UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

EVALUACIÓN 1
INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA UNIVERSITARIA - 520145

1) (15P) Considere la proposición p dada por

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : (x < 3 \ \rightarrow \ 0 < x^2 < 9)$$

1.1) Determine el valor de verdad de p. Justifique.
Solución:
La proposición p es falsa, pues para $x = 0$ se tiene que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. (5 P)

1.2) Escriba la negación de p.
Solución:
La negación de la proposición p se enuncia

$$\begin{aligned} \sim [(\forall x \in \mathbb{R}) : (x < 3 \ \rightarrow \ 0 < x^2 < 9)] \ &\Leftrightarrow \ (\exists x \in \mathbb{R}) : \sim [(x \geq 3) \vee (0 < x^2 < 9)] \\ &\Leftrightarrow \ (\exists x \in \mathbb{R}) : [x < 3 \wedge (x^2 \leq 0 \vee x^2 \geq 9)] \end{aligned}$$

(10 P)

2) (15P) Si A, B y C son conjuntos, demuestre que:

2.1) $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A \cap B = A$.
Solución:
Identificamos la Hipótesis por $A \cap B^c = \emptyset$ y la Tesis por $A \cap B = A$.
En primer lugar, se tiene que $A \cap B \subseteq A$.
Por otra parte, todo elemento x de A pertenece a B, pues si $x \notin B$, se tendría que $x \in A \cap B^c$, lo cual es absurdo por Hipótesis. Luego $A \subseteq A \cap B$.
Por lo tanto $A \cap B = A$. (8 P)

2.2) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
Solución:
Partiendo del primer miembro de la igualdad y usando la propiedad

$$X - Y = X \cap Y^c,$$

se obtiene que

$$A - (B - C) = A \cap (B - C)^c = A \cap (B \cap C^c)^c.$$

Luego, usando de De Morgan y distributividad de la intersección con respecto a la unión se obtiene

$$A - (B - C) = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A - B) \cup (A \cap C),$$

como se pedía. (7 P)

3) (30P) Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$

3.1) $|2x-5| < 2 < \dfrac{x}{2x+4}$

Solución:

$x \in \mathbb{R}$ es solución de esta inecuación si y sólo si

$$(x \neq -2) \wedge (|2x-5| < 2) \wedge \left(2 < \frac{x}{2+4}\right).$$

En primer lugar,

$$|2x-5| < 2 \Leftrightarrow (-2 < 2x-5 < 2) \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto el conjunto solución de la desigualdad es $S_1 = \left]\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right[$. (7 P)

Por otra parte, se tiene que $2 < \dfrac{x}{2+4} \Leftrightarrow \dfrac{3x+8}{2x+4} < 0$. Por simple inspección de signos, se tiene que el conjunto solución de la desigualdad es $S_2 = \left]-\frac{8}{3}, -2\right[$. (7 P)

En resumen el conjunto solución S de la desigualdad propuesta es

$$S = S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

(1 P)

3.2) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x} \leq 1$.

Solución:

$x \in \mathbb{R}$ es solución de esta inecuación si y sólo si

$$\begin{aligned}
&[(x \geq -3) \wedge (x \leq 2)] \wedge \left(\sqrt{x+3} \leq 1 + \sqrt{2-x}\right) \\
\Leftrightarrow &(x \in [-3,2]) \wedge \left(x+3 \leq 1 + 2\sqrt{2-x} + 2 - x\right) \\
\Leftrightarrow &(x \in [-3,2]) \wedge \left(x \leq \sqrt{2-x}\right)
\end{aligned}$$

(5 P)

Separando en dos casos,

$$\begin{aligned}
&\left\{(x \in [-3,0[) \wedge (x \leq \sqrt{2-x})\right\} \vee \left\{\left[x \in [0,2]\right) \wedge (x \leq \sqrt{2-x}]\right\} \\
\Leftrightarrow &\{x \in [-3,0[\} \vee \left\{(x \in [0,2]) \wedge \left[x^2 \leq 2-x\right]\right\} \\
\Leftrightarrow &\{x \in [-3,0[\} \vee \{(x \in [0,2]) \wedge [(x+2)(x-1) \leq 0]\} \\
\Leftrightarrow &\{x \in [-3,0[\} \vee \{(x \in [0,2]) \wedge [x \in [-2,1]]\} \\
\Leftrightarrow &\{x \in [-3,0[\} \vee \{x \in [0,1]\}
\end{aligned}$$

(8 P)

Se deduce de lo anterior que el conjunto solución S de la desigualdad propuesta es $S = [-3,1]$. (2 P)