UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

EGG/MMO/JMG/CMJ/GAJ/HPV/hpv.

Evaluación Recuperación
Cálculo I.

1. Encuentre las derivadas de la funciones dadas (no es necesario que simplifique las expresiones obtenidas):

   a) $f(x) = x \cdot \arctan x^2$, b) $g(x) = (x^2+3)^x$

   a) $\frac{d}{dx}\left(x \arctan x^2\right) = \arctan x^2 + x\dfrac{2x}{x^4+1} = \arctan x^2 + \dfrac{2x^2}{x^4+1}$

   (8 puntos)

   b) $(x^2+3)^x = e^{x\ln\left(x^2+3\right)}$. Así,

   $\frac{d}{dx}e^{x\ln\left(x^2+3\right)} = e^{x\ln\left(x^2+3\right)}\left[\ln(x^2+3) + \dfrac{2x^2}{x^2+3}\right]$

   y $g'(x) = (x^2+3)^x\left[\ln(x^2+3) + \dfrac{2x^2}{x^2+3}\right]$

   (7 puntos)

2. Un granjero desea cercar un terreno rectangular con un área de $A = 1800\ m^2$. Desea además, construir dos cercas que dividan el interior de dicho terreno, ambas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es la longitud mínima total de la cerca que requiere este proyecto? Justifique adecuadamente su respuesta.

   Solución.- Si el terreno tienen dimensiones x e y se debe tener

$$xy = 1800 \tag{1}$$

   Además, si las dos cercas son paralelas al lado que mide y, la longitud total está dada por

$$l = 2x + 4y \tag{2}$$

   De (1): $y = \frac{1800}{x}$ y reemplazando en (2)

$$l(x) = 2x + \frac{7200}{x}$$

   donde debemos considerar $x > 0$.

   Por tanto, se debe encontrar el mínimo absoluto de la función l en el intervalo$]0, +\infty[$.

   (5 puntos)

   Puntos críticos: $l'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 3600$

   y $x = 60$ es el único punto crítico.

   (4 puntos)

   Naturaleza del punto crítico: Como $l''(x) = \frac{14400}{x^3} > 0,\ \forall x > 0$

   se concluye que el punto crítico es un mínimo absoluto.

   Respuesta.- Por lo tanto, $x = 60,\ y = 30$ son las dimensiones del terreno y el largo (mínimo) de la cerca es $l(60) = 240m$.

   (6 puntos)

3. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x \arctan x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Solución.-

a) Con $u = \arctan x$, $dv = x$ se tiene $du = \frac{1}{x^2+1}dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$ y

$$\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx \qquad \text{(4 puntos)}$$

Además, $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$$\begin{aligned} &= \int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= x - \arctan x + C \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int x \arctan x dx = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \arctan x + C$$

(4 puntos)

b) Con $u = \sqrt[4]{x}$ o bien $x = u^4, dx = 4u^3du$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} &= \int \frac{4u^3}{u^2+u}du && \text{(3 puntos)} \\ &= \int \left(4u - 4 + \frac{4}{u+1}\right) du \\ &= 2u^2 - 4u + 4\ln|u+1| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C && \text{(4 puntos)} \end{aligned}$$

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta

   a) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ es derivable en $x_0 = -1$ con $f'(-1) = -4$

   Solución.- Falsa, porque f no es continua en $x_0 = -1$, ya que los límites laterales en este punto son distintos. En consecuencia, f no tiene derivada en x_0.

   (5 puntos)

   b) La gráfica de la función $g(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 8x^3 + 24x^2)$ tiene un punto de inflexión en $(2, 4)$.

   Solución.- Falsa, ya que
   $\forall x : g'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ y

$$g''(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

   es mayor o igual a 0 en toda la recta real.

   (5 puntos)

   c) La curva de ecuación $y^3 - xy^2 - 6\cos(xy) = 2$ corta al eje y y la recta tangente a ella en este punto tiene pendiente $m = \frac{1}{3}$.

   Solución.- Verdadera.
   La curva corta el eje y con $x = 0$ e $y = 2$
   Derivado implícitamente con respecto a x

$$3y^2\frac{dy}{dx} - y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 6\sin(xy)\left[y + x\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

   y reemplazando en el punto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$$

   (5 puntos)

Tiempo: 100 minutos.
09/10/2018.