Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 2
Cálculo III (2025)

1. Determinar el valor de la integral doble

$$\int_0^2 \int_{x^2/4}^1 xe^{y^2}\, dy\, dx$$

mediante un cambio en el orden de integración.

Solución: Dado que la región de integración puede describirse por

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 2\sqrt{y} \end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x^2/4}^1 xe^{y^2}\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{y}} xe^{y^2}\, dx\, dy \ \textbf{(6 puntos)} \\ &= e - 1. \ \textbf{(6 puntos)} \end{aligned}$$

2. Calcular el volumen del sólido D que se encuentra acotado superiormente por el cilindro parabólico de ecuación $z = 4 - y^2$, inferiormente por el plano xy y que está entre los planos verticales de ecuaciones $x + y = 2$ y $x + y = 6$.

Solución: La proyección de D en el plano xy está determinada por

$$\begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ 2 - y \leq x \leq 6 - y \end{cases}$$

y por lo tanto, el volumen es

$$\begin{aligned} V(D) &= \int_{-2}^2 \int_{2-y}^{6-y} (4 - y^2)\, dx\, dy \ \textbf{(8 puntos)} \\ &= \frac{128}{3}. \ \textbf{(8 puntos)} \end{aligned}$$

3. Determinar el valor de la integral triple

$$\iiint\limits_{R} xyz\, d(x,y,z),$$

donde R es la región del primer octante acotada por los cilindros hiperbólicos de ecuaciones $xy = 1$, $xy = 3$, $xz = 2$, $xz = 6$, $yz = 3$ e $yz = 12$.

Solución: Considerando $1 \leq u := xy \leq 3$, $2 \leq v := xz \leq 6$ y $3 \leq w := yz \leq 12$, como $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\dfrac{1}{2xyz}$ **(3 puntos)**, del Teorema del cambio de variables,

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{R} xyz\, d(x,y,z) &= \frac{1}{2}\int_1^3 \int_2^6 \int_3^{12} 1\, dw\, dv\, du \ \textbf{(6 puntos)} \\ &= 36. \ \textbf{(3 puntos)}\end{aligned}$$

4. Calcular, por medio de una integral triple y un cambio de variables adecuado, el volumen del sólido S acotado superiormente por el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ e inferiormente por la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$.

Solución: De las ecuaciones del cono y de la esfera se tiene que $z = 3$ y que $x^2 + y^2 = 9$, de donde, la proyección de S en el plano xy corresponde al círculo determinado por $x^2 + y^2 \leq 9$. **(5 puntos)**

Utilizando coordenadas cilíndricas, dado que la ecuación del cono es $z = r$ y la de la parte inferior de la esfera es $z = 3 - \sqrt{9 - r^2}$, se tiene que el volumen de S está dado por

$$\begin{aligned}V(S) &= \iiint\limits_{S} 1\, d(x,y,z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{3-\sqrt{9-r^2}}^{r} r\, dz\, dr\, d\theta \ \textbf{(10 puntos)} \\ &= 9\pi. \ \textbf{(5 puntos)}\end{aligned}$$

<u>Observación</u>: Utilizando coordenadas esféricas, dado que la ecuación del cono es $\phi = \pi/4$ y la de la esfera es $\rho = 6\cos(\phi)$, se tiene que el volumen es

$$V(S) = \iiint\limits_{S} 1\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{6\cos(\phi)} \rho^2 \sin(\phi)\ d\rho\, d\phi\, d\theta = 9\pi.$$

21 de Enero de 2019
EGG/egg