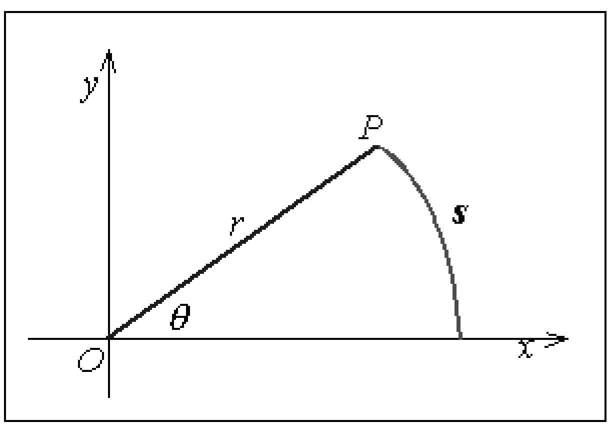

Figura 3.8

Cuando una partícula se mueve desde *P* hasta *Q* según la figura 3.9, en un intervalo de tiempo Δt, el radio se mueve un ángulo $\Delta\theta$, que es el desplazamiento angular. De manera análoga al movimiento lineal, se definen la rapidez angular ω y aceleración angular α como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Sus unidades de medida son *rad/s* y *rad/s*^{2}, recordando que el radian no es una unidad de medida, por lo que en el análisis dimensional se obtienen para estas variables las dimensiones de *1/s* y *1/s*^{2}. De la definición de estas variables se deduce además que para la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, todas las partículas tienen la misma velocidad angular y la misma aceleración angular.

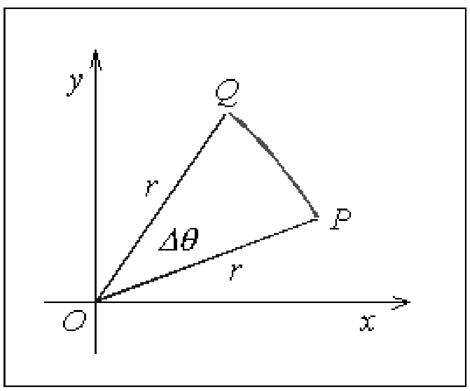

Figura 3.9 Desplazamiento angular $\Delta\theta$ desde *P* a *Q*.

3.4.1 Cinemática de rotación.

El desplazamiento, velocidad y aceleración angular son análogos a sus similares variables lineales. Así las ecuaciones cinemáticas del movimiento de rotación con aceleración angular constante tienen la misma forma que las correspondientes al movimiento lineal haciendo los reemplazos *x* por θ, *v* por ω y *a* por α, por lo que las ecuaciones cinemáticas del movimiento angular son:

$$\boxed{\theta = \theta_o + \omega_o (t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha (t - t_o)^2} \qquad (3.9)$$

$$\boxed{\omega = \omega_o + \alpha (t - t_o)} \qquad (3.10)$$

3.4.2 Relación entre las variables angulares y lineales.

Para toda partícula que gira describiendo una trayectoria circunferencial, existe una relación entre las magnitudes angulares con las correspondientes lineales. Si la partícula recorre una distancia lineal *s*, moviéndose un ángulo θ sobre una trayectoria circunferencial de radio *r*, tiene una velocidad que por ser tangente a la trayectoria se llama velocidad tangencial, y tiene aceleración tangencial y centrípeta, entonces las relaciones entre las variables son:

$$\boxed{\begin{aligned} & s = r\theta \\ & v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega \\ & a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha \\ & a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \end{aligned}} \qquad (3.11)$$

La magnitud de la aceleración en el movimiento circunferencial es:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Por último se debe decir que se usa comúnmente como unidad de medida de la variación angular el término revolución, que corresponde a una vuelta completa, ó 360º ó *2π (rad)*. Y para velocidad angular se usan las vueltas o revoluciones por minuto, con unidad de medida *rev/min*. Siempre se debe tener en mente que las vueltas o revoluciones son medidas de ángulo, por lo tanto son un número adimensional.

