Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°2
Cálculo Diferencial e Integral (527104)

1. Justificando adecuadamente, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) La ecuación $2x^3 + x^2 + 4x + \cos(x) - 2 = 0$ tiene solución única en $\mathbb{R}$.

   b) El gráfico de la función f definida por $f(x) = \ln(\ln(x))$ es cóncavo hacia abajo en el intervalo $]1, +\infty[$.

   c) La función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + x & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 1$.

   d) Si f es estrictamente creciente en un intervalo I, entonces su inversa f^{-1} es también estrictamente creciente.

   Solución:

   a) **Verdadera:** Al definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + \cos(x) - 2$, se tiene que ella es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

   Dado que $f(0) = -1$ y $f(1) = 5 + \cos(1) > 0$, por el Teorema del valor intermedio, la ecuación posee al menos una solución en $]0, 1[$. Además, como $f'(x) = 6x^2 + 2x + 4 - \sin(x) = 5x^2 + (x+1)^2 + 3 - \sin(x) > 0$, se tiene que f es estrictamente creciente y por lo tanto la solución es única. **(4 puntos)**

   b) **Verdadera:** Como $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2 \ln^2(x)} (\ln(x) + 1) < 0$, pues $\ln(x) > 0$ para $x \in]1, +\infty[$, entonces G_f es cóncavo hacia abajo en $]1, +\infty[$. **(4 puntos)**

   c) **Verdadera:** $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + \cos(x) - 1}{2x} = 1$. **(4 puntos)**

   d) **Verdadera:** Si f es estrictamente creciente, entonces $f'(x) > 0 \; \forall x \in I$.

   Dado que $\dfrac{d}{dx}\left(f^{-1}(f(x))\right) = \dfrac{1}{f'(x)}$, entonces $\dfrac{d}{dx}\left(f^{-1}(f(x))\right) > 0$ y por lo tanto f^{-1} es también estrictamente creciente en I. **(4 puntos)**

2. La derivada de una función f es dada por:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{(x-4)^2}$$

Determinar:

a) extremos relativos de f, si existen.

b) intervalos de concavidad del gráfico de f.

c) puntos de inflexión del gráfico de f.

Solución:

a) Dado que $x^2-6x+12 = x^2-6x+9+3 = (x-3)^2+3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que f no posee puntos críticos y por lo tanto no tiene extremos relativos. **(4 puntos)**

b) Como $f''(x) = -\dfrac{2x(x-4)}{(x-4)^4} = -\dfrac{2x}{(x-4)^3}$, de la tabla

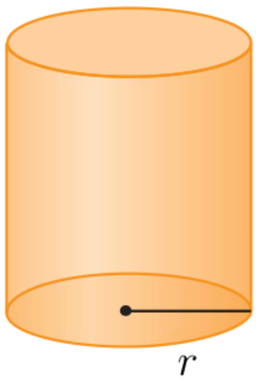
x		0		4	
$x-4$	$-$	0	$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$

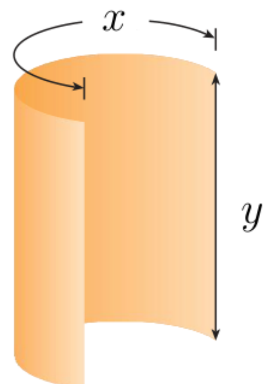
se tiene que el gráfico de f es cóncavo hacia abajo en $]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$ y hacia arriba en $]0, 4[$. **(4 puntos)**

c) El punto $(0, f(0))$ es de inflexión para el gráfico de f y en el caso en que f esté definida en $x = 4$ (y sea continua en dicho punto), entonces $(4, f(4))$ también es punto de inflexión. **(4 puntos)**

3. Un cilindro se construye pegando dos lados de un rectángulo cuyo perímetro es igual 36 centímetros. Determinar las dimensiones de los lados del rectángulo de modo que el volumen del cilindro sea máximo. Calcular dicho valor y justificar por qué él corresponde efectivamente a un máximo absoluto.

Solución: Sean x e y los lados del rectángulo, al pegar los lados de longitud y se obtiene un cilindro de altura y y con perímetro en la base igual a x.





Como el radio del cilindro es $r = x/2\pi$, entonces el volumen está dado por

$$V = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 y. \textbf{ (4 puntos)}$$

Por otra parte, como $2x + 2y = 36$, se tiene que $y = 18 - x$ y por lo tanto, el problema es hallar es máximo absoluto para

$$V(x) = \frac{18x^2 - x^3}{4\pi}, \text{donde } 0 \leq x \leq 18. \textbf{ (4 puntos)}$$

Como para $x \in \,]0, 18[$ se tiene que $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 36x - 3x^2 = 0$, entonces el único punto crítico para V en $]0, 18[$ es $x_0 = 12$ y por lo tanto, aplicando el Teorema de los valores extremos, para obtener el máximo absoluto, basta comparar los valores de V en 0, 12 y 18. **(4 puntos)**

Dado que $V(0) = V(18) = 0$ y $V(12) = \dfrac{216}{\pi}$, el valor máximo para el volumen es $\dfrac{216}{\pi}$ y él se alcanza cuando los lados del rectángulo son $x = 12$ e $y = 6$. **(4 puntos)**

Observaciones: Por tratarse de un problema de máximos y mínimos absolutos:

- Una alternativa es haber considerado $V(x) = (18x^2 - x^3)/4\pi$, con $0 < x < 18$ y mostrar que $V'(x) > 0$ $\forall x \in \,]0, 12[$ y $V'(x) < 0$ $\forall x \in \,]12, 18[$.
- **No** es válido aquí, aplicar el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada para **extremos relativos**.

4. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \cos(\ln(x))\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)+\tan(x)\right)dx$

Solución:

a) Con $t=\ln(x)$, se tiene que $e^t\,dt = dx$ e integrando por partes dos veces,

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln(x))\,dx &= \int e^t\cos(t)\,dt \ \textbf{(2 puntos)}\\ &= e^t\sin(t)-\int e^t\sin(t)\,dt \ \textbf{(2 puntos)}\\ &= e^t\sin(t)+e^t\cos(t)-\int e^t\cos(t)\,dt \ \textbf{(2 puntos)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int e^t\cos(t)\,dt = \frac{e^t}{2}(\sin(t)+\cos(t))+C$

luego, $\displaystyle\int \cos(\ln(x))dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln(x))+\cos(\ln(x)))+C.$ **(2 puntos)**

b) $\displaystyle\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)+\tan(x)\right)dx = \int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)\right)dx + \int \tan(x)\,dx$

Para la primera integral, como $\sec^2(x)=\tan^2(x)+1$, al considerar el cambio de variable $z=\tan(x)$, dado que $dz=\sec^2(x)\,dx$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)\right)dx &= \int \left(\tan^4(x)+\tan^2(x)\right)\sec^2(x)\,dx\\ &= \frac{z^5}{5}+\frac{z^3}{3}+C\\ &= \frac{1}{5}\tan^5(x)+\frac{1}{3}\tan^3(x)+C \ \textbf{(4 puntos)}\end{aligned}$$

Para la segunda integral, haciendo una sustitución simple, se tiene

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\tan(x)}{\sec(x)}\sec(x)\,dx = \ln|\sec(x)|+C \ \textbf{(2 puntos)}$$

y entonces

$$\int \left(\sec^4(x)\tan^2(x)+\tan(x)\right)dx = \frac{1}{5}\tan^5(x)+\frac{1}{3}\tan^3(x)+\ln|\sec(x)|+C. \ \textbf{(2 puntos)}$$

24 de Octubre de 2018
EGG/JOF/egg