Pauta-Evaluación 2

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA UNIVERSITARIA - 520145

1) (15 Pts) Usando el principio de inducción matemática, demuestre que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}: \ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Solución sugerida:

Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N}: \ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right\}$. Se sigue que

a) $1 \in S$, porque $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$;

b) Supongamos que $k \in S$, es decir

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}. \tag{1}$$

c) Probar que $k+1 \in S$. Es decir, probar que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

[**5 pts**]

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 \quad &= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3, \ \text{Hipótesis de inducción (1)} \\
&= (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1 \right] \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4k+4) = \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2.
\end{aligned}$$

Con lo cual, $k+1 \in S$.

[**8 pts**]

Así por el Principio de Inducción matemática se cumple que $S = \mathbb{N}$, es decir:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

[**2 pts**]

2) (20 Pts)

a) (**15 pts**) Considere los puntos $A(0,0)$ y $B(2,0)$. Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano tales que las rectas que pasan por A y P y por B y P sean perpendiculares.

Solución sugerida:
La recta que pasa por el punto $P(x,y)$ y $A(0,0)$ tiene la forma

$$L_1: \ y - 0 = m_1(x - 0).$$

Mientras que la recta que pasa por $P(x,y)$ y $B(2,0)$ se expresa como

$$L_2: \ y - 0 = m_2(x - 2).$$

Como estas rectas son perpendiculares, sus pendientes deben cumplir que $m_1 \cdot m_2 = -1$, es decir,

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 = -1 \quad &\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x-2}\right) = -1 \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 2 \qquad [\mathbf{9pts}] \\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{x(x-2)} = -1 \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \wedge \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 2 \end{aligned}$$

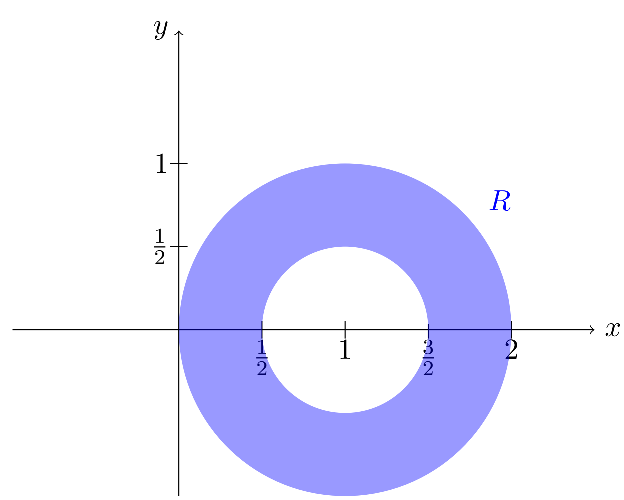
Es decir, el lugar geométrico corresponde a una circunferencia centrada en $(1,0)$ y de radio 1, excluyendo los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$.

[**6 pts**]

b) (**5 pts**) Dibuje la región del plano

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ \frac{1}{4} \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Solución sugerida:



3) (25 Pts) Considere la función real f definida por $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x-3}{11-7x}}$.

a) (**5 pts**) Determine el dominio de f.
Solución sugerida:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in R) \wedge y = f(x)\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : (\exists y \in R) \wedge y = \sqrt{\frac{4x-3}{11-7x}}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{4x-3}{11-7x} \geq 0 \wedge 11-7x \neq 0\right\} \\
&= \left[\frac{3}{4}, \frac{11}{7}\right[
\end{aligned}$$

ya que,

$$\begin{aligned}
\frac{4x-3}{11-7x} \geq 0 &\iff [(4x-3 \geq 0 \wedge 11-7x > 0) \vee (4x-3 \leq 0 \wedge 11-7x < 0)] \\
&\iff \left[\left(x \geq \frac{3}{4} \wedge \frac{11}{7} > x\right) \vee \left(x \leq \frac{3}{4} \wedge \frac{11}{7} < x\right)\right] \\
&\iff \left[\left(x \geq \frac{3}{4} \wedge \frac{11}{7} > x\right) \vee (F)\right] \\
&\iff \left[\frac{11}{7} > x \geq \frac{3}{4}\right].
\end{aligned}$$

b) (**5 pts**) Muestre que f es inyectiva.
Solución sugerida:
Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\iff \sqrt{\frac{4x_1-3}{11-7x_1}} = \sqrt{\frac{4x_2-3}{11-7x_2}} \\
&\implies \frac{4x_1-3}{11-7x_1} = \frac{4x_2-3}{11-7x_2} \\
&\iff (4x_1-3)(11-7x_2) = (4x_2-3)(11-7x_1) \\
&\iff 44x_1 - 21x_1 = 44x_2 - 21x_2 \\
&\iff x_1 = x_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es inyectiva.

c) (**10 pts**) Determine el recorrido de f.
Solución sugerida:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in R) \wedge y = f(x)\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in R) \wedge y = \sqrt{\frac{4x-3}{11-7x}} \wedge y \geq 0\right\} \qquad [\mathbf{1pto}] \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in R) \wedge y = \sqrt{\frac{4x-3}{11-7x}} \wedge y \geq 0\right\} \\
&= [0, +\infty[
\end{aligned}$$

ya que,

$$\begin{aligned} y = \sqrt{\frac{4x-3}{11-7x}} \quad &\Longleftrightarrow \quad y^2 = \frac{4x-3}{11-7x} \\ &\Longleftrightarrow \quad 11y^2 - 7xy^2 = 4x - 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 11y^2 + 3 = x(4 + 7y^2) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{11y^2+3}{4+7y^2} = x \end{aligned}$$

Como el x debe pertenecer al dominio, se obtienen las desigualdades

i) $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{11y^2+3}{4+7y^2}$. Equivalentemente, se tiene $12 + 21y^2 \leq 44y^2 + 12$. Desigualdad que se cumple independiente de los valores que toma la variable y.

ii) $\dfrac{11y^2+3}{4+7y^2} < \dfrac{11}{7}$. Equivalentemente, se tiene $77y^2 + 21 < 44 + 77y^2$.Desigualdad que se cumple independiente de los valores que toma la variable y.

Por lo tanto, la única restricción que debe satisfacer y es ser mayor o igual a cero.

d) (**5 pts**) Determine, si existe, la inversa de f. Si no existe, defina una restricción adecuada y defina su inversa. **Justifique todas sus afirmaciones**.

Solución sugerida:

De la parte b) sabemos que la función $f : \left[\frac{3}{4}, \frac{11}{7}\right[\subseteq \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ es inyectiva y posee inversa, la cual se define por

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0, +\infty[\quad &\to \quad \left[\frac{3}{4}, \frac{11}{7}\right[\\ y \quad &\mapsto \quad f^{-1}(y) = \frac{11y^2+3}{4+7y^2}. \end{aligned}$$