Ejemplo 3.5. *Transformar 12 rev/min a rad/s.*

Solución:

$$12\frac{rev}{\min} = 12\frac{rev}{\min}\times\frac{1\min}{60s}\times\frac{2\pi(rad)}{1rev} = 1.26\frac{rad}{s} \equiv 1.26s^{-1}$$

Ejemplo 3.6. *Calcular la rapidez angular, la velocidad tangencial y aceleración centrípeta a) en un punto sobre el ecuador para la rotación terrestre, b) para la traslación de la Tierra en torno al Sol.*

Solución: a) la Tierra da una vuelta en 23 horas 56' 4'' o un día y su radio medio es *6371 km*. Para un punto sobre el ecuador se tiene:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{día}} = \frac{2\pi}{86400s} = 7.27\times 10^{-5}\frac{rad}{s}$$

$$v_t = \omega R_T = 7.27\times 10^{-5}\frac{rad}{s}(6.371\times 10^{6}m) = 463.3\frac{m}{s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R_T} = \omega^2 R_T = \left(7.27\times 10^{-5}\frac{rad}{s}\right)^2 6.371\times 10^{6}m = 3.37\times 10^{-2}\frac{m}{s^2}$$

b) La traslación de la Tierra en torno al Sol se completa en un año y la distancia media de la Tierra al Sol es aproximadamente 150×10^{6} *km*:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{año}} = \frac{2\pi}{365 \times 86400} = 1.99 \times 10^{-7} \frac{rad}{s}$$

$$v_t = \omega R_{ST} = 1.99 \times 10^{-7} \frac{rad}{s} \times 1.5 \times 10^{11} m = 2.98 \times 10^{4} \frac{m}{s} = 29.8 \frac{km}{s}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(1.99 \times 10^{-7} \frac{rad}{s}\right)^2 \times 1.5 \times 10^{11} m = 6 \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 3.7*. Un disco de 10 cm de radio que gira a 30 rev/min demora un minuto en detenerse cuando se lo frena. Calcular: a) su aceleración angular, b) el número de revoluciones hasta detenerse, c) la rapidez tangencial de un punto del borde del disco antes de empezar a frenar, d) la aceleración centrípeta, tangencial y total para un punto del borde del disco.*

Solución: *Datos: r = 0.1m, Δt = 1 min = 60 s. Primero se transforman las 30 rev/min a rad/s.*

$$\omega_o = 30 \frac{rev}{\min} \times \frac{2\pi(rad)}{1rev} \times \frac{1\min}{60s} = 3.14 \frac{rad}{s}$$

(a) Usando las ecuaciones de cinemática de rotación: $\omega = \omega_o + \alpha(t - t_o)$, se despeja α, cuando se detiene ω = 0:

$$0 = \omega_o + \alpha\Delta t \Rightarrow \alpha = -\frac{\omega_o}{\Delta t} = -\frac{3.14\, rad/s}{60s} = -0.05 \frac{rad}{s^2}$$

(b) Se pide calcular $\Delta\theta$, usando la ecuación

$$\theta = \theta_o + \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2$$

reemplazando los datos, se obtiene:

$$\theta - \theta_o = 3.14 \frac{rad}{s} \times 60S - \frac{1}{2} 0.05 \times (60)^2 = 94.2 rad$$

$$\Delta\theta = 94.2 rad \times \frac{1 rev}{2\pi (rad)} = 15 rev$$

(c) Se puede calcular la rapidez con la ecuación: $v = r\omega$

$$v = 0.1m \times 3.14 \frac{rad}{s} = 0.314 \frac{m}{s}$$

(d) La aceleración centrípeta, tangencial y total es:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(0.314)^2}{0.1} = 0.98 \frac{m}{s^2}$$

$$a_t = r\alpha = 0.1 \times 0.05 = 0.005 \frac{m}{s^2}$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{(0.98)^2 + (0.005)^2} \approx 0.98 \frac{m}{s^2}$$

3.5 MOVIMIENTO RELATIVO.

Para una partícula en movimiento, observadores ubicados en sistemas de referencia diferentes medirán valores distintos de las variables cinemáticas, aunque el movimiento es el mismo. Por ejemplo, un objeto que se deja caer desde un vehículo en movimiento: el observador en el vehículo que deja caer el objeto lo ve caer verticalmente, pero un observador en tierra lo ve moverse como movimiento parabólico en dos dimensiones. Es un mismo movimiento visto en forma diferente por observadores en sistemas de referencia diferentes, se llama movimiento relativo, se produce en dos dimensiones.

