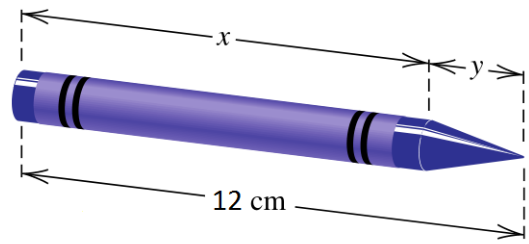
Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°3
Matemática I (527113/527117)

1. Un lápiz tiene forma de cilindro con una pequeña punta cónica. Sabiendo que su largo es de 12 centímetros, el diámetro del cilindro es de 1 centímetro y el volumen del lápiz es de 5 centímetros cúbicos,



determinar la longitud x del cilindro y la altura y del cono.

Solución: Dado que el largo del lápiz es de 8 centímetros, se tiene que

$$x + y = 12. \textbf{ (3 puntos)} \tag{1}$$

Por otra parte, como el volumen de un cilindro de radio r y altura h es $\pi r^2 h$ y el volumen de un cono de radio r y altura h es $\pi r^2 h/3$, se tiene

$$\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{12}y = 5. \textbf{ (3 puntos)} \tag{2}$$

Al multiplicar a ambos lados de la ecuación (2) por $\dfrac{12}{\pi}$ se obtiene que

$$3x + y = \frac{60}{\pi},$$

de donde al restar con la ecuación (1), se llega a que la altura del cilindro es

$$x = \frac{30}{\pi} - 6 \textbf{ (3 puntos)}$$

y por lo tanto, nuevamente de la ecuación (1), la altura del cono es

$$y = 18 - \frac{30}{\pi}. \textbf{ (3 puntos)}$$

2. Calcular la distancia desde la recta de ecuación $3x-4y+17=0$ hasta el punto $(4,1)$.

Solución: Como la distancia desde la recta de ecuación $Ax+By+C=0$ hasta el punto $P_0=(x_0,y_0)$ está dada por

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \textbf{ (3 puntos)}$$

en este caso al identificar $A=3$, $B=-4$, $C=17$, $x_0=4$ e $y_0=1$ **(3 puntos)**, se tiene que la distancia desde la recta L de ecuación $3x-4y+17=0$ hasta el punto $P:=(4,1)$ es

$$d=\frac{|3\cdot 4-4\cdot 1+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5. \textbf{ (6 puntos)}$$

3. Considerar la elipse y la parábola, definidas por las ecuaciones

$$9x^2 - 72x + 4y^2 - 48y + 252 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + 8x + 8y + 16 = 0,$$

respectivamente.

a) Indicar el centro C de la elipse y el vértice V de la parábola.

b) Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de C y de V.

c) Calcular el área la región del primer cuadrante que está encerrada por el lugar geométrico de la parte *b*) y los ejes coordenados.

Solución:

a) Como

$$9x^2 - 72x - 4y^2 + 48y - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{9} = 1,$$

se observa que el centro de la hipérbola está en $C = (4, 6)$. **(4 puntos)**

Por otra parte, como

$$x^2 + 8x + 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 = -8y,$$

se observa que el vértice de la parábola es $V = (-4, 0)$. **(4 puntos)**

b) Sea $P = (x, y)$ un punto en el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de C y de V, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} &= \sqrt{(x+4)^2 + y^2} \text{ **(4 puntos)**} \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 &= x^8 + 8x + 16 + y^2 \\ 4x + 3y &= 9. \text{ **(4 puntos)**} \end{aligned}$$

c) La recta L, de ecuación $4x + 3y = 9$, intersecta al eje x en el punto $(9/4, 0)$ e intersecta al eje y en el punto $(0, 3)$. **(4 puntos)**

De lo anterior, si T es la región acotada por L y los ejes coordenados, se tiene que T es un triángulo cuya base mide $9/4$ unidades de longitud y cuya altura mide 3 unidades de longitud, de donde

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8} \text{ unidades cuadradas de longitud.}$$ **(4 puntos)**

4. Identificar el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que las rectas que los unen a los puntos $(-2,-2)$ y $(6,8)$ son perpendiculares.

Solución: Sea $P=(x,y)$ un punto en el lugar geométrico, como la pendiente de la recta que contiene a $A:=(-2,-2)$ y a P es

$$m_A=\frac{y+2}{x+2}$$

y la pendiente de la recta que contiene a $B:=(6,8)$ y a P es

$$m_B=\frac{y-8}{x-6},$$

dado que dichas son perpendiculares, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{y+2}{x+2}\cdot\frac{y-8}{x-6} &= -1 \text{ \textbf{(6 puntos)}}\\
y^2-6y-16 &= -x^2+4x+12\\
x^2-4x+y^2-6y &= 28\\
x^2-4x+4+y^2-6y+9 &= 41\\
(x-2)^2+(y-3)^2 &= \sqrt{41}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de los puntos tales que las rectas que los unen a $(-2,-2)$ y a $(6,8)$ son perpendiculares, corresponde a la circunferencia de centro en $(2,3)$ y radio $\sqrt{41}$. **(6 puntos)**

18 de Diciembre de 2018
EGG/egg