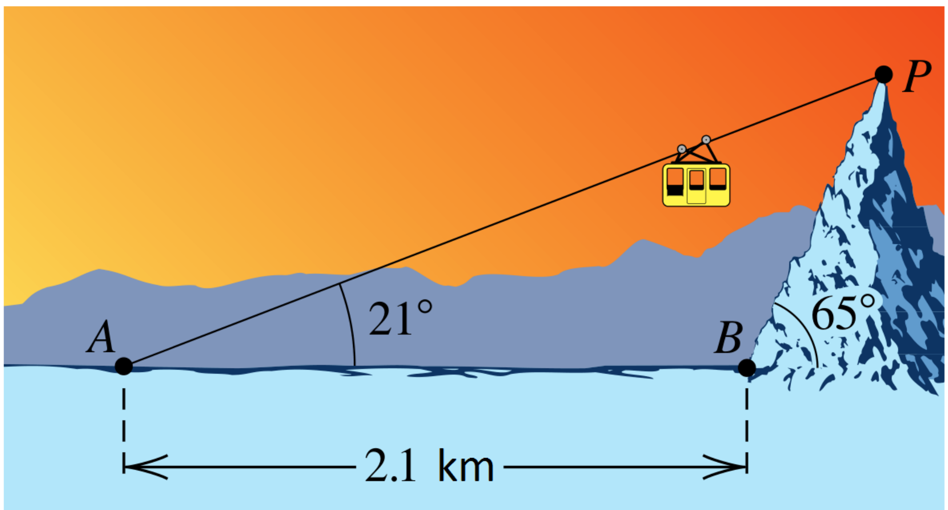
Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 3
Matemática II (527114/527118)

1. Un teleférico lleva pasajeros desde un punto A, que está a 2.1 kilómetros de un punto B en la base de una montaña, al punto P en la cima de la montaña. Si los ángulos de elevación a P desde A y B son, respectivamente 21^o y 65^o,



calcular la altura de la montaña.

Solución: En el triángulo ABP, dado que $\sphericalangle ABP = 115^o$ y $\sphericalangle BPA = 44^o$, al aplicar el Teorema del seno se tiene que

$$\frac{\sin(44^\circ)}{2.1} = \frac{\sin(115^\circ)}{\overline{AP}},$$

de donde se obtiene que $\overline{AP} = 2.74$ km. **(8 puntos)**

Por otra parte si h es la altura de la montaña, se tiene que

$$\sin(21^\circ) = \frac{h}{\overline{AP}}$$

y entonces $h = 0.98$ km. **(8 puntos)**

2. Utilizando identidades:

   a) demostrar que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

   b) determinar el valor exacto de $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{9}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{9}\right)\right)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x) \\
&= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \big(2\cos^2(x) - 1\big)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x). \quad \textbf{(8 puntos)}
\end{aligned}$$

b) Definiendo $\alpha := \operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{1}{9}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ y $\beta := \arcsin\left(-\frac{1}{9}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, se tiene que el valor pedido es

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&= \cos(\alpha) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} - \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \cdot \sin(\beta) \\
&= -\frac{1}{9} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} - \frac{4\sqrt{5}}{9} \cdot -\frac{1}{9} \\
&= 0 \quad \textbf{(8 puntos)}
\end{aligned}$$

3. Utilizando matrices, determinar el conjunto solución, para x, y y z en $\mathbb{R}$, del sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 8y + 5z &= 0 \end{cases}$$

Solución: Dado que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 0 \\ 3y + z &= 0 \end{cases} \quad \textbf{(6 puntos)}$$

y como $r(A) = 2 = r(A, B) < n = 3$, el sistema tiene infinitas soluciones y 2 incógnitas pueden expresarse en términos de alguna de las otras **(4 puntos)**. En este caso, al despejar x y z en función de y, se tiene que $z = -3y$ y que $x = 7y$.

De lo anterior, el conjunto solución está dado por

$$\left\{(7y, y, -3y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} \quad \textbf{(6 puntos)}$$

4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A se dice idempotente si $A^2 = A$ y A se dice involutiva si $A^2 = I_n$. Demostrar que:

   a) B es idempotente si y sólo si $B \cdot (I_n - B) = \theta_{n\times n}$.

   b) si B es involutiva entonces la matriz $C = \dfrac{1}{2}(I_n - B)$ es idempotente.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
B \cdot (I_n - B) = \theta_{n\times n} &\Leftrightarrow B \cdot I_n - B^2 = \theta_{n\times n} \\
&\Leftrightarrow B - B^2 = \theta_{n\times n} \\
&\Leftrightarrow B = B^2 + \theta_{n\times n} \\
&\Leftrightarrow B = B^2 \\
&\Leftrightarrow B^2 = B \quad \textbf{(6 puntos)}
\end{aligned}$$

b) Dado que

$$\begin{aligned}
C^2 &= \left(\frac{1}{2}(I_n - B)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(I_n - B)^2 \\
&= \frac{1}{4}(I_n - B)(I_n - B) \\
&= \frac{1}{4}\left(I_n^2 - I_nB - BI_n + B^2\right) \\
&= \frac{1}{4}(I_n - B - B + I_n) \\
&= \frac{1}{4}(2I_n - 2B) \\
&= \frac{1}{2}(I_n - B) \\
&= C,
\end{aligned}$$

es claro que C es idempotente. **(6 puntos)**

5 de julio de 2019
EGG/egg