Para describir el movimiento relativo consideramos observadores en dos sistemas de referencia: un sistema de referencia (x,y) fijo respecto a la Tierra con origen O y otro sistema de referencia (x',y') que se mueve respecto al fijo, con origen *O'*, como se ve en la figura 3.10, donde los ejes *x* y *x'* están superpuestos. Supongamos además que el sistema de referencia móvil se mueve en línea recta en dirección *x* con velocidad constante $\vec{u}$ respecto al sistema de referencia fijo.

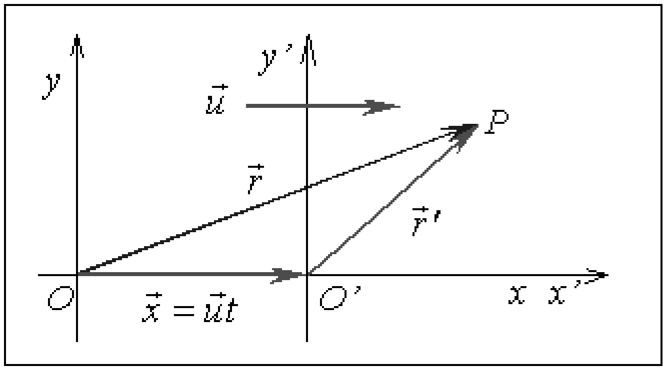

Figura 3.10. Vectores de posición de una partícula en movimiento relativo.

La posición de la partícula *P* en movimiento respecto al sistema de referencia fijo será ***r*** y respecto al sistema de referencia móvil será ***r'***. Si en $t_o = 0$ ambos orígenes coinciden, $x_o = 0$, y como ***u = cte***, la posición del sistema de referencia móvil en el instante *t* será:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$
$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{u}t$$

Del diagrama de vectores de la figura 3.10, se obtiene que la posición de la partícula cumple la siguiente relación vectorial:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{r}\,' \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{u}t + \vec{r}\,'$$

De esta expresión se puede obtener la velocidad de la partícula

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{u} \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

Entonces, la velocidad ***v*** de la partícula medida en el sistema de referencia fijo es igual a la velocidad ***v'***respecto al sistema de referencia móvil más la velocidad ***u*** del sistema de referencia móvil respecto al sistema de referencia fijo. Esta ecuación se conoce como la transformación galileana de velocidades.

La aceleración se puede obtener derivando la velocidad

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

como $\vec{u} = cte \Rightarrow \dfrac{d\vec{u}}{dt} = 0$, entonces $\vec{a} = \vec{a}\,'$

Se concluye que dos observadores ubicados en sistemas de referencia diferentes miden velocidades diferentes para la partícula, pero si la velocidad del sistema de referencia móvil es constante, los dos miden la misma aceleración de la partícula en movimiento.

Usaremos la siguiente notación: si P es la partícula, F el sistema de referencia fijo y M el sistema de referencia móvil, entonces la velocidad $\boldsymbol{v_{PF}}$ de la partícula respecto al sistema de referencia fijo es igual a la velocidad $\boldsymbol{v_{PM}}$ de la partícula respecto al sistema de referencia móvil más la velocidad $\boldsymbol{v_{MF}}$ del sistema de referencia móvil respecto al sistema de referencia fijo, esto es:

$$\boxed{\vec{v}_{PF} = \vec{v}_{PM} + \vec{v}_{MF}} \qquad (3.12)$$

Ejemplo 3.8. *La rapidez del agua de un río es 5 km/h uniforme hacia el este. Un bote que se dirige hacia el norte cruza el río con una rapidez de 10 km/h respecto al agua. a) Calcular la rapidez del bote respecto a un observador en la orilla del río. b) Calcular la dirección donde debe dirigirse el bote si se quiere llegar justo al frente en la orilla opuesta. c) Calcular ahora su rapidez respecto a la tierra.*

Solución: El sistema de referencia fijo es la tierra, el sistema de referencia móvil el río y la partícula es el bote, entonces:

v_{PM} = 10 km/h : rapidez del bote (partícula) respecto al agua (SR móvil)
v_{MF} = 5 km/h : rapidez del agua (SR móvil) respecto a tierra (SR fijo)
v_{PF} = ? : rapidez del bote (partícula) respecto a tierra (SR fijo)

a) Es conveniente hacer el diagrama de vectores de velocidades, que se muestra en la figura 3.11a:

