Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación de Recuperación
Cálculo Diferencial e Integral (527104)

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\, dt & , \quad x \neq 0 \\ f(0) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de F en $x_0 = 0$.

Solución: Al tomar límite a F cuando x se acerca a 0, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} F(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt}{2x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(-x) \cdot -1}{2} \\ &= f(0), \ \textbf{(8 puntos)} \end{aligned}$$

de donde $\lim_{x \to 0} F(x) = F(0)$ y por lo tanto F es continua en $x_0 = 0$. **(2 puntos)**

2. Sean x, y y z funciones derivables en la variable t tales que para todo t

$$x^3 - 2xy + y^2 + 2xz - 2xz^2 + 3 = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 3 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 4.$$

Hallar los dos valores de $\dfrac{dz}{dt}$ cuando $x = 1$ e $y = 2$.

Solución: De la relación entre x, y y z se tiene que

$$x^3 - 2x(y - z + z^2) + y^2 + 3 = 0,$$

y si $x = 1$ e $y = 2$ se obtiene $z^2 - z - 2 = 0$, es decir, $z = -1$ y $z = 2$. **(4 puntos)**

Por otra parte, de la relación de antes, al derivar implícitamente con respecto a t

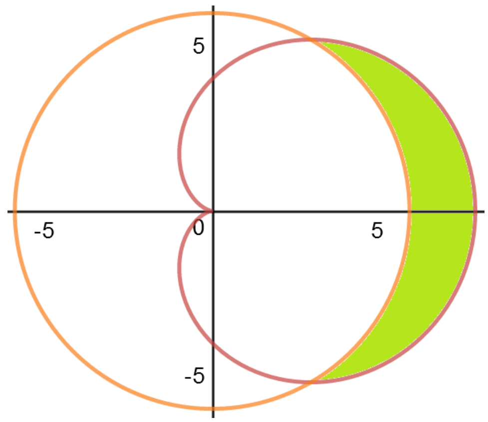
$$3x^2\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\left(y - z + z^2\right) - 2x\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}\right) + 2y\frac{dy}{dt} = 0. \text{ **(4 puntos)**}$$

De la última igualdad, como $\dfrac{dx}{dt} = 3$ y $\dfrac{dy}{dt} = 4$, al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = -1$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{7}{6}$ y al considerar $x = 1$, $y = 2$ y $z = 2$ se tiene que $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{7}{6}$.

De lo anterior, se ha llegado entonces a que $\dfrac{dz}{dt} = \pm\dfrac{7}{6}$. **(4 puntos)**

3. Calcular el área de la región interior a la cardioide $r = 4 + 4\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $r = 6$.

Solución: Como las curvas se intersectan cuando $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ y dada la simetría de los gráficos, el área de la región



está dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\pi/3} \left[(4+4\cos\theta)^2 - 6^2\right] d\theta \ \textbf{(6 puntos)}\\
&= \int_0^{\pi/3} [8\cos(2\theta) + 32\cos\theta - 12]\, d\theta\\
&= 18\sqrt{3} - 4\pi. \ \textbf{(6 puntos)}
\end{aligned}
$$

4. Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-6)^n}{n^3+n}$.

Solución: Para $x = 6$, la serie converge a cero.

Para $x \neq 6$, definiendo

$$L := \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(x-6)^{n+1}}{(n+1)^3+n+1} \frac{n^3+n}{(x-6)^n} \right| = |x-6| \;\textbf{(4 puntos)}$$

por el criterio del cuociente se tiene que la serie converge si

$$L < 1 \Leftrightarrow |x-6| < 1 \Leftrightarrow 5 < x < 7$$

y se tiene que la serie diverge si $L > 1 \Leftrightarrow |x-6| > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 5[\cup]7, +\infty[$, de donde, el radio de convergencia es $R = 1$. **(2 puntos)**

Si $x = 5$, se tiene la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+n}$, la cual por el criterio de Leibniz converge, pues la sucesión $\dfrac{1}{n^3+n}$ es positiva, decreciente y converge a cero. **(4 puntos)**

Si $x = 7$, se tiene la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n}$. Como $0 \leq \dfrac{1}{n^3+n} \leq \dfrac{1}{n^3}$ $\forall n$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge (serie p con $p = 3 > 1$), por criterio de comparación directa, se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n}$ converge. **(4 puntos)**

De lo anterior, el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $I = [5, 7]$. **(2 puntos)**

5. Sabiendo que, para $x \in \,]-1, 1[$, se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$.

Solución: Al derivar término a término en la serie geométrica, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1},$$

y por lo tanto, como $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(x-1)^2}$, para $x \in \,]-1, 1[$ es válida la igualdad

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(x-1)^2}.$$ **(5 puntos)**

Al considerar en esta última igualdad el valor $x = \dfrac{1}{3}$, se observa que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{9}{4}.$$ **(5 puntos)**

12 de Diciembre de 2018
EGG/JOF/egg