Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 3
Cálculo III (2025)
PLEV 2018

1. Sean C la curva parametrizada por $C(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ con $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ y el campo escalar $f(x,y,z) = z$, calcular $\displaystyle\int_C f\, dr$.

2. Sea $C : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva definida por $C(t) = \left(6t, 8t, \dfrac{1}{2}t^2\right)$, para el campo definido por $F(x,y,z) = (2z, z, x+y)$, evaluar la integral de línea $\displaystyle\int_C F \cdot dr$.

3. Calcular $\displaystyle\int_C x\, dx + y\, dy + z\, dz$ a lo largo de la hélice cuya parametrización está dada por $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 4\sin t$ y $z(t) = 3t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

4. Calcular la integral de línea $\displaystyle\int_C 2xy\, dx - x^2\, dy$, cuando C es la curva va desde el origen $O(0,0)$ hasta el punto $A(2,1)$ siguiente:

   a) C es el segmento de recta orientado que une a ambos puntos,
   b) C es el arco de la parábola que pasa por ambos puntos y es simétrica con respecto al eje y.

5. Evaluar la integral de línea $\displaystyle\int_C 3x^2y^2\, dx + 2x^3y\, dy$, donde C es la curva que une el origen $O(0,0)$ con el punto $A(2,2)$ en los siguientes casos:

   a) C es el segmento de recta orientado que va desde O hasta A,
   b) C es el arco de la parábola que pasa por ambos puntos y es simétrica con respecto al eje y,
   c) C es el arco de la parábola que pasa por ambos puntos y es simétrica con respecto al eje x,
   d) C es la línea quebrada OBA, siendo $B(2,0)$,
   e) C es la línea quebrada ODA, siendo $D(0,1)$.

6. Si C es la curva de intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $y + z = 1$, orientada de manera que la curva C_1, proyección de C sobre el plano xy, está en sentido antihorario:

   a) Encontrar una representación paramétrica de C.
   b) Calcular la integral $\displaystyle\oint_C y\, dx + z\, dy + 4\, dz$.

7. Sea $F(x,y,z) = (3xz^2 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z - y^2)$. Encontrar $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dr$ donde Γ es el arco de la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y + z = 1$ que une los puntos $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$ y que está bajo el plano $z = 0$.

8. Considerar $F(x,y,z) = (3x^2y^2 + 6xz)\hat{\imath} + (2x^3y + 2z^2)\hat{\jmath} + (3x^2 + 4yz)\hat{k}$.

   a) Indicar justificadamente, si el campo vectorial F es conservativo.

   b) Sea C la curva que se encuentra en el primer octante como intersección entre los cilindros $x^2 + z^2 = 4$ e $y^2 + z^2 = 4$. Si C está orientada hacia el plano xy, calcular el trabajo $W = \int_C F \cdot dr$.

9. Un campo de fuerzas F se define por

$$F(x,y,z) = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} - yz\hat{k}, \text{ con } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Decidir si F es o no conservativo en $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcular el trabajo $W = \int F \cdot dr$ efectuado al mover una partícula desde el punto $(2, 0, \sqrt{5})$ hasta el punto $(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{5})$, con $y \geq 0$, a lo largo de la curva de intersección C entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $z = \sqrt{5}$ bajo la influencia del campo F.

10. Sea C la curva de intersección del plano $y - z = 0$ con la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ correspondiente a $0 \leq z \leq 2$. Para el campo F, definido por

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{x^2+y^2} + y + 1\right)\hat{\imath} + \left(\frac{2yz}{x^2+y^2} + x + 2\right)\hat{\jmath} + \left(\ln\left(x^2+y^2\right) + 3\right)\hat{k}.$$

   a) Calcular, parametrizando C, la integral de línea $\int_C F \cdot dr$.

   b) Verificar que $f(x,y,z) = z\ln(x^2+y^2) + xy + x + 2y + 3z$ es un potencial escalar para F y calcular $\int_{C_1} F \cdot dr$, donde C_1 es cualquier curva suave que va desde $(-1,0,0)$ hasta $(1,0,0)$ y que no corta al eje z.

11. Considerar el campo vectorial $F(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} - \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath} + 3z^2\hat{k}$ y la curva $C(t) = (t, t^3 + t^2 - 1, t + 3)$. Calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de C desde el punto $P_1(-1,-1,2)$ hasta el punto $P_2(1,1,4)$.

12. Hallar el valor de la integral curvilínea $\oint_\Gamma (e^x + 3x^2y^2)dx + (6x + 2x^3y)dy$, si Γ es la curva simple cerrada cuya traza es el cuadrilátero de vértices $A(1,1)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$ y $D(0,3)$.

