UNIVERSIDAD DE CONCEPCION

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

HPV 08/01/20

Evaluación 3. 527113 - 527117.

1. Obtenga el conjunto solución de

   a) $|1-3x| \geq 1$

   b) $\left|\dfrac{2}{2x-1}\right| < 1$

   Solución.-

   a) $|1-3x| \geq 1 \iff (1-3x) \geq 1 \vee (1-3x) \leq -1$

   $$\iff \quad 3x \leq 0 \vee 3x \geq 2$$

   $$\iff \quad x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$$

   Solución: $S = (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$. (6 puntos)

   b) $\left|\dfrac{2}{2x-1}\right| < 1 \iff \frac{2}{2x-1} < 1 \wedge \frac{2}{2x-1} > -1$ (2 puntos)

   bi) $\frac{2}{2x-1} < 1 \iff \frac{2}{2x-1} - 1 < 0 \iff \frac{3-2x}{2x-1} < 0$

   De la tabla de signos

		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$3-2x$	$++$	$+$	$++$	0	$--$
$2x-1$	$--$	0	$++$	$+$	$++$
$\frac{3-2x}{2x-1}$	$--$	$*$	$++$	0	$--$

   se obtiene $S_i = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

   (5 puntos)

   bii) $\frac{2}{2x-1} > -1 \iff \frac{2}{2x-1} + 1 > 0 \iff \frac{2x+1}{2x-1} > 0$

   De la tabla de signos

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$2x+1$	$--$	0	$++$	$+$	$++$
$2x-1$	$--$	$-$	$--$	0	$++$
$\frac{2x+1}{2x-1}$	$++$	0	$--$	$*$	$++$

   se obtiene $S_{ii} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

   (5 puntos)

   Por lo tanto, la solución es $S = S_i \cap S_{ii} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

   (2 puntos)

2. Considere el triángulo de vértices $A = (2, -3)$, $B = (3, 2)$ y $C = (-2, 5)$. Determine el punto medio D de $\overline{AB}$ y el punto medio E de $\overline{AC}$. Use geometría analítica para decidir justificadamente si $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

(10 puntos)

Solución.-

Punto medio de $\overline{AB}$: $D = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{-3+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Punto medio de $\overline{AC}$: $E = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (0, 1)$. (2 puntos)

Pendiente de $\overleftrightarrow{DE}$: $m_1 = \frac{1-\frac{-1}{2}}{0-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}$

Pendiente de $\overleftrightarrow{BC}$: $m_2 = \frac{5-2}{-2-3} = -\frac{3}{5}$.. (4 puntos)

De lo anterior $m_1 = m_2$ demuetra que $\overleftrightarrow{DE} \| \overleftrightarrow{BC}$. (4 puntos)

3. Una recta L es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+4x+y^2+2y-15 = 0$ en un punto $A = (2, 1)$. Determine la ecuación de L.

(15 puntos)

Solución.- La circunferencia es

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 - 15 &= 0 \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 &= 20\end{aligned}$$

Luego tiene centro en $(-2, -1)$ y radio $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

(5 puntos)

Aunque el enunciado dice que la circunferencia pasa por $(2, 1)$, éste último puede ser verificado en la ecuación.

La recta que contiene al radio que pasa por $(2, 1)$ tiene pendiente $m_1 = \frac{1-(-1)}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$. Luego la recta tangente a la circunferencia en ese punto tiene pendiente $m_2 = -2$.

(5 puntos)

Así que su ecuación es:

$$\begin{aligned}y - 1 &= -2(x-2) \\ y &= -2x + 5\end{aligned}$$ (5 puntos)

4. Considere los puntos $P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (3, 1)$. Encuentre la ecuación de todos los puntos $P = (x, y)$ del plano que cumplen con la condición

$$d(P, P_1) = d(P, P_2)$$

Dibuje en el sistema de coordenadas este conjunto.

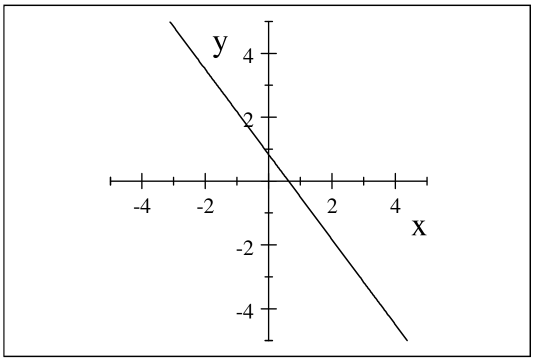
(15 puntos)

Solución.-

Para $P = (x, y)$ se tiene: $d(P, P_1) = d(P, P_2)$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8x + 6y = 5 \qquad \text{(10 puntos)}
\end{aligned}$$

Es la recta de ecuación $8x + 6y = 5$



donde se deben identificar de manera precisa dos puntos de ella.

(5 puntos)

Tiempo: 90 minutos