Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Certamen N°1
Álgebra y Trigonometría (527103)

1. **(16 puntos)** Considerar los siguientes conjuntos de números reales:

$$A = \mathbb{N} \cap [3, 8[\qquad B = [-1, 9] - [4, 8[\qquad C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 10\}$$

Determinar justificadamente el valor de verdad de los siguientes enunciados.

a) $\exists x \in \mathbb{R} \, (x \in A - B)$,
b) $\sqrt{10} \in A \to \sqrt{10} \notin C$,
c) $C \subseteq B$,
d) $\forall y \in A \, (y + 2 < 10)$.

Desarrollo: (4 puntos cada uno)

a) El valor $x = 4$ está en A (pues es un número natural **y** está en el intervalo $[3, 8[$) y no está en B (pues es removido al restar el intervalo $[4, 8[$). Así, este enunciado es **verdadero**.

b) $\sqrt{10}$ no está en A, pues no es un número natural, y tampoco está en C, pues $\left(\sqrt{10}\right)^2$ no es menor que 10. As; este enunciado queda de la forma *si falso entonces verdadero*, lo que es **verdadero**.

c) El número $x = -2$ pertenece a C (pues $4 < 10$) pero no a B (pues $-2 < -1$). Así, C no es subconjunto de B, y luego el enunciado es **falso**.

d) El conjunto A, por extensión, es $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Se puede ver que cualquiera de sus elementos, sumado 2, resulta menor que 10. Por consiguiente este enunciado es **verdadero**.

2. **(14 puntos)** Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $| - 2x + 1| = |x^2 - 8x + 15|$,
b) $\dfrac{2 + y}{y} - \dfrac{y}{2 - y} = 1$.

Desarrollo:

a) Esta igualdad entre valores absolutos se separa en dos casos.

El primer caso es aquel donde las cantidades dentro de los valores absolutos son iguales. En este caso obtenemos la ecuación $-2x + 1 = x^2 - 8x + 15$, que queda $x^2 - 6x + 14 = 0$. Esta expresión tiene discriminante negativo, y por consiguiente no tiene soluciones reales. **(3 puntos)**

El otro caso es aquel donde las cantidades dentro de los valores absolutos difieren en signo. En este caso la ecuación es $2x - 1 = x^2 - 8x + 15$, que queda

$x^2 - 10x + 16 = 0$. Esta expresión se factoriza como $(x-2)(x-8) = 0$, que tiene soluciones $x = 2$ y $x = 8$. **(3 puntos)**

Las soluciones de la ecuación original son, entonces, $x = 2$ y $x = 8$. **(1 punto)**

b) Tenemos

$$\frac{2+y}{y} - \frac{y}{2-y} = \frac{(2+y)(2-y) - y^2}{y(2-y)} = \frac{4 - y^2 - y^2}{2y - y^2}.$$

(2 puntos)

Como la ecuación iguala esta ecuación a 1, tenemos que su numerador y denominador deben ser iguales, y obtenemos la ecuación

$$4 - 2y^2 = 2y - y^2,$$

que se puede reescribir como

$$y^2 + 2y - 4 = 0.$$

(1 punto)

El discriminante de esta expresión es $\Delta = 20$, su raíz cuadrada es $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, y por consiguiente (usando la fórmula de las soluciones de una ecuación cuadrática) sus soluciones son $y = -1 + \sqrt{5}$, $y = -1 - \sqrt{5}$. **(3 puntos)**

Una simple inspección determina que ninguna de ellas anula los denominadores de la ecuación original, y por consiguiente las soluciones de la ecuación pedida son

$$y = -1 + \sqrt{5} \qquad y = -1 - \sqrt{5}.$$

(1 puntos)

3. **(15 puntos)** Resolver en los números reales

$$1 \leq |2x - 3| < 4.$$

Luego encontrar supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto solución, si existen.

<u>Desarrollo</u>:

Geométricamente, el conjunto solución de esta inecuación se encuentra como la unión de las soluciones de $1 \leq 2x - 3 < 4$ y de $-1 \geq 2x - 3 > -4$. **(7 puntos)**

Resolviendo la primera de estas, tenemos

$$1 \leq 2x - 3 < 4,$$

$$4 \leq 2x < 7,$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2}.$$

Y resolviendo la segunda,

$$-1 \geq 2x - 3 > -4,$$

$$2 \geq 2x > -1,$$
$$1 \geq x > -\frac{1}{2}.$$

Luego el conjunto solución del problema es

$$\left]-\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{7}{2}\right[.$$

(4 puntos)

Este conjunto tiene supremo $\frac{7}{2}$ e ínfimo $-\frac{1}{2}$, pero no tiene máximo ni mínimo ya que dichos valores no están contenidos en el conjunto. **(4 puntos)**

4. **(15 puntos)** Resolver en los números reales

$$\frac{2x^2+3}{x} \leq \frac{1}{2x+1} + 2x.$$

Desarrollo:

Esta inecuación equivale a

$$0 \leq \frac{1}{2x+1} + 2x - \frac{2x^2+3}{x},$$
$$0 \leq \frac{x + 2x^2(2x+1) - (2x^2+3)(2x+1)}{x(2x+1)},$$
$$0 \leq \frac{x + 4x^3 + 2x^2 - 4x^3 - 2x^2 - 6x - 3}{x(2x+1)},$$
$$0 \leq \frac{-5x-3}{x(2x+1)}.$$

(5 puntos)

Y con un análisis de signos (árbol de casos, tabla de signos, etc **(8 puntos)**) obtenemos que el conjunto solución es

$$\left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, 0\right[.$$

(2 puntos)