Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°3
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. Considerar las sumas A y B definidas por

$$A = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2 \text{ y } B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2.$$

   a) Escribir A y B utilizando sumatorias.

   b) Escribir $A - B$ como una única sumatoria.

   c) Calcular $A - B$.

   Solución:

   a) A puede escribirse como $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} (2i)^2$ y B como $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} (2i-1)^2$. **(2 puntos)**

   b) $A - B = \displaystyle\sum_{i=1}^{50} \left((2i)^2 - (2i-1)^2\right) = \sum_{i=1}^{50} (4i - 1)$. **(2 puntos)**

   c) $A - B = 4\displaystyle\sum_{i=1}^{50} i - \sum_{i=1}^{50} 1 = 4 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 50 = 5050.$ **(2 puntos)**

2. Utilizar el Principio de Inducción Matemática, para demostrar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}\left(n+1\right)^2, \; \forall n \geq 1.$$

Solución: Al definir la función proposicional $p(n)$ por

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}\left(n+1\right)^2$$

para usar Inducción Matemática, se tiene que

i) $p(1)$ es verdadera pues $1 = \frac{1^2}{4} \cdot (1+1)^2$ **(1 punto)**

ii) La hipótesis inductiva afirma que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2}{4}\left(k+1\right)^2 \; \textbf{(1 punto)}$$

y la tesis inductiva afirma que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}\left(k+2\right)^2 \; \textbf{(1 punto)}$$

iii) Al considerar la igualdad dada por la hipótesis y sumar $(k+1)^3$ a ambos lados, se tiene

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2}{4}\left(k+1\right)^2 + \left(k+1\right)^3 \\ &= \frac{k^2}{4}\left(k+1\right)^2 + \frac{4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2+4k+4\right) \\ &= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k+2\right)^2. \; \textbf{(2 puntos)} \end{aligned}$$

De lo anterior, por el Principio de Inducción Matemática, se ha probado que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}\left(n+1\right)^2, \; \forall n \geq 1. \; \textbf{(1 punto)}$$

JUA/EGG/MWC/egg
13 de Abril de 2018