UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Evaluación 3
Algebra y Trigonometría (527103)

1. Considere las funciones reales f, g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2(4 - x^2)}, \qquad g(x) = e^{x^2 - 1}$$

   a) Determine sus dominios

   b) Defina la compuesta $g \circ f$ y muestre que para todo x en su dominio se tiene:

$$(g \circ f)(x) = \left(4 - x^2\right)^{-\log_2(e)}$$

   c) Defina una restricción h de f que sea biyectiva y defina su inversa. Justifique todas sus afirmaciones.

(25 puntos)

2. Resuelva la ecuación para $x \in [0, 2\pi]$:

$$\cos^2(2x) - 3\cos^2(x) + 2 = 0$$

(10 puntos)

3. Calcule el valor exacto de:

   a) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

   b) $\cos\left(\arctan(2) + \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$

(10 puntos)

4. Un vehículo de la Conaf se dirige de sur a norte a una velocidad de 120 km/h. En un determinado instante el chofer divisa una columna de humo en dirección $N15°E$ y un minuto más tarde observa la misma columna en dirección $N45°E$. ¿A qué distancia de la carretera se encuentra el incendio?

(15 puntos)

---

[0]Tiempo: 100 minutos.-

Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Resumida Evaluación N°3
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. *a*) $D_f = \left]-2,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},2\right[$ **(5 puntos)**, $D_g = \mathbb{R}$ **(1 punto)**

   b) La compuesta $g \circ f$, tiene dominio $\left]-2,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},2\right[$ **(2 puntos)** y está definida por

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{-\log_2(4-x^2)} = e^{-\frac{\ln(4-x^2)}{\ln 2}} = (4-x^2)^{-\log_2(e)} \text{ \textbf{(4 puntos)}}$$

   c) La función $h : \left[\sqrt{2},2\right[\to \mathbb{R}_0^+$, definida por

   $$h(x) = \sqrt{1-\log_2(4-x^2)} \text{ \textbf{(1 punto)}}$$

   es inyectiva **(2 puntos)**. De la igualdad $y = \sqrt{1-\log_2(4-x^2)}$ se tiene que

   $$x = \sqrt{4-2^{1-y^2}}$$

   y como $\sqrt{2} \leq x < 2$, se obtiene que $R_h = [0,+\infty[$ **(8 puntos)** y por lo tanto h es sobreyectiva.

   De lo anterior, como h es biyectiva, ella posee inversa y dicha inversa es

   $$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\to \left[\sqrt{2},2\right[\\ x &\mapsto h^{-1}(x) = \sqrt{4-2^{1-x^2}} \text{ \textbf{(2 puntos)}} \end{aligned}$$

2. Al considerar la identidad $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ y la identidad fundamental, la ecuación queda

   $$\sin^2 x \left(4\sin^2 x - 1\right) = 0,$$

   de donde, $\sin x = 0$ o $\sin x = \pm\dfrac{1}{2}$ **(7 puntos)** y se obtiene el conjunto solución

   $$\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\} \text{ \textbf{(3 puntos)}}$$

3. *a*) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ **(3 puntos)**

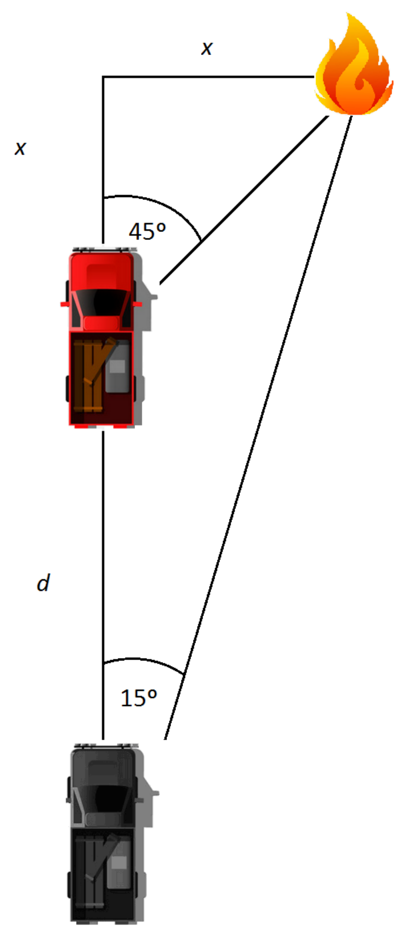
b) Considerando $\alpha = \operatorname{Arctan} 2$ y $\beta = \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{5}\right)$, se tiene que

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{24}}{5},$$

de donde

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5\sqrt{5}}\left(\sqrt{24} + 2\right) \quad \textbf{(7 puntos)}$$

4. La distancia recorrida por el vehículo es $d = 2$ kilómetros. Si x es la distancia entre la carretera y el incendio,



(5 puntos)

se tiene que $\tan(15°) = \dfrac{x}{d + x}$ **(5 puntos)**, de donde

$$x = \frac{2\tan(15°)}{1 - \tan(15°)} = \sqrt{3} - 1 \text{ kilómetros.} \quad \textbf{(5 puntos)}$$

4 de Junio de 2018
JUA/EGG/MWC/egg