Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Listado 2
Cálculo III (2025)
PLEV 2018

1. Calcular $\iint_R f(x,y)\,d(x,y)$, donde $f(x,y) = x^2y + xy^3$ y $R = [-1,2]\times[1,5]$. Realizar el cálculo considerando los dos posibles órdenes de integración.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = g(x)h(y)$, donde g y h son funciones reales de variable real continuas. Si $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, probar que
$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b g(t)\,dt \int_c^d h(t)\,dt$$
y luego calcular $\displaystyle\int_1^4 \int_0^2 e^{x^2} \sin[(y-1)^3]\,dy\,dx$.

3. Sean $D = [0,1]\times[-1,1]$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f(1,1) = 6$, $f(1,-1) = 3$, $f(0,1) = 1$ y $f(0,-1) = 2$. Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,d(x,y)$.

4. Si A es la región acotada por las rectas definidas por $y = -x+1$, $y = x+1$ e $y = 3$, hallar $\displaystyle\iint_A (2x - y^2)\,d(x,y)$.

5. Evaluar las integrales dobles:
   a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\,dx$,
   b) $\displaystyle\iint_D 4xe^{(y-1)^2} d(x,y)$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x^2+1 \leq y \leq 5\}$.

6. Sea R la región del plano acotada por $y = x^2$ e $y^2 = x$, probar que
$$0 \leq \iint_R e^{-x^2-y^2} d(x,y) \leq \frac{1}{3}.$$

7. Al calcular el volumen V situado bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre un cierta región R del plano xy, se ha llegado a la siguiente suma de integrales
$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$
Dibujar la región R y expresar el volumen V mediante una integral iterada en la que el orden de integración esté invertido para luego calcularlo.

8. Utilizar integrales dobles para calcular el volumen de la región del espacio que se encuentra acotada por las superficies $z = 0$, $x + z = 1$ y $x = y^2$.

9. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 x e^{xy} \, dx \, dy$.

10. Utilizando el resultado $\displaystyle\int_1^7 x^y \, dy = \frac{x^7 - x}{\ln x}$ y sabiendo que la integral

$$\int_0^1 \frac{x^7 - x}{\ln x} \, dx$$

converge, calcular su valor transformándola antes en una integral doble.

11. Para una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, bajo ciertas condiciones, el área de la superficie $z = f(x, y)$ está dada por la integral doble

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} \, d(x, y).$$

Utilizar esta fórmula para calcular el área de la porción del cilindro parabólico $z = y^2$ cuya proyección sobre el plano xy es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(8, 1)$.

12. Evaluar $\displaystyle\iiint_K \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} \, dV$, para

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}.$$

13. Sea R la región del primer octante acotado por el cilindro $x = 9 - y^2$ y los planos definidos por $x = 0$, $z = 0$ y $z = y$. Utilizar integrales triples para calcular el volumen de R considerando los órdenes $dz\, dy\, dx$ y $dz\, dx\, dy$.

14. Calcular el volumen de la región sólida que se encuentra en el primer octante acotada superiormente por $z = 1 - y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$.

15. Sea R la región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $x + y = 4$ y el cilindro elíptico $y^2 + 4z^2 = 16$. Escribir las integrales que calculan el volumen de R en los órdenes de integración $dz\, dy\, dx$ y $dy\, dx\, dz$.

16. Determinar el volumen de la región que se encuentra sobre en plano xy limitada por los cilindros de ecuaciones $x^2 + z^2 = 4$ e $y^2 + z^2 = 4$.

17. Evaluar la integral doble $\displaystyle\iint_A x^2 y^2 \, d(x, y)$, donde A es la región del primer cuadrante que se encuentra acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

18. Calcular el volumen acotado por los cilindros hiperbólicos de ecuaciones $xy = 1$, $xy = 9$, $xz = 4$, $xz = 36$, $yz = 25$ e $yz = 49$.

19. Calcular la integral $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} d(x,y)$, donde

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 2 \leq x+y \leq 4\right\}.$$

20. Calcular $\displaystyle\iint_D y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2} d(x,y)$, donde D es la región del plano interior al paralelógramo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,2)$ y $(1,2)$.

21. Evaluar la integral doble

$$\iint_R e^{4x^2+9y^2-36y+36}\, d(x,y),$$

donde R es la región encerrada por la elipse $4x^2+9y^2=36y$.

22. Calcular el volumen de la región del primer octante tal que $x+y^{1/2}+z^{1/3} \leq 1$.

23. Utilizar coordenadas polares para calcular el volumen de la región *exterior* al cilindro de ecuación $x^2+y^2=4$ que se encuentra acotada superiormente por el cono de ecuación $z=16-\sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente por el plano xy.

24. Calcular el volumen acotado por las superficies $x^2+y^2=2$ y $z^2=x^2+y^2-1$.

25. Calcular el volumen de la región limitada por las superficies de ecuaciones dadas por $y^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $x(y^2+z^2)=1$ y $x=0$, donde $0<a<b$.

26. Utilizar un cambio de variables lineal y las coordenadas cilíndricas para calcular el volumen acotado por el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

27. Dos esferas de radio 4 se intersectan de modo que cada una contiene al centro de la otra. Calcular el volumen de la región acotada por ambas esferas.

28. Calcular, usando coordenadas cilíndricas, el volumen limitado inferiormente por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y superiormente por el plano $z=4y$.

29. Utilizar un cambio de variables lineal y las coordenadas esféricas para calcular el volumen acotado por el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

30. Hallar el volumen de la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ y sobre la hoja superior del cono $z^2\sin^2\alpha=(x^2+y^2)\cos^2\alpha$, donde $0\leq\alpha\leq\pi/2$.

31. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente por la hoja superior del cono $3z^2=x^2+y^2$.

32. Calcular el volumen del sólido S acotado superiormente por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ e inferiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$. Utilizar coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas.

33. Determinar el valor de la integral $\iiint_A z \, d(x, y, z)$, si A es el sólido limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$ e inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

34. Si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, b > a > 0\}$, calcular

$$\iiint_S \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, d(x, y, z).$$

35. Calcular el volumen de la región del primer octante limitada por las superficies $x = \sqrt{3}y$, $x = y$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

36. Un plano corta un casquete de altura H en una esfera de radio R, con $0 < H < R$. Utilizando coordenadas esféricas, calcular el volumen del casquete.

37. Utilizar el Teorema del cambio de variables para calcular la integral doble

$$\iint_A \left(\frac{y^2}{x^2} + 2 \right)^2 \cos \left(\frac{2y}{x} + \frac{y^3}{3x^3} \right) \, d(x, y),$$

donde A es la región del primer cuadrante que se encuentra acotada por las curvas $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 1$, $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 2$, $y = 3x$ e $y = 6x$.

38. Sea Ω el sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 0$. Determinar el volumen de Ω.

39. Sea R la región del espacio acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ y por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$. Escribir la integral triple que permite calcular el volumen de R utilizando coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas para luego determinar el valor de dicho volumen.

40. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = xyz$ y el conjunto

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \, x \geq 0, y \geq 0, \, z \geq 0 \right\}.$$

Calcular la integral triple $\iiint_D f(x, y, z) \, d(x, y, z)$, mediante los cambios de variables:

a) $x = a\rho \sin\phi \cos\theta$, $x = b\rho \sin\phi \sin\theta$, $z = c\rho \cos\phi$;

b) $x = a\sqrt{u}$, $y = b\sqrt{v}$, $z = c\sqrt{w}$.

28 de Diciembre de 2018
EGG/egg