Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°6
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(x-2) = x^2 + 2x + 4.$$

   a) Calcular $f(0)$ y $f(3)$.

   b) Utilizando la sustitución $t = x - 2$, determinar la expresión que define a $f(t)$.

   c) Hallar el conjunto $f^{-1}(12)$.

Solución:

a) Si en la igualdad definida por $f(x-2) = x^2 + 2x + 4$ se considera $x = 2$, se tiene que $f(0) = 4 + 4 + 4 = 12$ y si se considera $x = 5$, se tiene que $f(3) = 25 + 10 + 4 = 39$. **(1 punto)**

b) Dado que $x = t + 2$ y como $f(x-2) = x^2 + 2x + 4$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= (t+2)^2 + 2(t+2) + 4 \\ &= t^2 + 4t + 4 + 2t + 4 \\ &= t^2 + 6t + 12. \end{aligned}$$ **(2 puntos)**

c) Como $f(t) = 12 \Leftrightarrow t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow (t = -6 \vee t = 0)$, entonces

$$f^{-1}(12) = \{-6, 0\}.$$ **(2 puntos)**

2. Sea $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$g(x) = -\sqrt{5 + 4x - x^2}\,.$$

Determinar, de manera analítica, dominio y recorrido.

Solución: De la definición de dominio, se tiene

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : 5 + 4x - x^2 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x-5) \leq 0\} \\ &= [-1, 5]\,. \ \textbf{(2 puntos)} \end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de recorrido, se tiene

$$\begin{aligned} R_g &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f,\, y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-1, 5]\,,\, y = -\sqrt{5 + 4x - x^2}\right\} \ \textbf{(2 puntos)} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : y^2 = 9 - (x-2)^2,\, y \leq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : |x - 2| = \sqrt{9 - y^2} \leq 3,\, y \leq 0\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 3,\, y \leq 0\} \\ &= [-3, 0]\,. \ \textbf{(3 puntos)} \end{aligned}$$

JUA/EGG/MWC/egg
4 de Mayo de 2018