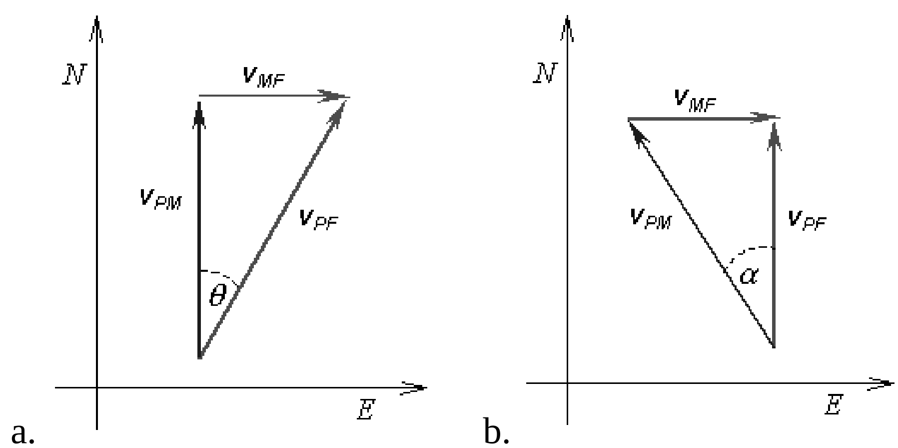

Figura 3.11 Ejemplo 8.

La magnitud de la velocidad del bote respecto a tierra v_{PF}, que tiene una componente a favor de la corriente, se puede calcular del triángulo rectángulo de vectores de la figura 3.11a

$$v_{PF}^2 = v_{PM}^2 + v_{MF}^2$$
$$v_{PF}^2 = 10^2 + 5^2 = 125$$
$$v_{PF} = 11.2 \frac{km}{h}$$

su dirección es:

$$\tan\theta = \frac{v_{MF}}{v_{PM}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 26.6^{o}\ NE$$

b) Si quiere llegar justo al frente desde donde sale, como la corriente del río lo arrastra hacia el este, haciendo el diagrama de vectores, figura 3.11b, se observa que debe apuntar en dirección α hacia el noroeste, entonces:

$$sen\alpha = \frac{v_{MF}}{v_{PM}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^{o}$$

c) Ahora, la rapidez v_{PF} es:

$$v_{PM}^2 = v_{MF}^2 + v_{PF}^2 \Rightarrow v_{PF}^2 = v_{PM}^2 - v_{MF}^2$$

$$v_{PF}^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow v_{PF} = 8.7\frac{km}{h}$$

Como debe remar con una componente de la velocidad en contra de la corriente, la velocidad resultante del bote en este caso es menor que en la parte a), donde una componente de la velocidad es a favor de la corriente.

PROBLEMAS.

3.1. Se dispara un proyectil desde el piso con velocidad $\vec{v} = (12\hat{\imath} + 24\hat{\jmath})\, m/s$. a) ¿Cuál es la velocidad después de 4 s? b) Cuáles es la posición del punto en el cual la altura es máxima? c) ¿Cuál es la distancia horizontal? R: a) 12i-15j m/s, b) 30i+30j m.

3.2. Desde el borde de un acantilado se lanza una piedra horizontalmente con una rapidez de 15 m/s. El acantilado está 50 m de altura respecto a una playa horizontal. a) ¿En que instante la piedra golpeará la playa bajo el acantilado?, b) ¿Dónde golpea? c) ¿Con qué rapidez y ángulo golpeará la playa? d) Encontrar la ecuación de la trayectoria de la piedra. R: a) 3.16s, b) 47.4m, c) 35m/s, 65º, d) $y=50-(x^2/45)$.

3.3. Un balón de fútbol que se patea a un ángulo de 50° con la horizontal, recorre una distancia horizontal de 20 m antes de chocar contra el suelo. Calcular a) la rapidez inicial del balón b) el tiempo que permanece en el aire y c) la altura máxima que alcanza. R: a) 14.2m/s, b) 2.2s, c) 6m.

3.4. Se lanza horizontalmente una pelota desde la parte superior de un edificio que tiene 35 m de alto. La pelota choca contra el piso en un punto que se encuentra a 80 m de la base del edificio. Calcular: a) el tiempo que la pelota se encuentra en el aire, b) su rapidez inicial y c) la velocidad justo antes de que choque contra el suelo. R: a) 2.6s, b) 30 m/s, c) 30i-26j m/s.

3.5. Se lanza una piedra de manera que la distancia horizontal que recorre es el triple de su altura máxima, calcular su ángulo de lanzamiento. R: 53.1º.

