Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Pauta Evaluación N°3
Introducción a la Matemática Universitaria (520145)

1. Calcular el valor exacto de

$$\sin\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+\text{Arccos}(-1)\right).$$

Solución: Como $2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+\text{Arccos}(-1)=2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$, se debe calcular el valor exacto del seno de este último ángulo. **(3 puntos)**

Para $\alpha=\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$, se tiene que $\sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\cos(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{5}}$, de donde

$$\begin{aligned}
\sin\left(2\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \sin(2\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(2\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)\\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

(9 puntos)

2. En un triángulo no rectángulo los ángulos interiores son α, β y γ. Mostrar que

$$\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma)=0.$$

Solución: Como $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, se tiene que $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, de donde

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \tan(\pi-\gamma)\\
&= \frac{\tan\pi-\tan\gamma}{1+\tan\pi\tan\gamma}\\
&= -\tan\gamma
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma)=0$. **(8 puntos)**

3. Determinar el conjunto solución, para:

   a) $\log_e(6-x)^2 - \log_{\frac{1}{e}}(6-x) < \log_e(x^3)$, $x \in \mathbb{R}$

   b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

   Solución:

   a) Para que cada uno de los logaritmos de la inecuación estén definidos debe tenerse que $6-x>0$ y que $x>0$, esto es, $x \in]0,6[$. **(4 puntos)**

   Ahora, utilizando propiedades de los logaritmos, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\log_e(6-x)^2 - \log_{\frac{1}{e}}(6-x) < \log_e\left(x^3\right) &\Leftrightarrow 2\ln(6-x) + \ln(6-x) < 3\ln x \\
&\Leftrightarrow \ln(6-x) < \ln x \\
&\Leftrightarrow x > 3,
\end{aligned}
$$

   y por lo tanto el conjunto solución es $S =]3,6[$. **(8 puntos)**

   b) Reescribiendo la ecuación como

$$\cos x - 1 = \sqrt{3}\sin x,$$

   después de elevar al cuadrado a ambos lados, se tiene

$$
\begin{aligned}
\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 3\sin^2 x &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0,
\end{aligned}
$$

   de donde $\cos x = 1$ o $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

   Si $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, se tiene que $x = \dfrac{2\pi}{3}$ o $x = \dfrac{4\pi}{3}$ y si $\cos x = 1$, se tiene que $x = 0$ o $x = 2\pi$. **(7 puntos)**

   Además, si $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$, se tiene que $f(0) = f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = f(2\pi) = 1$ y $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -1$ y por lo tanto el conjunto solución es

$$S = \left\{0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}.$$ **(6 puntos)**

4. Un cultivo de bacterias posee un crecimiento exponencial, es decir, la cantidad de bacterias en el instante t es

$$A(t) = A_0 e^{kt},$$

donde A_0 es la cantidad inicial y t se mide en horas. Si inicialmente hay 100 bacterias y cinco horas más tarde hay 300, determinar:

   a) El valor de la constante k.

   b) El tiempo que deberá transcurrir para que el número de bacterias sea 900. Indicar dicho tiempo en la forma más simplificada posible.

Solución:

   a) De la condición inicial, como $A(0) = 100$, se tiene que $A_0 = 100$.

   Por otra parte, dado que $A(5) = 300$, se tiene que

$$100e^{5k} = 300$$

   y entonces $k = \dfrac{\ln(3)}{5}$. **(5 puntos)**

   b) De la parte anterior, como $A(t) = 100e^{\frac{\ln(3)}{5}t}$, se tiene que si t^* es el instante tal que $A(t^*) = 900$, entonces

$$\begin{aligned} 100e^{\frac{\ln(3)}{5}t^*} &= 900 \\ \frac{\ln(3)}{5}t^* &= 2\ln(3) \\ t^* &= 10 \end{aligned}$$

   y por lo tanto, después de 10 horas se tendrán 900 bacterias. **(10 puntos)**

18 de Mayo de 2017
MWC/LBA/GAJ/SCT/GCA/HDN/EGG/JSA/CMJ/egg