Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 2
Matemática II (527114/527118)

1. Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que:

   a) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$, *b*) $e^{2x} - 2e^x - 3 > 0$.

   Solución:

   a) Como $e^{2x} = (e^x)^2$, al considerar el cambio de variable $z = e^x$, se tiene

   $$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-3) = 0 \text{ \textbf{(4 puntos)}}$$

   y dado que $z + 1 > 0$ (pues $z = e^x > 0$), entonces

   $$(z+1)(z-3) = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$$

   de donde se obtiene que $x = \ln(3)$ y por lo tanto, el conjunto solución es

   $$S = \{\ln(3)\}. \text{ \textbf{(4 puntos)}}$$

   b) Nuevamente, del cambio de variable $z = e^x$, se tiene

   $$e^{2x} - 2e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow z - 3 > 0 \Leftrightarrow z > 3 \text{ \textbf{(4 puntos)}}$$

   de donde se obtiene que $x > \ln(3)$ y por lo tanto, el conjunto solución es

   $$S =]\ln(3), +\infty[. \text{ \textbf{(3 puntos)}}$$

2. Un cultivo de bacterias posee un crecimiento exponencial, es decir, la cantidad de bacterias en el instante t es

$$A(t) = A_0 e^{kt},$$

donde A_0 es la cantidad inicial y t se mide en horas. Si inicialmente hay 100 bacterias y cinco horas más tarde hay 300, determinar:

   a) El valor de la constante k.

   b) El tiempo que deberá transcurrir para que el número de bacterias sea 900. Indicar dicho tiempo en la forma más simplificada posible.

Solución:

   a) De la condición inicial, como $A(0) = 100$, se tiene que $A_0 = 100$.

   Por otra parte, dado que $A(5) = 300$, se tiene que

$$100e^{5k} = 300,$$

   de donde $e^{5k} = 3$ y entonces $k = \dfrac{\ln(3)}{5}$. **(5 puntos)**

   b) De la parte anterior, como $A(t) = 100e^{\frac{\ln(3)}{5}t}$, se tiene que si t^* es el instante tal que $A(t^*) = 900$, entonces

$$\begin{aligned} 100e^{\frac{\ln(3)}{5}t^*} &= 900 \\ e^{\frac{\ln(3)}{5}t^*} &= 3^2 \\ \frac{\ln(3)}{5}t^* &= 2\ln(3) \\ t^* &= 10 \end{aligned}$$

   y por lo tanto, después de 10 horas se tendrán 900 bacterias. **(10 puntos)**

3. Determinar los valores de a y b en $\mathbb{R}$ tales que $(a+bi)^2 = -5-12i$, para luego resolver en $\mathbb{C}$, la ecuación

$$z^2 + (5i-4)z - 1 - 7i = 0.$$

Solución: Como $(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, entonces a y b deben satisfacer

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= -5 \quad (1) \\ ab &= -6 \quad (2) \quad \textbf{(4 puntos)} \end{aligned}$$

Al despejar b de la segunda ecuación, se tiene que $b = -\dfrac{6}{a}$, reemplazando esta expresión en la primera ecuación se obtiene que

$$(a^2+9)(a^2-4) = 0$$

y como a es real, entonces $a = \pm 2$ y $b = \mp 3$; luego, los valores son $a = -2$ y $b = 3$ o $a = 2$ y $b = -3$. **(4 puntos)**

La ecuación $z^2 + (5i-4)z - 1 - 7i = 0$ tiene soluciones dadas por

$$z = \frac{4 - 5i \pm \sqrt{-5-12i}}{2}. \quad \textbf{(2 puntos)}$$

Como las dos raíces cuadradas de $-12i - 5$ son $-2+3i$ y $2-3i$ **(4 puntos)**, entonces el conjunto solución de la ecuación cuadrática es

$$\{1-i, 3-4i\}. \quad \textbf{(4 puntos)}$$

4. Utilizar división sintética, para hallar el cuociente y el resto en

$$(x^6 - 9x^5 + 11x^4 + 26x^3 - 6x^2 - 23x - 12) : (x^2 - 2x - 3).$$

Solución: De la factorización $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, se tiene que al dividir el polinomio $p(x) := x^6 - 9x^5 + 11x^4 + 26x^3 - 6x^2 - 23x - 12$ por $x+1$ y luego dividir lo obtenido por $x - 3$ se obtendrán el cuociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ de la división indicada. **(3 puntos)**

De la tabla

1	-9	11	26	-6	-23	-12	-1
#	-1	10	-21	-5	11	12	#
1	-10	21	5	-11	-12	0	#

se obtiene que

$$p(x) = (x+1)(x^5 - 10x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 11x - 12) \text{ \textbf{(3 puntos)}}$$

y de la tabla

1	-10	21	5	-11	-12	3
#	3	-21	0	15	12	#
1	-7	0	5	4	0	#

se obtiene que

$$x^5 - 10x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 11x - 12 = (x-3)(x^4 - 7x^3 + 5x + 4) \text{ \textbf{(3 puntos)}}$$

y por lo tanto,

$$q(x) = x^4 - 7x^3 + 5x + 4 \quad \text{y} \quad r(x) = 0. \text{ \textbf{(3 puntos)}}$$

23 de mayo de 2019
EGG/egg