Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

# Listado 1
# Cálculo III (2025)
# PLEV 2018

1. Hallar adherencia, interior, conjunto de puntos de acumulación y frontera para:

   *a)* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-2)^2 + y^2 < 1\} \cup \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,

   *b)* $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 3\} \cup \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z \leq 1\} \cup \{(0,0,2)\}$ ,

   *c)* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y \leq |x|\}$,

   *d)* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 4\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 4\}$.

2. Encontrar la adherencia, el interior, el conjunto de los puntos de acumulación y la frontera para $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}, 1 \leq z < 4\right\}$. Además, indicar si $A$ es cerrado, abierto, acotado o compacto.

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera. ¿Es cierto que $int\,(Fr(A)) = \phi$?

4. Verificar que para $(x,y) \neq (0,0)$, se tienen las siguientes desigualdades:

   *a)* $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq |y| \leq \|(x,y)\|$,

   *b)* $\left|\dfrac{y^3 \sin(x^3)}{x^4+y^4}\right| \leq \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|^2$,

   *c)* $\left|\dfrac{\sin\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2+|x|^{1/2}}\right| \leq |y|^{1/2}$,

   *d)* $\left|\dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2+|x|)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq |y|$.

   En cada caso, ¿qué conclusión se obtiene en relación al concepto $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

5. Calcular, si es posible, los siguientes límites:

   *a)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^3 \sin\frac{y}{x} - y^3 \sin\frac{x}{y}\right)$

   *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x-y}$

   *c)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$

   *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(y^4)}{x^6+y^4}$

   *e)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

   *f)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$

*g*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+|x|+y}$

*h*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$

*i*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x+y}$

*j*) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^4+y^4+z^4}\sin\left(\sqrt{x^4+y^4+z^4}\right)$

6. Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{y-|x|} & ,y\neq|x| \\ 0 & ,y=|x|\end{cases} \quad y \quad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-4)^2y}{(x-4)^2+y^2} & ,(x,y)\neq(4,0) \\ 0 & ,(x,y)=(4,0)\end{cases}$$

   *a*) ¿Es $f$ continua en el origen?

   *b*) Estudiar la continuidad de $g$ en todo $\mathbb{R}^2$.

7. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

   *a*) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+|y|}} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

   *b*) $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^6+|y|+z^2}+x+y+z+1 & ,(x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & ,(x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$

   *c*) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$

   Indicación: Para calcular el límite en el origen, considerar $t=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

8. Sean $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y^3}{x^2+y^2}+3x-2y & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \text{y} \quad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   *a*) Hallar, si existe, el límite de $f$ en $(0,0)$.

   *b*) Hallar, si existe, el límite de $g$ en $(0,0)$.

   *c*) Hallar, si existen, la derivadas parciales de $f$ en el origen.

   *d*) Hallar, si existen, la derivadas parciales de $g$ en el origen.

   *e*) Decidir si $f$ es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.

   *f*) Decidir si $g$ es de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$.

   *g*) Analizar la diferenciabilidad de $f$ en el origen.

   *h*) Analizar la diferenciabilidad de $g$ en el origen.

9. Mostrar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es de clase $C^1$ en todo $\mathbb{R}^2$.

10. Para $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^4y+2y^3}{x^4+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$. Determinar:

   *a*) Si $f$ es diferenciable en $(0,0)$.
   *b*) La ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,5/2)$.
   *c*) La derivada direccional de $f$ en $(0,0)$ en la dirección del vector $\vec{v} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$.

11. Indicar justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   *a*) Toda función continua es diferenciable.
   *b*) La función $f$ del problema anterior es diferenciable para todo $(x,y) \neq (0,0)$.
   *c*) Si una función no es diferenciable en un cierto punto, ella no tiene derivadas direccionales en ese punto.

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, hallar la buena aproximación para $f$ en una vecindad del punto $(3,4)$ y luego determinar un valor aproximado para $\sqrt{(2.9)^2+(4.1)^2}$.

13. Para $f(x,y) = \begin{cases} 2x+y & ,y \neq x \\ 6 & ,y = x \end{cases}$, determinar la ecuación del plano tangente (cuando corresponda) al gráfico de $f$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ si:

   *a*) $(x_0,y_0) = (0,0)$,
   *b*) $(x_0,y_0) = (2,2)$,
   *c*) $(x_0,y_0) = (0,2)$.

