UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Evaluación de Recuperación
527148

1. Decida, usando uno de los criterios de convergencia visto en clase, la convergencia de la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$. Si esta integral converge, calcule su valor de convergencia.

   (a) Ind. $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$

   Respuesta:

   Se tiene que $\pi/4 \leq \arctan x \leq \pi/2$ cuando $1 \leq x < \infty$, así

$$0 \leq \frac{\arctan x}{x^2} \leq \frac{\pi/2}{x^2}, \quad 1 \leq x < \infty$$

   Como $\int_1^{\infty} \frac{\pi/2}{x^2} dx$ es convergente, entonces por comparación simple la integral $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ también es convergente.

   (08 ptos)

   Evaluando,

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

   Ahora,

$$\begin{aligned}
\int_1^b \frac{\arctan x}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^b + \int_1^b \left(\frac{1}{x\,(x^2+1)} \right) dx \\
&= \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{b} \arctan b + \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\
&= \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{b} \arctan b + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(b^2+1\right) + \ln b \\
&= \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{b} \arctan b + \ln \frac{b}{\sqrt{(b^2+1)}}
\end{aligned}$$

   (06 ptos)

   Luego,

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \ln 2 + \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{b} \arctan b + \ln \frac{b}{\sqrt{(b^2+1)}} \right)$$

   y como

$$\begin{aligned}
\lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{b} \arctan b \right) &= 0 \\
\lim_{b \to \infty} \left(\ln \frac{b}{\sqrt{(b^2+1)}} \right) &= 0
\end{aligned}$$

   entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} \ln 2 \qquad \text{(06 ptos)}$$

2. Sea R la región del **plano** limitada superiormente por la recta $y = 1$ e inferiormente por la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ entre $x = 1$ y $x = 3$

   (a) Calcule el área A_R de la región R.

   (b) Calcule el volumen $V\,(S)$ del sólido de revolución S generado al rotar R en torno a la recta $x = 0$.

   (c) Escriba las fórmulas integrales para el volumen $V\,(S)$ del sólido de revolución S generado al rotar R en torno a:

      1. La recta $x = 0$.
      2. La recta $y = 1$.

   Respuestas.

   (a) $A_R = \displaystyle\int_1^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right) dx = \int_1^3 1dx - \int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right) dx$

   Como $\displaystyle\int_1^3 1dx = 2$ y $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right) dx \overset{x=u^2}{=} 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(u^2+1)}\, du = \frac{1}{6}\pi$:

   Entonces,

$$A_R = 2 - \frac{1}{6}\pi \qquad \text{(10 ptos)}$$

   (b)

$$V\,(S) = 2\pi \int_1^3 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right) dx \qquad \text{(05 ptos)}$$

   (c)

$$V\,(S) = \pi \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right)^2 dx \qquad \text{(05 ptos)}$$

3. .

(a) Indique, con fundamentos, si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2^{2n+1}}$ es convergente o divergente. En caso afirmativo, encuentre el valor de convergencia.

Respuesta

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$ es serie geometrica con $r = -\frac{3}{4}$.

Luego la serie es convergente y se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\frac{-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = -\frac{3}{14} \qquad \text{(08 ptos)}$$

(b) Fundamentando adecuadamente su respuesta decida la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Respuesta. Es claro que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es de términos positivos.

Como

$$0 \leq \frac{2^n n!}{n^n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{2^n n!}{n^n}$$

entonces, por comparación simple, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ converge

(04 ptos)

Aplicando el criterio de la razón para decidir la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right) \\
&= \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

Como $\frac{2}{e} < 1$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ es convergente, y así la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es convergente.

(08 ptos)