Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación N°1
Cálculo I (527147)

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)$

   Solución:

   a) Al considerar la sustitución $y^6 = 1+x$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1}\\ &= \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1}\\ &= \frac{3}{2} \ \textcolor{red}{\textbf{(8 puntos)}}\end{aligned}$$

   b) Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{2x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{7}{x}} = \frac{3}{2}$

   y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+8x}+x}{\sqrt{x^2+8x}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}+1}\\ &= 4,\end{aligned}$$

   se tiene, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{2x+7}\left(\sqrt{x^2+8x}-x\right) = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6.$ **(8 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} & , \quad x < 1 \\ x^3 - 5x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

donde k es una constante real.

a) Determinar el valor de k para el cual f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Encontrar una asíntota horizontal del gráfico de f.

c) Demostrar que existe $x_0 \in [2,3]$, tal que $f(x_0) = 10$.

Solución:

a) La función f es continua tanto para $x > 1$ como para $x < 1$, pues en ambos casos corresponde a una combinación de funciones continuas.

Para que f sea continua en 1, debe tenerse

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = -3.$$

Se calculan los correspondientes límites laterales

- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{k-7}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 - 5x + 1) = -3.$

Entonces, dado que

$$\frac{k-7}{2} = -3 \Leftrightarrow k = 1,$$

se concluye que f es continua en $\mathbb{R}$ si y solo si $k = 1$. **(5 puntos)**

b) Se observa que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{k - 7x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(\dfrac{k}{x} - 7\right)}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{3}{x^2}}} = 7.$$

Por lo tanto, la recta de ecuación $y = 7$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f. **(5 puntos)**

c) Para todo $x \in [2,3]$ se tiene $f(x) = x^3 - 5x + 1$, la cual es una función continua. Dado que $f(2) = -1 < 10$ y $f(3) = 13 > 10$, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que existe $x_0 \in [2,3]$ tal que $f(x_0) = 10$. **(5 puntos)**

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 + x + 1 & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcular $f'(x)$, en cada punto donde exista.

b) Calcular $f''(x)$ para $x \neq 0$.

Solución:

a) Para $x \neq 0$, de las reglas de derivación, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot -\frac{1}{x^2} + 2x + 1 \\ &= 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x + 1. \ \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

Para $x = 0$, por definición

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x + 1 \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

pues, si $x \neq 0$, entonces es válida la desigualdad $\left| x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$. **(6 puntos)**

b) Para $x \neq 0$, de las reglas de derivación y de la parte anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} + 2 \\ &= 6x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2. \ \textbf{(5 puntos)} \end{aligned}$$

4. Dada la curva C en $\mathbb{R}^2$, determinada por la ecuación

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - x - y = 0,$$

encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos donde la curva intersecta al eje y.

Solución: Para encontrar los puntos en que C intersecta al eje y, se reemplaza $x = 0$ en la ecuación de la curva, obteniendo

$$\frac{1}{4}y^2 - y = 0,$$

la cual se satisface para $y = 0$ e $y = 4$. Entonces los puntos de intersección buscados son $(0, 0)$ y $(0, 4)$. **(4 puntos)**

Por otro lado, al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y\frac{dy}{dx} - 1 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x - y}{x + \frac{1}{2}y - 1}.$$ **(5 puntos)**

Por lo tanto

- En $(x, y) = (0, 0)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -1$. La recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -x$.
- En $(x, y) = (0, 4)$, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = -3$. La recta tangente a la curva en este punto tiene ecuación $y = -3x + 4$. **(4 puntos)**

10 de Agosto de 2018
EGG/MMO/JMG/CMJ/GAJ/HPV/egg/mmo