3.6. En el próximo partido de Chile con la selección de Micomicon, el Che Copete deberá patear un tiro libre desde un punto a *25m* del arco cuya altura es *2.5m.* Cuando patea, la pelota sale del césped con una rapidez de *20m/s* en un ángulo de 20º sobre la cancha. Suponiendo que la pelota no sufre ninguna alteración de su trayectoria, a) ¿se convierte o no el gol? b) ¿Con qué velocidad cruza por el arco? c) Obtenga la ecuación de la trayectoria de la pelota. (Por cuanto perderá Chile con los Micomicones). R: a) si, pasa a 0.25m del suelo, b) 18.8i-6.5j m/s.

3.7. Se lanza un cohete formando un ángulo de 60º con la horizontal con una rapidez inicial de *100 m/s*. El cohete se mueve a lo largo de su dirección inicial de movimiento con una aceleración de $30\ m/s^2$ durante *3s*. En ese instante deja de acelerar y empieza a moverse como un proyectil. Calcular: a) la altura máxima alcanzada por el cohete; b) su tiempo total de vuelo, c) la distancia horizontal. R: a) 1730m, b) 38s, c) 3543m.

3.8. Un proyectil se dispara desde cierta altura y_0 en un ángulo de 45º, con la intención que golpee a un móvil que se mueve con velocidad constante de *21 m/s* hacia la derecha, que se encuentra ubicado a *70 m* del origen sobre el eje *x* en el instante del disparo. Si el proyectil impacta al móvil al cabo de *10 s*, calcular a) la rapidez inicial del proyectil, b) su posición inicial, c) su altura máxima desde el suelo. R: a) 39.6m/s, b) 220m, c) 259.2m.

3.9. Katy le lanza un chicle (nuevo) desde una altura de *1.5 m* a Pepe, que se encuentra separado a *3 m* de Katy. El chicle pasa un segundo después a una altura de *1 m* por donde está Pepe, pero como él estaba ‘pajareando’ no lo toma. a) Hacer un esquema de la situación en un SR. b) Calcular la velocidad inicial que Katy le imprime al chicle. c) ¿A qué distancia detrás de Pepe caerá el chicle?, en este caso qué se debe suponer? d) Determinar la ecuación de la trayectoria del chicle de Katy. R: b)3i+4.5j m/s, c)0.45m.

3.10. Lucho se encuentra a *5m* de una pared vertical cuando lanza una pelota de básquetbol desde *2.25m* de altura, con una velocidad inicial de *-10i +10j m/s*. Cuando la pelota choca con la pared, la componente horizontal de la velocidad de la pelota se invierte y la componente vertical no cambia su dirección (pero si su magnitud). a) Hacer el esquema de la situación. b) ¿A que distancia de Lucho tocará el suelo la pelota? R: b) 12m detrás.

3.11. Un tren se mueve con rapidez constante de *54 km/h*. Desde una ventana del tren ubicada a *2 m* del suelo, un cabrochico tira un objeto horizontal y perpendicularmente a la dirección de movimiento del tren, con una rapidez de *5 m/s*. Calcular la posición donde caerá el objeto respecto al punto de lanzamiento. R: 3.15i+9.45j+0k m.

3.12. Se apunta un rifle horizontalmente a través de su mira hacia el centro de un blanco grande que esta a 200 m. La velocidad inicial de la bala es de 500 m/s. a) ¿En dónde golpea la bala en el blanco? b) Calcular el ángulo de elevación del cañón para dar en el centro del blanco. R: a) 0.8m debajo de la altura del rifle, b) 0.23º.

3.13. Un cañón dispara un proyectil con una rapidez inicial v_o inclinado en un ángulo α. Si el ángulo se cambia a β, el alcance del proyectil aumenta en una distancia D. Demuestre que

$$D = \frac{v_o^2}{g}\left(sen2\beta - sen2\alpha\right)$$

3.14. La distancia horizontal máxima a la que puede patear la pelota un arquero es 120 m. En un saque desde el arco, golpea la pelota con la misma rapidez inicial con la que alcanza esa distancia máxima, pero formando un ángulo de 25º con la horizontal. Calcular a que distancia del arco llegará la pelota con un chute del arquero.

3.15. Una pulga puede saltar una altura vertical *h*. a) ¿Cuál es la distancia horizontal máxima que puede recorrer? b) ¿Cuál es su permanencia en el aire en ambos casos?

