UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Pauta de Evaluación de Recuperación
Introducción a la Matemática Universitaria - 520145

1) **(20 puntos)** Sean
$$f : \mathcal{D}om(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad g :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$$
funciones reales definidas por:
$$f(x) = \ln\left(2 - \sqrt{x-1}\right) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 + 1.$$

1.1) Determine dominio y recorrido de f.

1.2) Defina la función $f \circ g$, si existe.

Solución:

1.1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}om(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} : \ln(2 - \sqrt{x-1}) \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : 2 - \sqrt{x-1} > 0 \wedge x - 1 \geq 0\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x < 5 \wedge x \geq 1\} \\
&= [1,\, 5[\text{..}\textbf{(4 puntos)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}ec(f) &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [1,\, 5[\,,\ y = \ln(2 - \sqrt{x-1})\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [1,\, 5[\,,\ 2 - e^y = \sqrt{x-1}\,,\ \ 2 - e^y \geq 0\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [1,\, 5[\,,\ x = (2 - e^y)^2 + 1\,,\ \ 2 - e^y \geq 0\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : 1 \leq (2 - e^y)^2 + 1 < 5\,,\ \ 2 - e^y \geq 0\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : 0 \leq (2 - e^y)^2 < 4\,,\ \ 2 - e^y \geq 0\right\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq 2 - e^y < 2\ \} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : e^y \leq 2\} \\
&=]-\infty, \ln(2)] \text{....................................}\textbf{(8 puntos)}
\end{aligned}$$

Ya que,

$$\begin{aligned}
0 \leq 2 - e^y < 2 &\Leftrightarrow 0 \leq 2 - e^y \ \wedge\ 2 - e^y < 2 \\
&\Leftrightarrow e^y \leq 2 \ \wedge\ 0 < e^y.
\end{aligned}$$

Donde $0 < e^y$ es siempre verdadero.

1.2)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}om(f\, o\, g) &= \{x \in \mathcal{D}om(g)\ :\ g(x) \in \mathcal{D}om(f)\}\\ &= \left\{x \in]-\infty,\,0]\ :\ x^2+1 \in [1,\,5[\,\right\}\\ &= \left\{x \in]-\infty,\,0] :\ 1 \le x^2+1 < 5\,\right\}\\ &= \left\{x \in]-\infty,\,0] :\ 0 \le x^2 < 4\,\right\}\\ &= \{x \in]-\infty,\,0] :\ -2 < x < 2\,\}\\ &=]-2,0].\end{aligned}$$

....................................(5 puntos)

Luego, la compuesta $f \circ g$ está definida como

$$f \circ g :]-2,0] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$(f \circ g)(x) = \ln(2+x).$$

....(3 puntos)

Ya que $(f \circ g)(x) = \ln(2 - \sqrt{(x^2+1)-1}) = \ln(2-\sqrt{x^2}) = \ln(2+x)$ (pues $x \le 0$).

2) **(15 puntos)** Considere las curvas

$$C_1 : x^2 - y - 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad C_2 : 3x^2 - y^2 + 4y - 7 = 0.$$

2.1) Determine el área del triángulo VF_1F_2, donde V es el vértice de C_1, y F_1 , F_2 son los focos de C_2.

2.2) Grafique la región R definida por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 - y - 1 \le 0\ \wedge\ 3x^2 - y^2 + 4y - 7 \ge 0\}.$$

Solución:

2.1) Determinamos el vértice de C_1. $x^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y + 1$, luego el vértice de la parábola es el punto $V(0,-1)$. ....(1 punto)

Para determinar los focos de C_2

$$\begin{aligned}3x^2 - y^2 + 4y - 7 = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - (y^2 - 4y) = 7\\ &\Leftrightarrow 3x^2 - (y-2)^2 = 3\\ &\Leftrightarrow x^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = 1.\end{aligned}$$

.......................(2 puntos)

