Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 1
Matemática II (527114/527118)

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(t+4)=6t^2+49t+106$.

   a) Determinar la expresión que define a $f(x)$.

   b) Hallar el conjunto $f^{-1}(8)$ e indicar si f es inyectiva.

   Solución:

   a) Al considerar $x=t+4$, dado que $f(t+4)=6t^2+49t+106$, se tiene

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 6(x-4)^2+49(x-4)+106\\
&= 6x^2+x+6. \ \textbf{(5 puntos)}
\end{aligned}
$$

   b) Dado que

$$
\begin{aligned}
f(x)=8 \ &\Leftrightarrow\ 6x^2+x+6=8\\
&\Leftrightarrow\ 6x^2+x-2=0\\
&\Leftrightarrow\ (3x+2)(2x-1)=0,
\end{aligned}
$$

   se obtiene que $f^{-1}(8)=\left\{-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}$. **(5 puntos)**

   Como $f\left(-\frac{2}{3}\right)=0=f\left(\frac{1}{2}\right)$, f no es inyectiva pues a la imagen 0 le corresponden dos pre-imágenes distintas, $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$. **(5 puntos)**

2. Sea f una función real de dominio igual a todo $\mathbb{R}$. Demostrar que:

   a) La función f_p definida por $f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, es par.

   b) La función f_i definida por $f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, es impar.

   c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$.

   Además dar ejemplos, justificadamente, de una función que sea par y no sea impar, de una función que sea impar y no sea par y de una función que sea par e impar.

   Solución:

   a) Como $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que

   $$f_p(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = f_p(x),$$

   entonces f_p es función par. **(2 puntos)**

   b) Como $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que

   $$f_i(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -f_i(x),$$

   entonces f_i es función impar. **(2 puntos)**

   c) $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene

   $$\begin{aligned} f_p(x) + f_i(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(-x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$ **(2 puntos)**

   Por otra parte, ejemplos de una función que sea par y no sea impar, de una función que sea impar y no sea par y de una función que sea par e impar, son los siguientes:

   - La función definida por $f(x) = x^2$ es par pues

     $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

     y no es impar pues $f(-2) = 4 \neq -f(2) = -4$. **(3 puntos)**

   - La función definida por $f(x) = x^3$ es impar pues

     $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

     y no es par pues $f(-2) = -2 \neq f(2) = 2$. **(3 puntos)**

   - La función definida por $f(x) = 0$ es par e impar pues

     $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = 0 = f(x).$$ **(3 puntos)**

3. Sea $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{7 - x^2 - 6x}$. Considerar restricciones adecuadas en su dominio y codominio de modo de obtener una nueva función que resulte biyectiva, justificar este hecho y luego determinar la función inversa correspondiente.

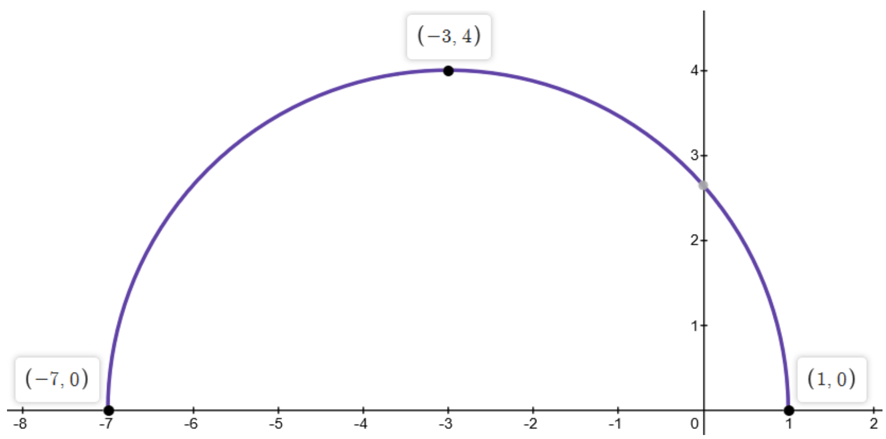
Solución: De la definición de dominio, se tiene que

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : (x+7)(x-1) \leq 0\} = [-7, 1]\,. \text{ \textbf{(3 puntos)}}$$

Por otra parte, de la definición de recorrido, se tiene que

$$\begin{aligned} R_f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f,\ y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-7,1]\,,\ y = \sqrt{7 - x^2 - 6x}\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [-7,1]\,,\ (x+3)^2 + y^2 = 16,\ y \geq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : |x+3| = \sqrt{16 - y^2} \leq 4,\ y \geq 0\right\} \\ &= [0, 4]\,. \text{ \textbf{(3 puntos)}} \end{aligned}$$

