Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 3
Cálculo III (2025)

1. Sean $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $F(x,y,z) = (3x^2yz - 3y)\hat{\imath} + (x^3z - 3x)\hat{\jmath} + (x^3y + 2z)\hat{k}$ y la curva Γ de ecuaciones paramétricas $x(t) = t$, $y(t) = t^3 + t^2 - 1$, $z(t) = t + 3$, donde $t \in [-1, 1]$. Determinar el valor de la integral de línea $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot dr$.

   Solución: Un potencial escalar para F es $f(x,y,z) = x^3yz - 3xy + z^2$ **(5 puntos)** y como F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, entonces F es un campo conservativo. **(5 puntos)**

   Por otra parte, como el punto extremo inicial de Γ es $A := (-1, -1, 2)$ y el punto extremo final es $B := (1, 1, 4)$, **(5 puntos)** se tiene que

$$\int_\Gamma F \cdot dr = f(B) - f(A) = 14. \quad \textbf{(5 puntos)}$$

2. Calcular la integral $\oint_C F \cdot dr$, donde $F(x,y) = \left(2y - \dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}, \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\right)$ y C es la elipse de ecuación $4x^2+9y^2 = 36$ recorrida una vez en sentido antihorario.

Solución: Sean $p(x,y) := 2y - \dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$, $q(x,y) := \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$ y C_0 la circunferencia de radio 1 con centro en $(-1,0)$ orientada en sentido antihorario.

Sea D la región entre las curvas C y C_0, como $F = (p,q)$ es de clase C^1 sobre un abierto A tal que $D \subset A$ y las curvas C y C_0 son suaves, simples y cerradas, entonces por la segunda versión del Teorema de Green, se tiene que

$$\oint_C p\,dx + q\,dy - \oint_{C_0} p\,dx + q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x,y)\,d(x,y). \textbf{ (6 puntos)}$$

Como $\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial p}{\partial y}(x,y) = -2$, entonces

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x,y)\,d(x,y) = -2\,\text{Área}(D) = -10\pi. \textbf{ (6 puntos)}$$

Por otra parte, dado que una representación de C_0 es la dada por las ecuaciones paramétricas $x = \cos(t) - 1$ e $y = \sin(t)$, donde $t \in [0, 2\pi]$, por definición de integral de línea, se tiene que

$$\oint_{C_0} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\,dt = 0 \textbf{ (6 puntos)}$$

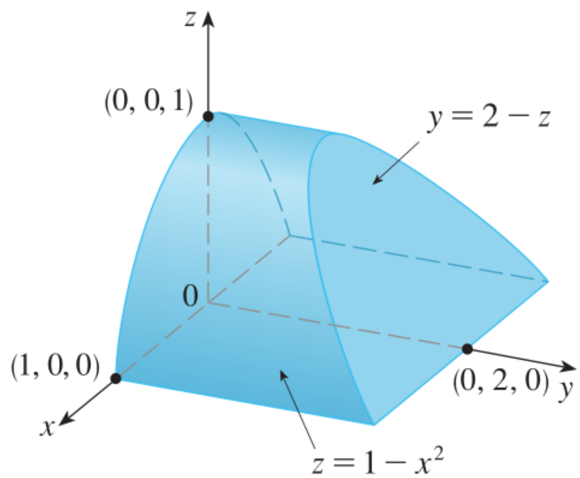
y por lo tanto, de lo anterior, $\oint_C F \cdot dr = -10\pi$. **(2 puntos)**

3. Sea R la región acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$. Sean S la frontera de R orientada exteriormente y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, el campo definido por $F(x, y, z) = 2xz\hat{\imath} + 3yz\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$. Indicar, de manera justificada, si puede aplicarse el Teorema de Gauss para calcular

$$\iint_S F \cdot \hat{n}\, dA$$

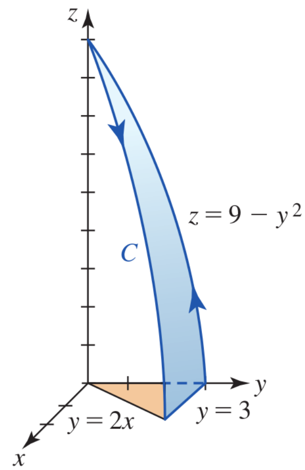
y luego determinar el valor de dicha integral.

Solución: Como S es seccionalmente suave, cerrada y orientada exteriomente y F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, entonces es aplicable el Teorema de Gauss **(6 puntos)** y



$$\begin{aligned}
\oiint_S F \cdot \hat{n}\, dA &= \iiint_R \nabla \cdot F\,(x, y, z)\; d(x, y, z) \\
&= 7 \iiint_R z\, d(x, y, z) \ \textbf{(7 puntos)} \\
&= 7 \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \int^{2-z} z\, dy\, dz\, dx \\
&= \frac{16}{3}. \ \textbf{(7 puntos)}
\end{aligned}$$

4. Sean $F(x,y,z) = x^2y\hat{\imath} + (x+y^2)\hat{\jmath} + y^2z\hat{k}$ y C el borde de la superficie que se muestra en la figura



Utilizar el Teorema de Stokes para calcular $\oint_C F \cdot dr$.

Solución: Como F es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$, del Teorema de Stokes, la integral de línea puede calcularse como sigue

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dA,$$

donde S es la parte del cilindro parabólico que tiene como borde a la curva seccionalmente suave C y cuya proyección en el plano xy es el conjunto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3/2,\ 2x \leq y \leq 3\right\}. \ \textbf{(6 puntos)}$$

Una parametrización para S, es

$$\begin{array}{rcl} \Phi : D & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & \Phi(x,y) = \left(x, y, 9-y^2\right), \end{array}$$

de donde $\vec{n}(x,y) = \Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y) = (0, 2y, 1)$. **(7 puntos)**

De lo anterior,

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot dr &= \iint_D \left(18y - 2y^3, 0, 1-x^2\right) \cdot (0, 2y, 1)\, d(x,y) \\ &= \int_0^{3/2} \int_{2x}^3 (1-x^2)\, dy\, dx \\ &= \frac{45}{32}. \ \textbf{(7 puntos)} \end{aligned}$$

30 de Enero de 2019
EGG/egg