Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°2
Cálculo I (527147)

1. Un cohete que se mueve verticalmente a una velocidad de 300 millas por hora es visto por un observador sobre la tierra a 5 millas de la plataforma de lanzamiento. ¿Con qué rapidez aumenta el ángulo de elevación del cohete en el instante en que éste se encuentra a 2 millas de altura?

   Solución: Sea $x(t)$ la altura en millas a la que se encuentra el cohete en un determinado instante t, y sea t_0 tal que $x(t_0) = 2$. Se sabe que

   $$\frac{dx}{dt}(t_0) = 300\,\text{millas/hora}$$

   Si θ es el ángulo de elevación del observador, se tiene la relación

   $$\tan(\theta) = \frac{x}{5}$$

   derivando respecto al tiempo se tiene

   $$\begin{aligned} \sec^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{5}\cos^2(\theta)\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

   (6 puntos)

   En el instante t_0, se tiene que $\cos^2(\theta) = \frac{25}{29}$. Luego

   $$\theta'(t_0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{29} \cdot 300 = \frac{1500}{29}\ \text{radianes/hora}$$

   por lo tanto, el ángulo, en el instante t_0 aumenta a esta tasa. **(4 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ & \\ \dfrac{x}{x^2+1} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$. Determinar:

   a) Puntos críticos.

   b) Intervalos de crecimiento e intervalos de decrecimiento.

   c) ¿La función alcanza máximo y/o mínimo absoluto? Justifique.

<u>**Solución:**</u>

a) Para $x < 0$: $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, y luego no hay puntos críticos negativos.

   Para $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ y luego el único punto crítico positivo es $x = 1$.

   De lo anterior, el único punto crítico de f es $x_0 = 1$. **(5 puntos)**

   <u>Observación</u>: También se considera correcto afirmar que $x_0 = 0$ es un punto crítico para f debido a la discontinuidad de f en dicho punto.

b) De la parte anterior, se tiene que f es decreciente en el intervalo $]-\infty, 0[$.

   Para $x > 0$, se tiene $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ y $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

   Luego, f es creciente en $]0, 1[$ y es decreciente en $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$. **(5 puntos)**

c) Como $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, f no alcanza mínimo absoluto.

   Por otra parte, de lo obtenido en b), como $f(x) < 0 \, \forall x < 0$ y $f(1) = \dfrac{1}{2} > 0$, es claro que f alcanza su máximo absoluto en $x_0 = 1$. **(5 puntos)**

3. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

Solución:

a) Utilizando la sustitución $\mu^6 = x \Rightarrow 6\mu^5\,d\mu = dx$, $x > 0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx &= 6\int \frac{\mu^5}{\mu^3+\mu^2}\,d\mu \\
&= 6\int \left(\frac{-\mu^2}{\mu^2(\mu+1)} + \mu^2 - \mu + 1\right)d\mu \\
&= -6\int \frac{1}{\mu+1}\,d\mu + 6\int \mu^2\,d\mu - 6\int \mu\,d\mu + 6\int\ d\mu \\
&= -6\ln(|\mu+1|) + 6\frac{\mu^3}{3} - 6\frac{\mu^2}{2} + 6\mu + C \\
&= -6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + 2\sqrt{x} - 3\ \sqrt[3]{x} + 6\ \sqrt[6]{x} + C
\end{aligned}$$

(10 puntos)

b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx \\
&= \int (\operatorname{sen}(u)+1)^2\,du && (1) \\
&= \int \operatorname{sen}^2(u)\,du + 2\int \operatorname{sen}(u)du + \int du \\
&= \frac{3}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2u) - 2\cos(u) + C && (2) \\
&= \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}\cos(u)(\operatorname{sen}(u)+4) + C && (3) \\
&= \frac{3}{2}\arcsin(x-1) - \frac{1}{2}\sqrt{2x-x^2}(x+3) + C && (4)
\end{aligned}$$

(10 puntos)

donde en (1) se usa la sustitución $x-1 = \operatorname{sen}(u)$, $du = \cos(u)\,du$, en (2) se usa la identidad $\operatorname{sen}^2(u) = \frac{1}{2}(1-\cos(2u))$, en (3) se usa la identidad $\operatorname{sen}(2u) = 2\cos(u)\operatorname{sen}(u)$, y en (4) que $\cos(u) = \sqrt{2x-x^2}$

4. Decidir, justificando adecuadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) La función $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 1$ es creciente y cóncava hacia arriba en el intervalo $]1, \infty[$.

   b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0$

   c) La ecuación $x^5 + 5x^3 + x - 6 = 0$ tiene exactamente una solución real.

Solución:

   a) **Verdadero:** Dado que $f'(x) = 5x^4 - 5x^2 = 5x^2(x^2 - 1)$, si $x > 1$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente en $]1, \infty[$ y como $f''(x) = 20x^3 - 10x = 10x(2x^2 - 1)$, si $x > 1$, entonces $f''(x) > 0$ y f es cóncava hacia arriba en el intervalo $]1, \infty[$. **(5 puntos)**

   b) **Falso:** Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{1/\operatorname{sen}(x)}$, el cálculo de éste límite requiere analizar una indeterminación del tipo $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

   Aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\cot(x) \cdot \csc(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot -\tan(x) = 0,$$

   de donde, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = e^0 = 1$. **(5 puntos)**

   c) **Verdadero:** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^5 + 5x^3 + x - 6$.

   Como $f(0) = -6 < 0 < 1 = f(1)$ y f es continua, entonces por el Teorema del Valor Intermedio existe $x_0 \in]0, 1[$ tal que $f(x_0) = 0$.

   Por otra parte, como $f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que f es estrictamente creciente y por lo tanto, es inyectiva y entonces el cero tiene una única pre-imagen, lo cual prueba que la solución para la ecuación es única. **(5 puntos)**

28 de Septiembre de 2018
EGG/MMO/JMG/CMJ/GAJ/HPV/jmg/cmj