Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Test N°9
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. **(6 puntos)** Demostrar la identidad

$$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = (\sec\alpha - \tan\alpha)^2 \,.$$

<u>**Desarrollo**</u>**:**

Desarrollando el lado derecho :

$$\begin{aligned}
(\sec\alpha - \tan\alpha)^2 &= \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \qquad \textbf{(2 puntos)}\\
&= \left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2\\
&= \frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\\
&= \frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha} \qquad \textbf{(2 puntos)}\\
&= \frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}\\
&= \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \qquad \textbf{(2 puntos)}
\end{aligned}$$

2. **(6 puntos)** Resolver la siguiente ecuación para $x \in [0, 2\pi]$.

$$\cos^2 x + \sin^2(2x) = 1$$

<u>**Desarrollo**</u>**:**

A partir de la identidad

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

se tiene

$$\sin^2 x = \sin^2(2x)$$

$$\sin^2 x = 4\sin^2 x \cos^2 x$$

(2 puntos)

que tiene las soluciones

$$\sin x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{1}{2}. \qquad \textbf{(2 puntos)}$$

En el primer cuadrante $|\cos x| = \frac{1}{2}$ tiene la solución $x = \frac{\pi}{3}$, la que en cada cuadrante corresponde a $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ y $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, respectivamente. Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es

$$\{0, \pi, 2\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

(2 puntos)

Tiempo: 40 minutos