3.16. Un camión se mueve al norte con una velocidad constante de 10 m/s en un tramo de camino horizontal. Un cabrochico que pasea en la parte posterior del camión desea lanzar una pelota mientras el camión se está moviendo y atraparla después de que el camión haya recorrido 20 m. a) Despreciando la resistencia del aire, ¿a qué ángulo de la vertical debería ser lanzada la pelota? b) Cuál debe ser la rapidez inicial de la pelota? c) Cuál es la forma de trayectoria de la pelota vista por el cabrochico? d) Una persona sobre la tierra observa que el muchacho lanza la pelota y la atrapa. En este marco de referencia fijo del observador, determine la forma general de la trayectoria de la pelota y la velocidad inicial de esta.

3.17. Un cabrochico tira una pelota al aire lo más fuerte que puede y luego corre como una liebre para poder atrapar la pelota. Si su rapidez máxima en el lanzamiento de la pelota es 20 m/s y su mejor tiempo para recorrer 20 m es 3 s, calcular la altura de la pelota para que pueda tomarla.

3.18. Una pelota de golf sale desde el piso en un ángulo α y golpea a un árbol a una altura H del suelo. Si el árbol se encuentra a una distancia horizontal D del punto de lanzamiento, a) demuestre que $\tan\alpha = 2H/D$. b) Calcular la rapidez inicial de la pelota en términos de D y H.

3.19. Una partícula comienza a girar desde el reposo hasta una rapidez angular de *15 rad/s* en *3* segundos. Calcular a) su aceleración angular, b) el número de vueltas en ese tiempo.

3.20. Una rueda de bicicleta de 30 cm de radio comienza a girar desde el reposo con una aceleración angular constante de $3\ rad/s^2$. Después de 10 segundos calcular: a) su rapidez angular, b) el desplazamiento angular, c) la rapidez tangencial de un punto del borde, d) su aceleración total para un punto del borde. R: a) 30 rad/s, b) 150 rad, c) 9 m/s, d) 270 m/s^2.

3.21. Busque la información necesaria para calcular la aceleración centrípeta al nivel del mar de un punto sobre el Ecuador, en Concepción, en 45º de latitud sur y en el Polo Sur. R: 0.034 m/s^2, 0.027 m/s^2, 0.024 m/s^2, 0.

3.22. La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es aproximadamente circular, con un radio promedio de $3.84 \times 10^8\ m$. La Luna completa una revolución en torno a la Tierra y en torno a su eje en 27.3 días. Calcular a) la rapidez orbital media de la Luna, b) la rapidez angular, c) aceleración centrípeta. R: a) 1023m/s, b) $2.7\text{x}10^{-6}$ rad/s, c) $2.7\text{x}10^{-3}$ m/s^2.

3.23. Calcular la rapidez orbital media de la Tierra en torno al Sol y su rapidez angular en torno a su eje de rotación. R: 29.8km/h, $7.27\text{x}10^{-5}$ rad/s.

3.24. A la partícula del extremo de un péndulo de largo un metro se la hace girar de forma tal que su movimiento describe una circunferencia en un plano horizontal. Cuando el péndulo se ha desviado 30º de la vertical, la partícula completa una vuelta cada 3 segundos. Calcular a) su rapidez angular b) su rapidez tangencial, c) su aceleración centrípeta. R: a) 2.1 rad/s, b) 1.05 m/s, c) 2.2 m/s^2.

3.25. Una centrífuga cuyo tambor tiene *50 cm* de diámetro, comienza a girar desde el reposo hasta alcanzar una rapidez angular de *1000 rpm* en *10 s*. a) Calcular su aceleración angular. b) Si después de los *10 s* gira con rapidez constante durante 5 minutos, calcular el número de vueltas que da cada minuto. c) calcular la rapidez tangencial, aceleración centrípeta y tangencial en las paredes del tambor. d) Si después de los 5 minutos tarda *20 s* en detenerse, calcular su aceleración angular. R: a)10.5rad/s, b)10^3, d)-5.2/s^2.

3.26. Un disco comienza a girar desde el reposo con aceleración angular constante hasta una rapidez angular de 12 rad/s en 3 s. Calcular: a) la aceleración angular del disco, b) el ángulo que describe. R: a) 4rad/s^2, b) 18rad.