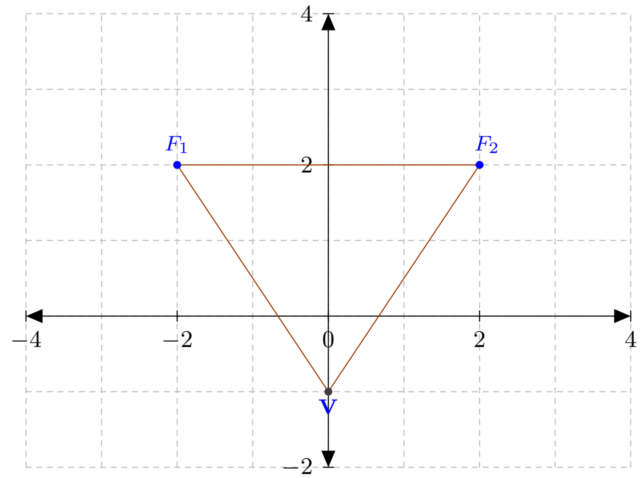
C_2 es una hipérbola con eje real paralelo al eje x y centro en el punto $C(0,2)$. Se tiene que $a^2 = 1$, $b^2 = 3$, entonces $c = 2$. ....(2 puntos)

Por lo tanto, los focos de la hipérbola son los puntos $F_1(-2,2)$ y $F_2(2,2)$. ....(2 puntos)

Finalmente para determinar el área del triángulo VF_1F_2 tenemos que:

$$\begin{aligned}\text{Área } \triangle VF_1F_2 &= \frac{|F_1F_2| \cdot d(V, F_1F_2)}{2}\\ &= \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.\end{aligned}$$

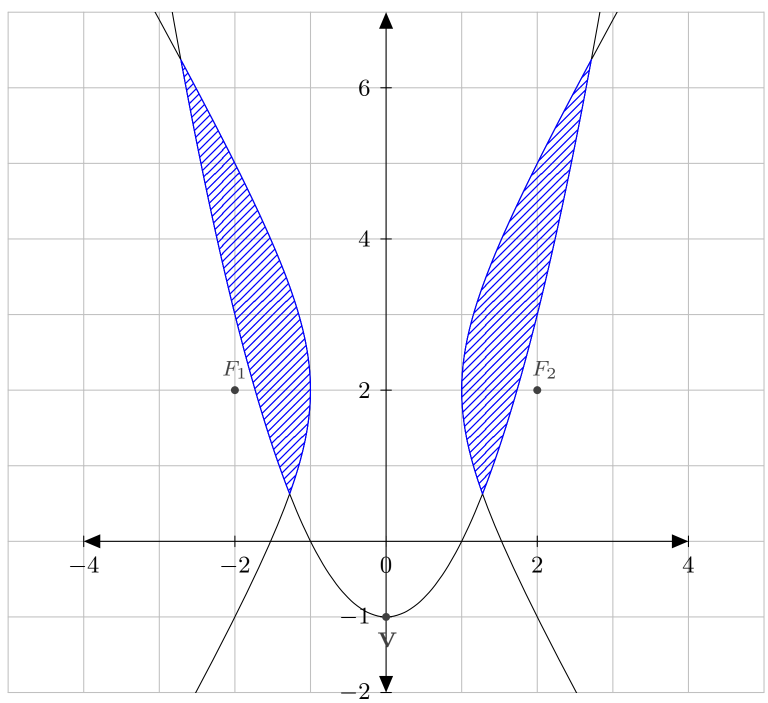
....(3 puntos)



2.2) La gráfica de la región

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 - y - 1 \leq 0 \ \wedge \ 3x^2 - y^2 + 4y - 7 \geq 0\}.$$

(5 puntos)



3) **(15 puntos)** Resuelva para $x \in \mathbb{R}$:

3.1) $\dfrac{e - e^x}{\ln(x) - 2} < 0,$

3.2) $\text{Arccos}(x) - \text{Arcsen}\,(\sqrt{1-x^2}) = \dfrac{\pi}{2}.$

Solución:

