Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Evaluación N°1
Cálculo Diferencial e Integral (527104)

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_n = \sqrt{n^6+n^3} - \sqrt{n^6-n^2}$$

   a) Mostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos no negativos.

   b) Sabiendo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, mostrar que ella es convergente. Luego, calcular su límite.

Solución:

a) Sea $n \in \mathbb{N}$, dado que $n^3 + n^2 \geq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} n^6+n^3 &\geq n^6-n^2 \\ \sqrt{n^6+n^3} &\geq \sqrt{n^6-n^2} \\ \sqrt{n^6+n^3} - \sqrt{n^6-n^2} &\geq 0, \end{aligned}$$

de donde, $\forall n \in \mathbb{N}$ se obtiene que $a_n \geq 0$ y por lo tanto a_n es una sucesión de términos no negativos. **(5 puntos)**

b) Como a_n es decreciente y acotada inferiormente (pues $a_n \geq 0$), entonces por el Teorema de la Sucesión Monótona, ella es convergente. **(5 puntos)**

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^6+n^3} - \sqrt{n^6-n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^6+n^3-(n^6-n^2)}{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^2}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+1/n^2}{\sqrt{1+1/n^3}+\sqrt{1-1/n^4}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(5 puntos)

2. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ c + \sqrt{x-1} & , \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Determinar los valores de a, b y c de modo que f sea derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$.

Solución:

De la condición $f(0) = f(5)$, se obtiene que $c = -2$. **(4 puntos)**

Por otro lado, dado que f debe ser continua en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la continuidad para f en $x_0 = 2$. **(2 puntos)** Para que f sea continua en $x_0 = 2$, debe tenerse que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ y por lo tanto

$$4a + 2b = -1 \text{ \textbf{(4 puntos)}} \tag{1}$$

De manera similar a lo anterior, dado que f debe ser derivable en $]0,5[$ y lo es en $]0,2[$ y en $]2,5[$, basta analizar la derivabilidad de f en $x_0 = 2$. **(2 puntos)**

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{a(x^2-4) + b(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} a(x+2) + b = 4a + b$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \dfrac{1}{2}$, entonces $f'(2)$ existe si y sólo si

$$4a + b = \frac{1}{2}. \text{ \textbf{(4 puntos)}} \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2), se obtiene que $a = \dfrac{1}{2}$ y $b = -\dfrac{3}{2}$.

Así, f es derivable en $]0,5[$ y $f(0) = f(5)$ si

$$a = \frac{1}{2}, \; b = -\frac{3}{2} \text{ y } c = -2. \text{ \textbf{(4 puntos)}}$$

3. Justificando adecuadamente, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}} = +\infty$

   b) La recta $y=-2$ es asíntota horizontal del gráfico de la función f definida por $f(x) = x - \sqrt{x^2+4x-1}$.

   c) $x-4y-8=0$ corresponde a la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ en el punto de abcisa 2.

Solución:

a) Definiendo $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}}$, para $x \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1-\cos(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}\left(\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}\right)} \\ &= -\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

y por lo tanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, por lo que la afirmación es falsa. **(5 puntos)**

b) Dado que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-4x}{x+\sqrt{x^2+4x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x-4}{1+\sqrt{1+4/x-1/x^2}} = -2,$$

se tiene que $y=-2$ es asíntota horizontal del gráfico de f y la afirmación es verdadera. **(5 puntos)**

c) Como $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2}$, se tiene que la pendiente de la recta tangente al gŕafico de f en el punto $(2,0)$ es $f'(2) = \dfrac{1}{4}$ y por lo tanto la ecuación de dicha recta es

$$y - 0 = \frac{1}{4}(x-2) \Leftrightarrow x-4y-2=0$$

y la afirmación es falsa. **(5 puntos)**

4. Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$ que toma sólo valores racionales (es decir, $Rec(f) \subseteq \mathbb{Q}$). Mostrar que f es función constante.

Solución: Si f no es constante, entonces existen x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$ y

$$f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2).$$

Dada la continuidad de f en el intervalo $[x_1, x_2]$ y del hecho que entre y_1 e y_2 siempre existirá un irracional y^*, por el Teorema de Valor Intermedio, **(3 puntos)** se tiene la existencia de $x^* \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f(x^*) = y^*.$$

Como la igualdad anterior contradice la hipótesis, pues $Rec(f) \subseteq \mathbb{Q}$, entonces se tiene que f es constante. **(7 puntos)**

13 de Septiembre de 2018
EGG/JOF/egg