Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Certamen N°4
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. **(16 puntos)** Sean A, B, C tres matrices de 5×5 tales que $\det(A) = 2$, $\det(B) = -1$, $\det(C) = 0$.

   Indicar justificadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

   a) Al tomar la matriz $2AB$ e intercambiar la segunda fila por la primera resulta una nueva matriz con determinante igual a 4.

   b) El rango de la matriz CB es 5.

   c) Un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes sea la matriz C tiene solución única.

   d) Se puede llegar a la matriz identidad I_5 a partir de la matriz B utilizando únicamente operaciones elementales de fila.

   <u>Desarrollo</u>: (4 puntos cada uno)

   a) El determinante de $2AB$ es $2^5 \cdot \det(A) \cdot \det(B) = -64$. Intercambiar dos filas sólo cambia el signo del determinante, por lo que esta afirmación es **falsa**.

   b) El determinante de CB es 0. Como CB es la única submatriz de 5×5, su rango debe ser menor que 5; o también, como CB es cuadrada y tiene determinante cero, su rango es menor a su número de filas. En cualquier caso, la afirmación es **falsa**.

   c) Como C tiene determinante cero, no es invertible, y luego un sistema de ecuaciones con C como matriz de coeficientes no puede ser despejado; o también, como el rango de C no es máximo, al aplicar el algoritmo de Gauss-Jordan se obtienen filas sin pivotes en la matriz de coeficientes. En cualquier caso, el sistema puede tener ninguna o infinitas soluciones, mas nunca sólo una, por lo que la afirmación es **falsa**.

   d) Como el determinante de B no es cero, es invertible, y luego por el algoritmo para hallar la inversa se llega a la matriz identidad a partir de B; o también, como su rango es máximo se puede escalonar con pivotes en toda la diagonal, y luego reducir y simplificar. En cualquier caso, la afirmación es **verdadera**.

2. **(14 puntos)**

   a) Simplificar la expresión
   $$\left(\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(2-i)}\right)^{17}.$$

   b) Resolver la ecuación
   $$z^5+1=i.$$

<u>Desarrollo</u>:

a) Tenemos
$$\frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(2-i)}=\frac{6+5i+i^2}{6-5i+i^2}=\frac{5+5i}{5-5i}=\frac{1+i}{1-i}$$

(2 puntos)

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i.$$

(3 puntos)

Luego la respuesta es i^{17}, que es i. **(2 puntos)**

b) La ecuación corresponde a
$$z^5=-1+i.$$

La forma polar de $-1+i$ está dada por un valor absoluto de $\sqrt{2}$ y un argumento de $135°$. **(3 puntos)**

Por lo tanto los valores posibles para z tienen todos un valor absoluto de $\sqrt[10]{2}$ y argumentos de
$$\frac{135°}{5}=27°$$
$$\frac{135°+360°}{5}=99°$$
$$\frac{135°+720°}{5}=171°$$
$$\frac{135°+1080°}{5}=243°$$
$$\frac{135°+1440°}{5}=315°$$

(4 puntos)

3. **(15 puntos)** Descomponer la expresión

$$\frac{2x^3+14x^2+33x+32}{x^3+6x^2+14x+15}$$

en fracciones parciales.

<u>**Desarrollo**</u>**:**

Primero notamos que el grado del numerador es mayor o igual al del denominador. Dividiendo,

$$\frac{2x^3+14x^2+33x+32}{x^3+6x^2+14x+15} = 2 + \frac{2x^2+5x+2}{x^3+6x^2+14x+15}$$

(3 puntos)

Ahora factorizamos el denominador. Buscando sus ceros racionales, encontramos el cero $x=-3$. Dividiendo,

$$x^3+6x^2+14x+15 = (x+3)(x^2+3x+5)$$

además observamos que el discriminante del factor cuadrático es negativo, así que esta es la máxima factorización. **(4 puntos)**

Por consiguiente, la descomposición es

$$2 + \frac{2x^2+5x+2}{x^3+6x^2+14x+15} = 2 + \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+3x+5}$$

con A, B, C números reales por determinar. **(2 puntos)**

Multiplicando y comparando coeficientes de iguales grados, tenemos

$$A+B=2, \qquad 3A+3B+C=5, \qquad 5A+3C=2$$

que tiene la solución única $A=1$, $B=1$, $C=-1$. Por lo tanto

$$\frac{2x^3+14x^2+33x+32}{x^3+6x^2+14x+15} = 2 + \frac{2x^2+5x+2}{x^3+6x^2+14x+15} = 2 + \frac{1}{x+3} + \frac{x-1}{x^2+3x+5}$$

(6 puntos)

4. **(15 puntos)** Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x-5y+z &= 0 \\ 2x+3y-z &= 1+3\beta \\ 3x-2y+\alpha z &= \beta-1 \end{aligned}\right|$$

donde α, β son números reales. Determinar condiciones sobre α y β para que el sistema correspondiente

a) no tenga solución,

b) tenga solución única, y

c) tenga más de una solución.

En este último caso, encontrar el conjunto solución.

Desarrollo:

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1+3\beta \\ 3 & -2 & \alpha & \beta-1 \end{bmatrix}$$

que, escalonada, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -3 & 1+3\beta \\ 0 & 0 & \alpha & -2\beta-2 \end{bmatrix}$$

Ahora se comparan rangos para determinar cada caso. **(4 puntos)**

a) Para que no haya solución, la última fila debe tener un pivote en la última columna. Es decir, $\alpha = 0$ y $-2\beta - 2 \neq 0$ $(\beta \neq -1)$. **(2 puntos)**

b) Para que haya solución única, las tres primeras columnas deben tener tres pivotes. Es decir, $\alpha \neq 0$ y ninguna restricción sobre β. **(2 puntos)**

c) Para que hayan infinitas soluciones, la matriz debe tener al menos una fila nula para bajar el rango. Es decir, $\alpha = 0$ y $\beta = -1$. **(2 puntos)**

En este último caso, la matriz del sistema queda

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que, reducido y simplificado, queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{13} & -\frac{10}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y el conjunto solución es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{13}z - \frac{10}{13} \\ y = \frac{3}{13}z - \frac{2}{13} \\ z = z \end{array} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

(5 puntos)