Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación de Recuperación
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. Sea f la función real definida por

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2(4 - x^2)},$$

definir una restricción h de f que sea biyectiva y definir su inversa.

Solución: La función $h : \left[\sqrt{2}, 2\right[\to \mathbb{R}_0^+$, definida por

$$h(x) = \sqrt{1 - \log_2(4 - x^2)}$$

es inyectiva pues para a y b en el intervalo $\left[\sqrt{2}, 2\right[$, se tiene

$$\begin{aligned} h(a) = h(b) &\Rightarrow \sqrt{1 - \log_2(4 - a^2)} = \sqrt{1 - \log_2(4 - b^2)} \\ &\Rightarrow 1 - \log_2(4 - a^2) = 1 - \log_2(4 - b^2) \\ &\Rightarrow a^2 = b^2 \\ &\Rightarrow |a| = |b| \\ &\Rightarrow a = b. \quad \textbf{(4 puntos)} \end{aligned}$$

De la igualdad $y = \sqrt{1 - \log_2(4 - x^2)}$ se tiene que

$$x = \sqrt{4 - 2^{\,1 - y^2}}$$

y como $\sqrt{2} \leq x < 2$, se obtiene que $R_h = [0, +\infty[$ **(6 puntos)** y por lo tanto h es sobreyectiva.

De lo anterior, como h es biyectiva, ella posee inversa y dicha inversa es

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\to \left[\sqrt{2}, 2\right[\\ x &\mapsto h^{-1}(x) = \sqrt{4 - 2^{\,1 - x^2}} \quad \textbf{(2 puntos)} \end{aligned}$$

2. Determinar la ecuación de una de las circunferencias de radio 10 cuyo centro está sobre la recta $y = 3x$ y es tangente a la recta $x + 3y + 4 = 0$.

   Solución: Dado que la distancia desde el centro $(h, 3h)$ de *la* circunferencia a la recta es igual a 10, se tiene que

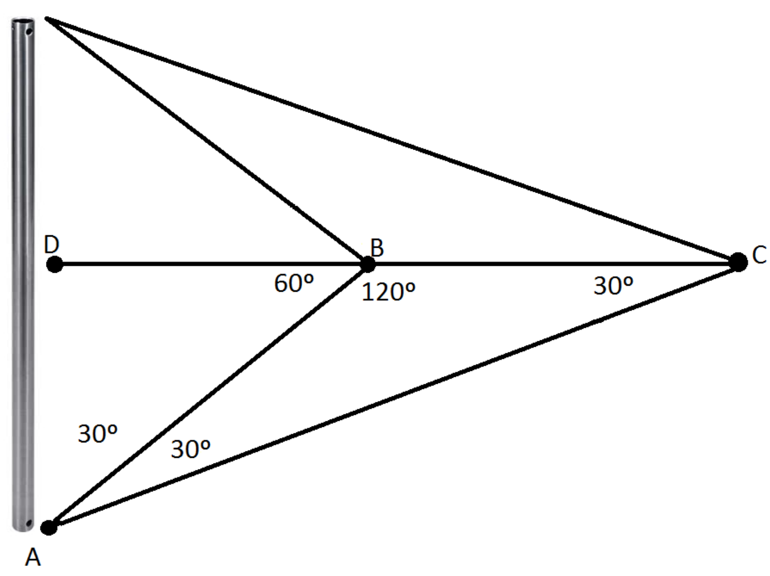
$$\frac{|h + 9h + 4|}{\sqrt{10}} = 10. \textbf{ (6 puntos)}$$

   De la igualdad anterior, una posibilidad es $10h+4 = 10\sqrt{10}$, de donde $h = \sqrt{10} - \frac{2}{5}$ y $k = 3\sqrt{10} - \frac{6}{5}$ son las coordenadas del centro **(3 puntos)** y la ecuación de *la* circunferencia es

$$\left(x - \sqrt{10} + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - 3\sqrt{10} + \frac{6}{5}\right)^2 = 100. \textbf{ (3 puntos)}$$

3. Una vara de metal tiene un elástico amarrado a ambos extremos. Una persona toma el elástico justo por su punto medio y lo estira de forma perpendicular a la vara. En un cierto instante, el elástico forma un ángulo de $120°$ y si la persona lo sigue estirando retrocediendo tres centímetros más el elástico forma un ángulo de $60°$. Determinar la longitud de la vara.

   Solución: De la figura



(5 puntos)

   como $\overline{AB} = \overline{BC} = 3$ centímetros, se tiene que si $l = 2x$ es la longitud de la vara, entonces

$$\sin(60°) = \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \textbf{ (5 puntos)},$$

   de donde se obtiene que $l = 3\sqrt{3}$ centímetros. **(2 puntos)**

4. Determinar el polinomio mónico $p(x)$ (su coeficiente principal es 1) con coeficientes en $\mathbb{Q}$, del menor grado posible, que tiene como raíz doble a $3-2i$ y tal que $p(3)=48$.

   Solución: $3+2i$ es una raíz del polinomio pues $3-2i$ es raíz y los coeficientes están en $\mathbb{Q}$ **(2 puntos)**; como estas dos raíces han de ser dobles entonces la expresión

   $$q(x) = (x-3+2i)^2\,(x-3-2i)^2 = \left(x^2-6x+13\right)^2$$

   debe ser un factor de $p(x)$. **(6 puntos)**

   Por otra parte, como $p(x)$ es mónico y debe ser del menor grado posible, necesariamente él debe ser de la forma $p(x)=q(x)(x-a)$ y dado que $q(3)=16$, entonces

   $$16\cdot(3-a)=48$$

   y por lo tanto $a=0$, de donde se obtiene que $p(x)=x\left(x^2-6x+13\right)^2$ **(4 puntos)**

5. Utilizando matrices, hallar el conjunto solución, para x, y, z y w en $\mathbb{R}$, del sistema

   $$\begin{cases} 2x+4y-2z+4w &= 2\\ 6x+12y-9z+21w &= 0\\ -4x-8y+10z-26w &= 8\end{cases}$$

   Solución: Dado que

   $$(A,B)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 4 & 2\\ 6 & 12 & -9 & 21 & 0\\ -4 & -8 & 10 & -26 & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \textbf{(4 puntos)}$$

   el sistema dado es equivalente al siguiente

   $$\begin{cases} x+2y-z+2w &= 1\\ z-3w &= 2\end{cases}$$

   y como $r(A)=2=r(A,B)$, entonces dos incógnitas pueden expresarse en términos de otras dos. **(4 puntos)** En este caso, al despejar x y z en función de y y w, se tiene que $x=-2y+w+3$ y que $z=3w+2$.

   De lo anterior, el conjunto solución puede describirse como sigue

   $$S=\left\{(-2y+w+3,y,z,3w+2)\in\mathbb{R}^4 : y\in\mathbb{R},\ w\in\mathbb{R}\right\}\ \textbf{(4 puntos)}$$

23 de Julio de 2018
JUA/EGG/MWC/egg