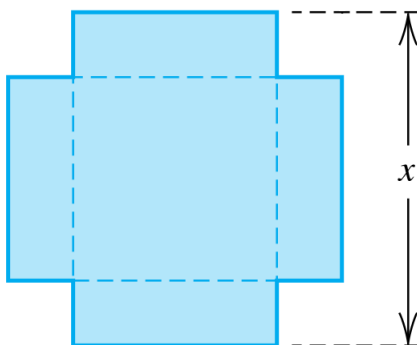


Pauta Evaluación de Recuperación  
Matemática II (527114/527118)

1. Una caja con base cuadrada y sin tapa ha de construirse a partir de una pieza cuadrada de hojalata al cortar un cuadrado de 3 centímetros de lado en cada esquina y doblar los lados hacia arriba.



Si el volumen de la caja debe ser igual a 432 centímetros cúbicos, ¿de qué tamaño debe ser la pieza de hojalata que debe utilizarse?

**Solución:** Sea  $x$  la longitud del lado de la pieza cuadrada de hojalata. Como el área de la base de la caja es igual a  $A = (x - 6)^2$  y la altura de ella es igual a  $h = 3$ , entonces la condición para el valor del volumen se escribe como

$$A \cdot h = V \Leftrightarrow (x - 6)^2 \cdot 3 = 432. \text{ (8 puntos)}$$

Como  $(x-6)^2 = 144 \Rightarrow (x-6)^2 - 12^2 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-18) = 0 \Rightarrow (x = -6 \vee x = 18)$  y  $x$  no puede ser negativo, pues se trata de una longitud, entonces el lado de la pieza cuadrada de hojalata debe ser longitud  $x = 18$  centímetros. (7 puntos)

2. Determinar el conjunto solución de la ecuación

$$2x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 39x - 9 = 0,$$

sabiendo que  $2 - \sqrt{3}$  es una solución de ella.

**Solución:** Como  $p(x) := 2x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 39x - 9$  tiene coeficientes en  $\mathbb{Q}$  y  $x_1 = 2 - \sqrt{3}$  es una raíz de  $p$ , entonces  $x_2 = 2 + \sqrt{3}$  también es una raíz de  $p$  y por lo tanto,  $p(x)$  es divisible por

$$(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}) = x^2 - 4x + 1. \text{ (5 puntos)}$$

De lo anterior, dado que

$$(2x^4 - 5x^3 - 19x^2 + 39x - 9) : (x^2 - 4x + 1) = 2x^2 + 3x - 9 = (x+3)(2x-3), \text{ (5 puntos)}$$

es claro que

$$p(x) = (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})(x + 3)(2x - 3)$$

y el conjunto solución es  $S = \left\{ -3, 2 - \sqrt{3}, \frac{3}{2}, 2 + \sqrt{3} \right\}$ . (5 puntos)

3. Resolver, para  $x \in [0, 2\pi]$ , la ecuación

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

**Indicación:** Pueden considerarse las identidades

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 \quad \text{y} \quad \cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

para factorizar la expresión del lado izquierdo.

**Solución:** Dado que  $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$  y que  $\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$ , la ecuación puede reescribirse como

$$2 \cos^3(x) + \cos^2(x) - \cos(x) = 0, \quad \text{(3 puntos)}$$

de donde,

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^3(x) + \cos^2(x) - \cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) (2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) (2 \cos(x) - 1) (\cos(x) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \vee \cos(x) = \frac{1}{2} \vee \cos(x) = -1$$

y por lo tanto, el conjunto solución es  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ . (12 puntos)

4. Determinar, si es posible, los valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  de modo que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z & = & \lambda \\ x + (\lambda + 1)y + z & = & 2\lambda \\ x + y + (\lambda + 2)z & = & -1 \end{cases}$$

tenga:

- a) solución única.
- b) infinitas soluciones.
- c) ninguna solución.

**Solución:** La matriz ampliada asociada al sistema es

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda + 1 & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & \lambda + 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como  $|A| = \lambda(\lambda + 1)$ , se tiene que

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq -1 \wedge \lambda \neq 0).$$

Si  $\lambda = -1$ , se tiene que  $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y entonces  $r(A) = 2 = r(A, B)$ .

Si  $\lambda = 0$ , se tiene que  $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y entonces  $r(A) = 2 = r(A, B)$ .

De lo anterior, se obtiene:

- a) El sistema tiene solución única cuando  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ . **(5 puntos)**
- b) El sistema tiene infinitas soluciones si  $\lambda = -1$  o  $\lambda = 0$ . **(5 puntos)**
- c) No existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  de modo que el sistema no tenga solución. **(5 puntos)**

19 de julio de 2019  
EGG/egg