Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°2
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. Calcular, si existe(n), en cada caso:

   a) El valor del término independiente de x en el desarrollo del binomio $\left(6x - \dfrac{1}{2x}\right)^{10}$

   b) Los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $5k+1$, $4k-4$ y $3k-5$ son tres términos consecutivos de una progresión geométrica.

   Solución:

   a) Como en el desarrollo del binomio $(a+b)^n$, el término del $k-$ésimo está dado por $t_{k+1} = \dbinom{n}{k} a^{n-k} b^k$, en este caso, considerando $a = 6x$, $b = -\dfrac{1}{2x}$ y $n = 10$ se tiene que

$$t_{k+1} = \binom{10}{k} (6x)^{10-k} \left(-\frac{1}{2x}\right)^k = \binom{10}{k} 6^{10-k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^{10-2k}$$

   y por lo tanto, t_{k+1} no depende de x, cuando $10-2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$. **(4 puntos)**

   De lo anterior, el término independiente de x es

$$t_6 = \binom{10}{5} \cdot (-3)^5 = -61236. \text{ **(3 puntos)**}$$

   b) Sean $a_1 = 5k+1$, $a_2 = 4k-4$ y $a_3 = 3k-5$, los tres términos en progresión geométrica, como $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} \Leftrightarrow \dfrac{4k-4}{5k+1} = \dfrac{3k-5}{4k-4}$ **(4 puntos)**, se tiene que

$$\begin{aligned} (4k-4)^2 &= (5k+1)(3k-5) \\ k^2 - 10k + 21 &= 0 \\ (k-3)(k-7) &= 0 \end{aligned}$$

   y por lo tanto, los valores pedidos son $k = 3$ y $k = 7$. **(4 puntos)**

2. Utilizar el Principio de Inducción Matemática para demostrar que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)},\ \forall n\geq 1.$$

Solución: Al definir la función proposicional $p(n)$ por

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

para usar Inducción Matemática, se tiene que

i) $p(1)$ es verdadera pues $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 3}$. **(2 puntos)**

ii) La hipótesis inductiva afirma que

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$ **(2 puntos)**

y la tesis inductiva afirma que

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}.$$ **(3 puntos)**

iii) Al considerar la igualdad dada por la hipótesis y sumar $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ a ambos lados, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i(i+1)(i+2)} &= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}\\ &= \frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}\\ &= \frac{k^3+2k^2+k+4k^2+8k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}\\ &= \frac{k(k+1)^2+4(k+1)^2}{4(k+1)(k+2)(k+3)}\\ &= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}.\end{aligned}$$ **(6 puntos)**

De lo anterior, por el Principio de Inducción Matemática, se ha probado que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)},\ \forall n\geq 1.$$ **(2 puntos)**

3. Considerar la hipérbola y la parábola, definidas por

$$9x^2 - 72x - 4y^2 + 48y - 36 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + 8x + 8y + 16 = 0\,.$$

   a) Indicar el centro C de la hipérbola y el vértice V de la parábola.

   b) Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de C y de V.

   c) Calcular el área la región del primer cuadrante que está encerrada por el lugar geométrico de la parte *b*) y los ejes coordenados.

Solución:

a) Como

$$9x^2 - 72x - 4y^2 + 48y - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{9} = 1,$$

se observa que el centro de la hipérbola está en $C = (4, 6)$. **(3 puntos)**

Por otra parte, como

$$x^2 + 8x + 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 = -8y,$$

se observa que el vértice de la parábola es $V = (-4, 0)$. **(2 puntos)**

b) Sea $P = (x, y)$ un punto en el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de C y de V, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} &= \sqrt{(x+4)^2 + y^2} \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 &= x^8 + 8x + 16 + y^2 \\ 4x + 3y &= 9. \end{aligned}$$ **(5 puntos)**

c) La recta L, de ecuación $4x + 3y = 9$, intersecta al eje x en el punto $(9/4, 0)$ e intersecta al eje y en el punto $(0, 3)$.

De lo anterior, si T es la región acotada por L y los ejes coordenados, se tiene que T es un triángulo cuya base mide $9/4$ unidades de longitud y cuya altura mide 3 unidades de longitud, de donde

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8} \text{ unidades cuadradas de longitud.}$$ **(5 puntos)**

4. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$f(x) = 3\sqrt{4x - x^2 - 3}.$$

Determinar, de manera analítica, dominio y recorrido.

Solución: De la definición de dominio, se tiene

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : 4x - x^2 - 3 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-3) \leq 0\} \\ &= [1, 3]\,. \ \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de recorrido, se tiene

$$\begin{aligned} R_g &= \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in D_f,\ y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [1,3]\,,\ y = 3\sqrt{4x - x^2 - 3}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in [1,3]\,,\ y^2 = 9\left(1 - (x-2)^2\right),\ y \geq 0\right\} \ \textbf{(4 puntos)} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : |x-2| = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \leq 1,\ y \geq 0\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 3,\ y \geq 0\} \\ &= [0, 3]\,. \ \textbf{(6 puntos)} \end{aligned}$$

8 de Mayo de 2018
JUA/EGG/MWC/egg