Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°1
Cálculo II (527148)

1. La *ley de enfriamiento* de Newton señala que la razón de cambio de la temperatura T de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre esa temperatura T y la temperatura T^*(constante) del medio que los rodea. Esto es, si la temperatura T es una función derivable que depende del tiempo t entonces

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T^*\right),$$

donde k es una constante. Un termómetro que marca $70°F$ se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante de $390°F$. Por una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que después de medio minuto el termómetro marca $110°F$. Determinar el tiempo que tardó el termométro en marcar $145°F$ una vez puesto en el horno.

Solución: Como $\left(\dfrac{1}{T-T^*}\right)\dfrac{dT}{dt} = k$ y $\dfrac{d}{dt}\ln|T-T^*| = \left(\dfrac{1}{T-T^*}\right)\dfrac{dT}{dt}$, entonces

$$\frac{d}{dt}\ln|T-T^*| = k.$$

Integrando, se tiene que

$$\int \frac{d}{dt}\ln|T-T^*|\ dt = \int k\ dt,$$

de donde $\ln|T-T^*| = kt + C$ y por lo tanto, si $C_1 = e^C$, para $T(t) < T^*$, la temperatura T en función del tiempo t (medido en segundos) está dada por

$$T(t) = T^* - C_1 e^{kt}. \textbf{ (10 puntos)}$$

Considerando que $T^* = 390$, $T(0) = 70$ y $T(30) = 110$ se obtiene que $C_1 = 320$ y $k = \dfrac{\ln(7/8)}{30}$, luego

$$T(t) = 390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}t}. \textbf{ (6 puntos)}$$

Si $\tilde{t}$ representa el tiempo en que la temperatura es $145°F$, entonces

$$390 - 320e^{\frac{\ln(7/8)}{30}\tilde{t}} = 145,$$

de donde se obtiene que $\tilde{t} = 60$ y por lo tanto, el termómetro tardó un minuto en marcar $145°F$. **(4 puntos)**

2. Determinar justificadamente, la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\displaystyle\int_x^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)dt}{x-2} = -\dfrac{\pi}{6}$.

   Respuesta: La afirmación es verdadera, como

   $$\lim_{x\to 2}\int_x^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)dt = \lim_{x\to 2}(x-2) = 0,$$

   entonces el límite propuesto, es una forma indeterminada. Aplicando el Teorema fundamental del Cálculo, junto con la Regla de L'Hôpital, se obtiene

   $$\lim_{x\to 2} \frac{\displaystyle\int_x^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)dt}{x-2} \overset{\text{(L'H)}}{=} \lim_{x\to 2}\left[-\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{\pi}{6}.$$ **(8 puntos)**

   b) Si $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 5$, entonces $\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{t}{2}\right)dt = 10$.

   Respuesta: La afirmación es verdadera, del cambio de variable $u = \dfrac{t}{2}$, se tiene

   $$\int_0^2 f\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2\int_0^1 f(u)du = 2\cdot 5 = 10.$$ **(8 puntos)**

   c) La integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x^2-x)^5}\,dx$ es divergente.

   Respuesta: La afirmación es falsa, utilizando el criterio de comparación en el límite, con respecto a la integral convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^9}\,dx$, dado que

   $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x/(2x^2-x)^5}{1/x^9}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{10}}{(2x^2-x)^5}\right] = \frac{1}{32} > 0,$$

   se tiene que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(2x^2-x)^5}\,dx$ es convergente. **(9 puntos)**

3. Calcular el área de la región del plano que se encuentra sobre el eje x y bajo la curva $y = \dfrac{e^x}{e^{2x}+9}$, entre $x=0$ y $x=\ln 3$.

Solución: El área de la región está dada por $A = \displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$. **(5 puntos)**

Del cambio $u = e^x$, se obtiene que

$$A = \frac{1}{3}\left[\operatorname{Arctan}\frac{x}{3}\right]\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}\right)$$ **(10 puntos)**

16 de Abril de 2018
EBC/EGG/GCA