UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Pauta Test 4

Algebra y Trigonometría (527103)

(6 puntos) Considere la recta l_1, de ecuación: $2x + y = 10$ y el punto: $A\,(3,4)$.

i. Verifique que $A \in l_1$.

ii. Determine la ecuación de la recta l_2 , paralela a l_1 que pasa por el origen.

iii. Calcule la distancia entre l_1 y l_2.

iv. Obtenga la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en l_2 y que es tangente a l_1 en el punto A.

Desarrollo:

i. $A\,(3,4) \in l_1$ porque sus coordenadas satisfacen la ecuación de esta recta: $2 \cdot 3 + 4 = 10$.

ii. La ecuación de la recta l_2 paralela a l_1 que pasa por el origen es $2x + y = 0$, es decir,

$y = -2x$.

iii. La distancia entre l_1 y l_2 la podemos calcular como la distancia del origen a la recta

l_1, y vale:

$$d\left((0,0)\,, l_1\right) = \frac{|2 \cdot 0 + 0 - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

iv. El centro C de la circunferencia está en l_2 y en la perpendicular a l_2 bajada desde A,

cuya ecuación es: $y - 4 = \frac{1}{2}\,(x - 3)$, es decir: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.
Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones, igualando los valores de y:

$$y = -2x = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \implies \frac{5}{2}x = -\frac{5}{2} \implies x = -1, \quad y = 2$$

Luego, $C\,(-1,2)$.
El radio de la circunferencia es la distancia entre las rectas porque una de las rectas es tangente a la circunferencia y el centro está en la otra (paralela a la primera).
Finalmente, la ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 20$$

Puntaje: i) 1 punto
ii) 1 punto
iii) 1 punto
iv) 2 puntos por encontrar las coordenadas del centro.
1 punto por la ecuación de la circunferencia.