Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Evaluación N°3
Cálculo Diferencial e Integral (527104)

1. Utilizar el método de anillos para calcular el volumen de un cono de radio r y altura h.

   Solución: Al rotar en torno al eje y la región triangular de vértices $(0,0)$, $(r,0)$ y $(0,h)$ se genera el volumen V que se pide calcular. Como la recta que pasa por los puntos $(r,0)$ y $(0,h)$ tiene ecuación $y = f(x) := -\frac{h}{r}x + h$ **(4 puntos)**, se tiene

$$V = 2\pi \int_0^r x f(x)\, dx = \frac{\pi r^2 h}{3}. \textbf{ (8 puntos)}$$

2. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $[1, +\infty[$.

   Solución: Dado que para $x \geq 1$, se tiene que $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)} > 0$ y por lo tanto la primera curva está siempre por sobre la segunda, luego el área está dada por

$$A(R) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx. \textbf{ (4 puntos)}$$

   Ahora, al definir $I_b := \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \right) + \frac{1}{2}\ln(2)$, **(4 puntos)** se obtiene que

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} I_b = \lim_{b \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+1/b}} \right) + \frac{1}{2}\ln(2) = \ln\sqrt{2}. \textbf{ (4 puntos)}$$

3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas de ecuaciones polares $r = 2\cos(\theta) + 2\sin(\theta)$ y $r = \sqrt{2}$, respectivamente.

   a) Escribir la ecuación cartesiana de cada curva.

   b) Bosquejar dichas curvas, indicando sus puntos de intersección en coordenadas polares.

   c) Escribir la integral que permite calcular el área de la región interior a ambas curvas.

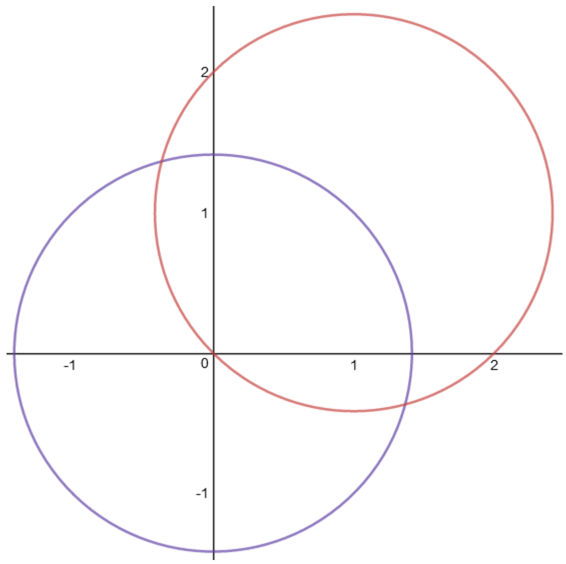
Solución:

a) Del cambio $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$, se tiene que $x^2 + y^2 = r^2$ y por lo tanto, la segunda ecuación en coordenadas está dada por $x^2 + y^2 = 2$. **(2 puntos)**

De la primera ecuación, se que tiene $r^2 = 2r\cos(\theta) + 2r\sin(\theta)$, lo cual en coordenadas cartesianas se escribe como

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2. \textbf{ (2 puntos)}$$

b) Un bosquejo de las curvas es



(2 puntos)

De la ecuación

$$2\cos(\theta) + 2\sin(\theta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(2\theta) = -\frac{1}{2}$$

se obtiene que $\theta = -\dfrac{\pi}{12}$ y que $\theta = \dfrac{7\pi}{12}$, por lo tanto los puntos de intersección son $\left(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{12}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \dfrac{7\pi}{12}\right)$. **(2 puntos)**

c) Utilizando simetría con respecto a la recta $\theta = \pi/4$, el área de la región interior a ambas curvas puede calcularse por medio de la integral

$$A(R) = \int_{\pi/4}^{7\pi/12} \left[\sqrt{2}\right]^2 d\theta + \int_{7\pi/12}^{3\pi/4} \left[2\cos(\theta) + 2\sin(\theta)\right]^2 d\theta. \textbf{ (6 puntos)}$$

4. Analizar la convergencia de las siguientes series y, en caso de ser posible, hallar su suma.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n + 5^n}{6^n}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{n+1}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Solución:

a) Como $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{(1/2)^2}{1-1/2} = \frac{1}{2}$ y $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{(5/6)^2}{1-5/6} = \frac{25}{6}$, entonces la serie dada converge y $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n+5^n}{6^n} = \frac{1}{2} + \frac{25}{6} = \frac{14}{3}$. **(4 puntos)**

b) Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{n+1} = 1 \neq 0$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{n+1}$ diverge. **(4 puntos)**

c) Dado que $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log(n)$, puede notarse que

$S_n = \log(2) - \log(1) + \log(3) - \log(2) + \ldots + \log(n+1) - \log(n) = \log(n+1)$,

expresión que diverge y por tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge. **(4 puntos)**

5. Sea $\mathcal{C}$ una curva continua, de ecuación $y = f(x)$, la cual pasa por el origen y está completamente contenida en el primer cuadrante. Si el área bajo la curva desde $(0,0)$ a cada punto $(x,y) \in \mathcal{C}$ es un tercio del área del rectángulo que, con los lados paralelos a los ejes, tiene esos puntos como vértices, entonces ¿cuál es la ecuación de la curva?

Solución: Como el área bajo la curva es $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ y del área del rectángulo es xy, se tiene

$$\frac{xy}{3} = \int_0^x f(t)dt.$$

De la continuidad de f y del Teorema Fundamental del Cálculo, al derivar en la igualdad anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) &= f(x) \text{ } \textbf{(5 puntos)} \\ x\frac{dy}{dx} &= 2y \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{x} \\ \frac{d}{dx}(\ln(y)) &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

de donde, al integrar con respecto a x, se llega a $\ln(y) = \ln(x^2) + C$ y por lo tanto, la ecuación de la curva es $y = kx^2$, con k constante positiva. **(5 puntos)**

28 de Noviembre de 2018
EGG/JOF/egg