El dominio y recorrido antes obtenidos pueden observarse en el gráfico



Al considerar como codominio al conjunto $R_f = [0, 4]$ se obtiene una función sobreyectiva **(1 punto)** y además, restringiendo el dominio al conjunto $D = [-3, 1]$ se obtiene la inyectividad pues $\forall a,\, b \in D$:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow \sqrt{7 - a^2 - 6a} = \sqrt{7 - b^2 - 6b} \\ &\Rightarrow (a+3)^2 = (b+3)^2 \\ &\Rightarrow |a+3| = |b+3| \\ &\Rightarrow a = b. \text{ \textbf{(3 puntos)}} \end{aligned}$$

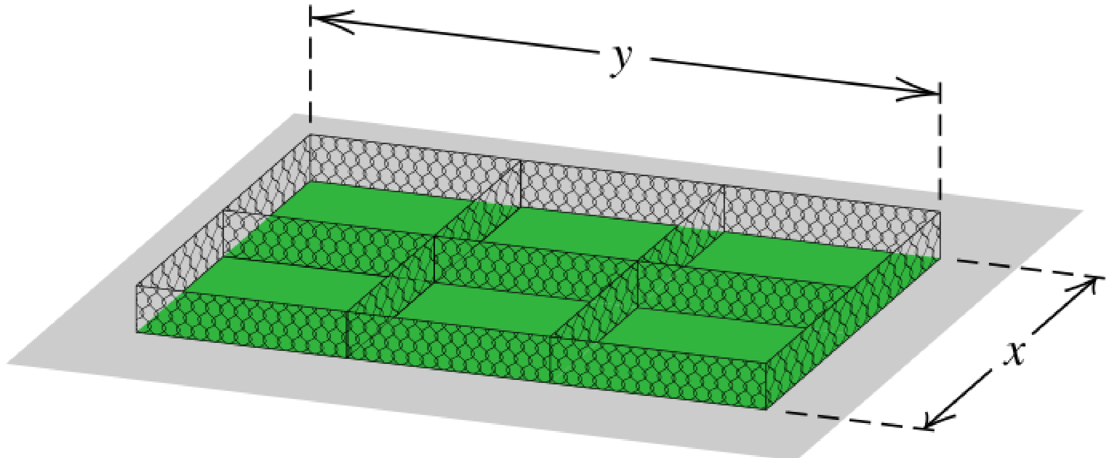
De lo anterior, una restricción para f es la nueva función

$$\begin{aligned} g : [-3, 1] \subseteq \mathbb{R} &\to [0, 4] \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{7 - x^2 - 6x} \end{aligned}$$

la cual es biyectiva **(2 puntos)** y cuya inversa es

$$\begin{aligned} g^{-1} : [0, 4] \subseteq \mathbb{R} &\to [-3, 1] \\ x &\mapsto g^{-1}(x) = \sqrt{16 - x^2} - 3. \text{ \textbf{(3 puntos)}} \end{aligned}$$

4. Mil doscientos metros de tela de alambre se van a utilizar para construir seis divisiones de un terreno, como se ve en la figura



a) Expresar el largo y como función del ancho x.
b) Expresar el área total A del terreno como una función en términos de x.
c) Hallar las dimensiones que maximizan el área A.

Solución:

a) Dado que se dispone de mil doscientos metros de tela de alambre se tiene que

$$4x + 3y = 1200,$$

de donde $y = 400 - \frac{4}{3}x$. **(4 puntos)**

b) El área del terreno es xy metros cuadrados y como $y = 400 - \frac{4}{3}x$, dicha área en términos de x está determinada por

$$A(x) = x\left(400 - \frac{4}{3}x\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 400x. \textbf{ (4 puntos)}$$

c) Identificando A como una función cuadrática con coeficientes $a = -\frac{4}{3}$, $b = 400$ y $c = 0$ **(3 puntos)**, se tiene que tiene el valor máximo se alcanza cuando $x = -\frac{b}{2a} = 150$ y como para este valor de x se obtiene que $y = 200$, entonces las dimensiones que maximizan el valor de A son

$$x = 150\,\text{metros e } \ y = 200\,\text{metros.} \textbf{ (4 puntos)}$$

30 de abril de 2019
EGG/egg