13. Hallar $\oint_C (2x + 3y)\,dx + (x + 4y)\,dy$, si C es la elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

   a) Usando el Teorema de Green.

   b) Directamente, parametrizando la curva.

14. Aplicando el Teorema de Green, calcular $\oint_C (2xy + 3\sinh(x))\,dx + (3x^2 - 8y)\,dy$ si $C = Fr(D)$, donde D es la región acotada por el eje y, $y = g(x)$ e $y = g(x) + \cos(x)$, donde $g : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ es una función positiva y de clase C^1.

15. Sea R la región encerrada por una curva de Jordan C, mostrar que

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy = -\oint_C y\,dx = \oint_C x\,dy.$$

16. Sea $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$, determinar el valor de la integral doble $\iint_D (x^4 + y^4)\,d(x,y)$ transformándola antes en una integral de línea.

17. Sean $p(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y$ y $q(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x$. Utilizar la segunda versión del Teorema de Green para calcular $\oint_C p\,dx + q\,dy$, donde C es la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$.

18. Sean p y q como en el problema anterior, determinar el valor de la integral de línea $\int_C p\,dx + q\,dy$, sabiendo que C es el arco de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ que está en el primer cuadrante y que va desde el punto $A(0,2)$ hasta el punto $B(3,0)$.

19. Sea S la porción del plano $z = 5 - 2x - y$ cuya proyección sobre el plano xy es es el rectángulo $R = [2,10] \times [4,7]$. Evaluar la integral de superficie

$$\iint_S (2x + y + z)\;dA.$$

20. Evaluar la integral de superficie $\iint_S z^2\,dA$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$:

    a) Utilizando la definición, parametrizando S.

    b) Calculando antes la integral $\iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dA$, para luego relacionar su valor con el de la integral pedida.

21. Calcular $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$, donde $F(x,y,z) = yz\hat{\imath} + x\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$ y S es la parte del cilindro parabólico $y = x^2$ que está acotada por $x = -1$, $x = 2$, $z = -2$ y $x + z = 4$.

22. Hallar el flujo del campo definido por $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la cara externa de la esfera $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 25$.

23. Para el campo vectorial $F(x,y,z) = \left(x^2 + \sin z, xy + \cos z, e^y\right)$, evaluar la integral de superficie $\oiint_S F\cdot\hat{n}\,dA$, donde S limita al sólido acotado por el plano xy, el cilindro $x^2+y^2 = 4$ y el plano $x + z = 6$ y $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a S.

24. Sean $F(x,y,z) = 2x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$, D la región del primer octante limitada por el cilindro $z = 4 - x^2$ y el plano $4x + 3y = 12$ y S la superficie que acota a D orientada exteriormente. Hallar, utilizando el Teorema de Gauss, $\oiint_S F\cdot\hat{n}\,dA$.

25. Sea $F(x,y,z) = (2x, 4y, 9z)$. Considerar el volumen V limitado por las superficies $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$ para calcular

$$\oiint_S F\cdot\hat{n}\,dA,$$

donde S es la frontera de V.

26. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $F(x, y, z) = 2x\hat{\imath} - 3y\hat{\jmath} + (5z + 1)\hat{k}$.

   a) Calcular $\displaystyle\iint_{S_1} F \cdot \hat{n}\, dA$, donde $S_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\big\}$.

   b) Aplicando el Teorema de Gauss, calcular $\displaystyle\iint_{S} F \cdot \hat{n}\, dA$ donde S es la superficie suave por secciones formada por el cilindro

   $$S_2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\big\}$$

   y por la porción de elipsoide

   $$S_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{(z-1)^2}{9} = 1, z \geq 1\right\}.$$

27. Utilizar el Teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (y, 2x, 3z)$ a través de la superficie

   $$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\big\}.$$

28. Sea S la superficie del cubo V de centro en $(0, 0, 0)$ de aristas paralelas a los ejes coordenados y longitud 2, orientada exteriormente. Dadas $u(x, y, z) = \cos(\pi x) + 9z^2$ y $v(x, y, z) = 3x + y^2$, calcular $\displaystyle\oiint_S u \frac{\partial v}{\partial \hat{n}}\, dA$ si $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a S.

29. Determinar el flujo del campo $F(x, y, z) = x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath} + 3z\hat{k}$ a través de la frontera S de la región acotada por las superficies $x = y^2$ y $x = 4 - z^2$ orientada exteriormente:

   a) Directamente, parametrizando las dos caras de S.

   b) Utilizando el Teorema de Gauss.

30. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, el campo vectorial definido por

   $$F(x, y, z) = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \text{ para } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

   a) Calcular el flujo $\displaystyle\oiint_S F \cdot \hat{n}\, dA$ a través de una esfera de radio a centrada en el origen y orientada exteriormente.

   b) Hallar la divergencia del campo, $\nabla \cdot F$.

   c) En la teoría electromagnética, el campo eléctrico creado por una carga puntual q, ubicada en el origen es $E = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0} F$, donde ϵ_0 es una constante. Usar las partes *a*), *b*) y el Teorema de Gauss para calcular el flujo $\displaystyle\oiint_S E \cdot \hat{n}\, dA$, en los siguientes casos:

   - S es una esfera centrada en el origen y orientada exteriormente,
   - S es la esfera unitaria de centro en el punto $(2, 0, 0)$,
   - S es el elipsoide de ecuación $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ orientado exteriormente.

31. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función armónica, es decir, f es de clase C^2 y satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Sea además R un sólido en el espacio cuya frontera S es seccionalmente suave y orientable, si $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a S, demostrar que:

a) $\displaystyle\oiint_S \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}\, dA = 0.$

b) $\displaystyle\oiint_S f \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}\, dA = \iiint_R \|\nabla f\|^2\, dV.$

32. Sean $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^2, probar que $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$.

33. Calcular $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA$, donde $F(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$, S es la superficie correspondiente a las caras del cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ que no están en el plano xy y $\hat{n}$ es la normal unitaria *exterior*:

a) Utilizando el Teorema de Gauss.

b) Utilizando el Teorema de Stokes.

34. Determinar el valor de la integral de línea

$$\oint_C xz\, dx + xy\, dy + 3xz\, dz$$

y C es el borde de la porción del plano $2x + y + z = 2$ en el primer octante:

a) Directamente, parametrizando C.

b) Utilizando el Teorema de Stokes.

35. Mediante el Teorema de Stokes, la integral curvilínea

$$\oint_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz,$$

donde C es la curva de intersección entre el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados, con a, b y c constantes positivas.

36. Utilizando el Teorema de Stokes, calcular $\displaystyle\oint_C F \cdot dr$, donde $F(x, y, z) = (2y, z, 3y)$ y C es la intersección entre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ con el plano $z = x + 3$, orientada en sentido antihorario vista desde el origen.

37. Sea S la parte de paraboloide $z = x^2 + y^2 - 1$ por debajo del plano $z = 8$, con orientación $\hat{n}$ tal que $\hat{n} \cdot \hat{k} > 0$ y sea F el campo el campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (x^2 - y - 4, xy, 2x + z^2)$.

a) Calcular el área de S.

b) Utilizando el Teorema de Stokes, calcular $\displaystyle\oint_{\partial S} F \cdot dr$.

38. Un campo de fuerzas está dado por $F(x,y,z) = \dfrac{2x-y}{x^2+y^2}\,\hat{\imath} + \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}\,\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$.

   a) Para la trayectoria $C_1 : x^2+z^2 = 1 \wedge y = 1$, aplicando el Teorema de Stokes determinar el trabajo $\displaystyle\oint_{C_1} F \cdot dr$.

   b) Para la trayectoria $C_2 : x^2+y^2 = 1 \wedge z = 0$, calcular el trabajo $\displaystyle\oint_{C_2} F \cdot dr$.

   c) Siendo C_3 una curva suave, simple y cerrada, contenida en el plano $z = 3$ y que da una vuelta alrededor del eje z; utilizar el teorema de Stokes para relacionar las integrales

$$\oint_{C_2} F \cdot dr \text{ y } \oint_{C_3} F \cdot dr.$$

39. Sean $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donde f es de clase C^1 y g de clase C^2.

   a) Mostrar que $\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f\nabla \times F$ y que $\nabla \times \nabla g = 0$.

   b) De la parte anterior y del Teorema de Stokes, mostrar que

$$\oint_{\partial S} f\nabla g \cdot dr = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n}\, dA,$$

   donde S es una superficie seccionalmente suave con borde ∂S.

40. Sea $F(x,y,z) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath} + z\hat{k}$, calcular $\displaystyle\oint_C F \cdot dr$, donde

$$C(t) = 2\cos(t)\hat{\imath} + \sin(t)\hat{\jmath} + (\sin(t)+3)\hat{k},$$

para $t \in [0, 2\pi]$.

28 de Diciembre de 2018
EGG/egg