3.27. Un motor eléctrico hace girar un disco a razón de 100 rev/min. Cuando se apaga el motor, su aceleración angular es –2 rad/s^2. Calcular: a) el tiempo que demora el disco en detenerse, b) el número de vueltas que gira en ese tiempo. R: a) 5.2 s, b) 27.5 rad.

3.28. Un disco comienza a girar desde el reposo con aceleración angular constante de 5 rad/s^2 por 8 s. Luego el disco se lleva al reposo con una aceleración angular constante en 10 revoluciones. Calcular: a) su aceleración angular, b) el tiempo que demora en detenerse. R: a) –12.7 rad/s^2, b) π s.

3.29. Un volante de 2 m de diámetro, comienza a girar desde el reposo con aceleración angular constante de 4 rad/s^2. En el instante inicial un punto P del borde del volante forma un ángulo de 57.3º con la horizontal. Calcular para el instante 2 s: a) su rapidez angular, b) la rapidez lineal de P, c) la aceleración lineal de P, d) la posición de P. R: a) 8 rad/s, b) 8 m/s, d) 9 rad.

3.30. Un disco de 8 cm de radio, gira con una rapidez angular constante de 1200 rev/min. Calcular: a) la rapidez angular del disco, b) la rapidez lineal de un punto a 3 cm del disco, c) la aceleración radial de un punto en el borde del disco, d) la distancia total recorrida por un punto del borde en 2 s. R: a) 126 rad/s b) 3.8 m/s, c) 1.26 km/s^2, d) 20.1m.

3.31. La posición de una partícula que se mueve en el plano *xy* varía con el tiempo según la ecuación $\mathbf{r} = a\cos(\omega t)i + a\,sen(\omega t)j$, en donde *r* y *a* se miden en *m*, ω en s^{-1} y *t* en *s*. a) Demuestre que la trayectoria de la partícula es una circunferencia que tiene *a m* de radio y su centro está en el origen. b) determine los vectores de velocidad y de aceleración c)

Demuestre que el vector aceleración siempre apunta hacia el origen (opuesto a *r*) y tiene una magnitud de v^2/r.

3.32. Superman (no el Vargas, el de verdad), que le anda echando el ojo a Luisa Lane, vuela hacia el noreste, donde se encuentra ella, con una rapidez de *54 km/h* respecto al aire. El viento sopla hacia el noroeste a *7.5 m/s* respecto de tierra. a) Calcular la rapidez de Superman respecto de tierra. b) Superman, que no aprobó Física I, no se encuentra con Luisa ¿por qué? R: a) 60.3 km/h, b) porque se desvía 26.6º.

3.33. Un cóndor (no el Rojas, sino uno de verdad) vuela hacia el este con una rapidez de 12 km/h respecto del aire, en presencia de un viento que sopla hacia el noreste (a 45º) con una rapidez de 5 m/s. a) Calcular la rapidez resultante del cóndor. b) ¿Qué distancia se desvía cada minuto respecto a la dirección este? R: a) 27.8km/h, b) 212m.

3.34. El piloto de un avión se orienta hacia el oeste en presencia de un viento que sopla hacia el sur a *75 km/h*. Si la rapidez del avión respecto al viento es *500 km/h*, a) ¿Cuál es su rapidez respecto a la tierra? b) ¿en qué dirección se desvía el avión? c) ¿en qué dirección debe dirigirse el avión para ir hacia el oeste? d) En este caso ¿cuál será su rapidez respecto a la tierra? R: a) *506 km/h*, b) 8.5º, c) 8.6º, d) 494.3 km/h.

3.35. El piloto de una avión observa que la brújula indica que va dirigiéndose hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km/h. Si existiera un viento de 30 km/h hacia el norte, calcule la velocidad del avión respecto a la Tierra. R: 153km/h, 11.3ºNW.

3.36. Un pescador desea cruzar un río de 1 km de ancho, el cual tiene una corriente de 5 km/h hacia el norte. El pescador está sobre el lado oeste. Su bote se impulsa con una rapidez de 4 km/h respecto del agua. a) ¿En qué dirección deberá apuntar para hacer el cruce en un tiempo mínimo?, b) ¿Cuánto tiempo le tomará para cruzar?, c) Determine la velocidad del bote con respecto a un observador estacionario en la Tierra, d) Encuentre el desplazamiento final corriente abajo. R: a) este, b) 15min, c) 6.4km/h, 51.3º NE, d) 1.25 km.