3.1) Restricción: $x > 0 \ \wedge x \neq e^2$ ....(2 puntos)

$$\frac{e - e^x}{\ln(x) - 2} < 0 \Leftrightarrow (e - e^x > 0 \ \wedge \ \ln(x) - 2 < 0) \ \vee \ (e - e^x < 0 \ \wedge \ \ln(x) - 2 > 0)$$
$$\Leftrightarrow (e > e^x \ \wedge \ \ln(x) < 2) \ \vee \ (e < e^x \ \wedge \ \ln(x) > 2)$$
$$\Leftrightarrow (x < 1 \ \wedge \ x < e^2) \ \vee \ (x > 1 \ \wedge \ x > e^2)$$
$$\Leftrightarrow x < 1 \ \vee \ x > e^2$$
$$\Leftrightarrow x \in \,]-\infty, 1[\, \cup \,]e^2, +\infty[\text{.......}\textbf{(5 puntos)}$$

y por lo tanto la solución es $S = \,]0,1[\, \cup \ ]e^2, +\infty[.$ .... (1 punto)

3.2) Restricciones: Para que Arccos y Arcsin estén bien definidas debe cumplirse que $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$. Luego $x \in \ [-1, 1]$

$$\text{Arccos}(x) - \text{Arcsen}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsen}\sqrt{1-x^2}$$
$$\Leftrightarrow \cos(\text{Arccos}(x)) = \cos(\frac{\pi}{2} + \text{Arcsen}\sqrt{1-x^2}) \ (\textbf{por la inyectividad de coseno en } [0,\pi])$$
$$\Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\text{Arcsen}\sqrt{1-x^2}) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(\text{Arcsen}\sqrt{1-x^2})$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \cdot \cos(\text{Arcsen}\sqrt{1-x^2}) - 1 \cdot \text{sen}(\text{Arcsen}\sqrt{1-x^2})$$
$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{1-x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \ \wedge \ x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge \ x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

....(6 puntos)

Verificando para $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tenemos que $\text{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \text{Arcsin}\sqrt{1 - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}.$

Luego $S = \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$ ....(1 punto)

4) **(10 puntos)** Un barco navega a una velocidad constante de 40 millas por hora. Parte desde un puerto y se dirige en dirección $N20°E$, después de una hora cambia su rumbo y se dirige en dirección $N65°E$. Media hora después, por problemas del motor, debe volver al puerto. Determine a qué distancia del puerto se encuentra en ese instante.

Solución:
Por el teorema del coseno tenemos que

$x^2 = 1600 + 400 - 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot \cos(135°) = 2000 + 2 \cdot 800 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2000 + 800\sqrt{2}$. ....(4 puntos)

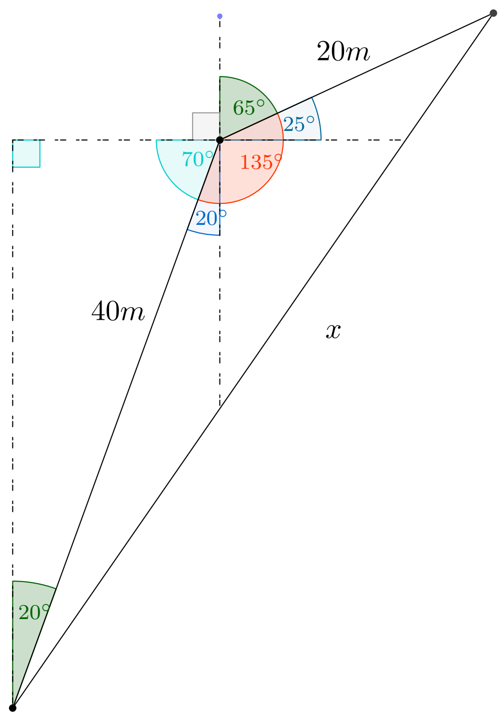


Gráfico con los ángulos ....(5 puntos)

Luego, la distancia a la que se encuentra en el instante que debe volver al puerto es de $\sqrt{2000 + 800\sqrt{2}}$ millas. ....(1 punto)