**Universidad de Concepción**
**Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**
**Departamento de Matemática**

---

**Pauta Evaluación N°2**
**Cálculo II (527148)**

1. Utilizar el método de discos para calcular el volumen de un cono de radio $r$ y altura $h$.

   **Solución:** Al rotar en torno al eje $x$ la región triangular de vértices $(0,0)$, $(h,0)$ y $(h,r)$ se genera el volumen que se pide calcular. Como la recta que pasa por el origen y por el punto $(h,r)$ tiene ecuación $y = f(x) := \dfrac{rx}{h}$ **(4 puntos)**, se tiene

$$V = \pi \int_0^h [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2} dx = \frac{\pi r^2 h}{3}. \textbf{ (8 puntos)}$$

2. Un imán se ha pegado a la llanta de una rueda de radio $a$. En cada vuelta, mientras la rueda avanza, la trayectoria recorrida por el imán está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = a(t - \sin t) \quad \text{e} \quad y(t) = a(1 - \cos t),$$

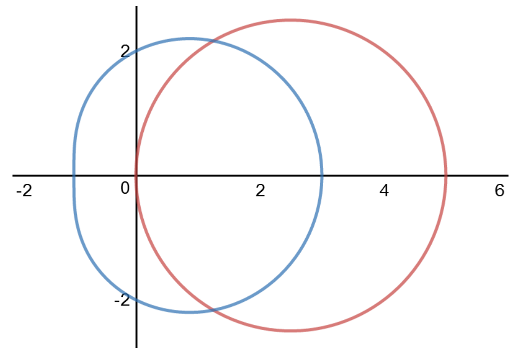
   donde $t \in [0, 2\pi]$. ¿Qué distancia recorre el imán cuando la rueda da una vuelta?

   <u>Indicación</u>: Puede considerarse la identidad $\dfrac{1-\cos x}{2} = \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

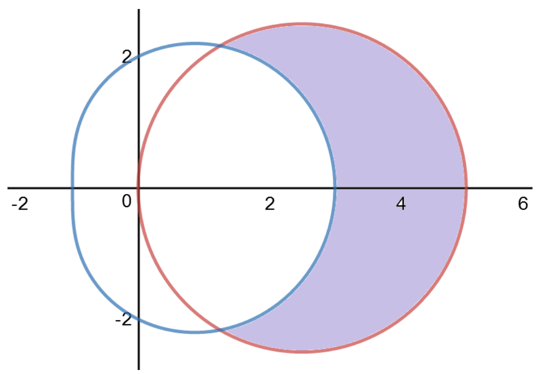
   **Solución:** La distancia recorrida por el imán cuando la rueda da una vuelta corresponde a la longitud de arco de la curva $C(t) = (x(t), y(t))$, donde $t \in [0, 2\pi]$, determinada por la integral

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \textbf{ (4 puntos)} \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)} \, dt \\
&= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \, dt \\
&= 2a \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \, dt \\
&= 8a. \textbf{ (8 puntos)}
\end{aligned}$$

3. Calcular el área de la región interior a la circunferencia $r = 5\cos\theta$ y exterior al limaçon $r = 2 + \cos\theta$.




**Solución:** Como las curvas se intersectan cuando $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}$ y dada la simetría de los gráficos, el área de la región




está determinada por

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\pi/3} \left[(5\cos\theta)^2 - (2+\cos\theta)^2\right] d\theta \ \textbf{(4 puntos)} \\ &= \int_0^{\pi/3} [12\cos(2\theta) - 4\cos\theta + 8]\, d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}. \ \textbf{(8 puntos)}\end{aligned}$$

4. Determinar justificadamente, la certeza o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones:

   *a*) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ es condicionalmente convergente.

   *b*) Para la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$, el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $I = [2, 4[$.

**Solución:**

*a*) Como $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y la sucesión $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ es positiva, decreciente y converge a cero, por el criterio de Leibniz se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ converge. **(4 puntos)**

Por otra parte, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es una serie $p$ divergente (pues $p = 1/2$), se tiene que la serie original no converge absolutamente. **(3 puntos)**

De lo anterior, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente y la afirmación es **verdadera**. **(3 puntos)**

*b*) Para $x = 3$, la serie converge a cero.

Para $x \neq 3$, definiendo $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{(x-3)^n}\right| = |x-3|$, por el criterio del cuociente se tiene que la serie converge si

$$|x-3| < 1 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

y se tiene que la serie diverge si $|x-3| > 1 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$, de donde, el radio de convergencia es $R = 1$. **(6 puntos)**

Si $x = 2$, se tiene la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, la cual converge, pues la sucesión $\dfrac{1}{n}$ es positiva, decreciente y converge a cero. **(3 puntos)**

Si $x = 4$, se tiene la serie armónica, la cual es divergente. **(3 puntos)**

De lo anterior, como el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $I = [2, 4[$ , se tiene que la afirmación es **verdadera**. **(2 puntos)**

**28 de Mayo de 2018**
**EBC/EGG/GCA/egg**