14. Una partícula se lanza desde el hiperboloide de ecuación $x^2+y^2-z^2+1=0$ en el punto $(1,1,\sqrt{3})$ en una dirección normal hacia el plano $xy$ en el tiempo $t=0$ con una rapidez inicial de 10 unidades de longitud por segundo. Despreciando los efectos de gravedad, ¿cuándo y dónde cruza la partícula el plano $xy$?

15. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+|y|^5} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$

   *a*) Decidir si $f$ es continua en $(0,0)$.

*b*) Analizar la diferenciabilidad de $f$ en el origen.

*c*) ¿Es $f$ de clase $C^1$ en una vecindad del origen?

*d*) Calcular la derivada direccional de $f$ en $(0,0)$ en la dirección de $\vec{v} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

*e*) Mostrar que $f$ es de clase $C^1$ cerca del punto $(2,-1)$.

*f*) Indicar, utilizando el item anterior, por qué $f$ es diferenciable en el punto $(2,-1)$; luego, determinar la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en el punto $(2,-1,-4/5)$.

*g*) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional de $f$ en el punto $(2,-1)$? ¿Cuál es ese valor máximo?

16. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^4-y^6)}{x^4+y^6} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$, utilizar el Teorema de Schwarz para mostrar que $f$ no es de clase $C^2$ en una vecindad abierta del origen.

17. Sea $F(x,y) = \left(\dfrac{2x^3-5y^5}{x^2+y^4}, 2x+5y+7\right)$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $F(0,0) = (0,7)$. Determinar:

    *a*) Si $F$ es continua en $(0,0)$.

    *b*) Si $F$ es diferenciable en $(0,0)$.

    *c*) Si $F$ es de clase $C^1$ en algún abierto de $\mathbb{R}^2$.

    *d*) La matriz jacobiana de $F$ evaluada en el punto $(1,-1)$.

    *e*) La aproximación afín para $F$ en vecindades de $(1,-1)$.

18. Decidir si la función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $u(x,y) = f(xy) + xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$ donde $f$ y $g$ son funciones reales derivables, es una solución de la ecuación en derivadas parciales

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$$

19. Mostrar que que $z(x,y) = x^n f\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$, con $x \neq 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, satisface

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

20. El cambio de varaiables $x = e^s$ e $y = e^t$ transforma a $f(x,y)$ en $g(s,t)$ siendo $g(s,t) = f(e^s, e^t)$. Sabiendo que $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, demostrar que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0.$$

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ y sea $w(x, y, z) = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Demostrar que

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 3w.$$

22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2$ tal que $(r, \theta) \mapsto g(r, \theta) = f(x, y)$. Si $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, probar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}.$$

23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ una función diferenciable, al introducir las coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z)$ definidas por $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y $z = z$ se obtiene $g(r, \theta, z) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$. Hallar una expresión en coordenadas cartesianas (en términos de los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$) para

$$\frac{\partial g}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k},$$

donde $\hat{u}_r = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath}$ y $\hat{u}_\theta = -\sin(\theta)\hat{\imath} + \cos(\theta)\hat{\jmath}$.

24. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ tal que para $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f(tx, ty) = t^5 f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Considerar el cambio de variables $u = tx$ y $v = ty$ para:

*a*) Mostrar que $f$ satisface la relación $5f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot (x, y)$.

*b*) Decidir si es válida la igualdad

$$20t^3 f(x, y) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v).$$

25. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (u, v)$ siendo $u = -3x + y^3$ y $v = -3y + x^2$.

*a*) Mostrar que $F$ admite una inversa local, $G : V \to U$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ de clase $C^1$, donde $U$ y $V$ son vecindades de $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y $(u_0, v_0) = (-3, 1) = F(1, 0)$.

*b*) Si $G = (g_1, g_2)$, encontrar la aproximación afín de la primera componente $g_1$ en el punto $(-3, 1)$.

26. Suponer que las variables $x$, $y$, $u$ y $v$ están relacionadas por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ux^3 + v^2y^3 = 1 \\ 2uv^3 + xy^2 = 0 \end{cases}$$

y considerar el punto $P_0 = (0, 1, 0, 1)$.

*a*) Probar que este sistema define a $u$ y $v$ como funciones implícitas diferenciables de $x$ e $y$ en una vecidad de $P_0$. Además, calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial v}{\partial x}(0, 1)$.

*b*) Sea $G(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Verificar que $G$ admite inversa en una vecindad de $(0,1)$ y calcular la matriz jacobiana de $G^{-1}$ en $(0,1)$.

27. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$.

    *a*) Probar que todo punto $(x_0, y_0)$ posee una vecindad $U_0$ tal que $F : U_0 \to F(U_0)$ admite una inversa $G$ de clase $C^1$ sobre $F(U_0)$.

    *b*) Mostrar que $F$ no es inyectiva.

    *c*) Para cada $(u,v) \in F(U_0)$ determinar la matriz jacobiana de $[DG(u,v)]$.

28. Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xz^3 + yu + \lambda x = 1 \\ 2xy^3 + u^3 z + \lambda(y-1) = 0 \end{cases}$$

y el punto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0,1,0,1)$.

    *a*) En una vecindad de $(x_0, y_0, z_0, u_0)$, determinar qué valor(es) de $\lambda \in \mathbb{R}$ son tales que el sistema define a $(x,y) = (g(z,u), h(z,u))$.

    *b*) Si $w(x,y) = xy + 1$ y $\lambda = 0$, calcular la derivada parcial $\dfrac{\partial w}{\partial z}(0,1)$.

29. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $z = z(x,y)$ la función definida implícitamente por la relación $F\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right) = 0$. Probar que $z$ satiface la ecuación en derivadas parciales

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

30. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $F(x,y) = \left(x^2 + 2y^2, \dfrac{x^2}{y^2}\right)$, $y \neq 0$.

    *a*) Probar que $F$ admite una única inversa local en una vecindad $U_0$ de $(2,1)$.

    *b*) Sea $F^{-1} : V_0 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donde $(x,y) = (g(u,v), h(u,v))$ son las componentes de la inversa local de $F$, calcular la razón de cambio de $h$ en $(6,4)$ en la dirección del vector $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\imath}$.

31. Considerar la ecuación $F(x,y,z) = 0$, con $F$ de clase $C^1$.

    *a*) Indicar qué condición(es) asegura(n) que en vecindades de $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, donde $F(P_0) = 0$, la ecuación define implícitamente las funciones $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ y $x = h(y,z)$.

    *b*) En relación a la parte *a*) deducir la fórmula $\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$.

32. Hallar todos los puntos críticos para $f(x,y,z) = 4x^2 e^y - 2x^4 - e^{4y} - z^2$ e identificarlos según su naturaleza utilizando el criterio de la matriz hessiana. ¿Posee $f$ posee mínimo absoluto? Justificar la respuesta de dos maneras diferentes.

33. Determinar los puntos críticos para cada una de las siguientes funciones y clasificarlos como máximos relativos, mínimos relativos o puntos de silla según corresponda:

   *a*) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$
   *b*) $f(x, y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^2$
   *c*) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$
   *d*) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
   *e*) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 - xy + z^2 - 2z$
   *f*) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2$.

   Además, mostrar que la función de la parte *b*) no posee mínimo absoluto.

34. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un función de clase $C^2$ y $A$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Se dice que $f$ es armónica en $A$ si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in A$. Demostrar que si $f$ es armónica y tiene un máximo o un mínimo local en un punto $(x_0, y_0)$ de $A$ entonces todas la derivadas parciales de segundo orden de $f$ en $(x_0, y_0)$ son nulas.

35. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una lata cilíndrica con volumen $V$ fijo de modo que su área sea mínima?

36. Hallar los puntos más alejados y los puntos más cercanos al origen que se encuentran sobre la elipse de ecuación $3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140$.

37. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, hallar los valores extremos de $f$ sobre el conjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\right\}.$$

38. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 20x + 20y$. Justificar por qué $f$ posee extremos absolutos sobre el compacto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy \leq 12\}$$

   y hallar dichos valores.

39. La temperatura $T$ sobre cada punto de la región

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 64\}$$

   está dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 4z$. Determinar los valores mínimo y máximo para $T$ sobre $K$.

40. Maximizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, bajo las restricciones $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{5} + \dfrac{z^2}{25} = 1$ y $x + y - z = 0$ e interpretar geométricamente este resultado.

**26 de Diciembre de 2018**
**EGG/egg**