Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Evaluación 1
Cálculo III (2025)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+|y|} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en el origen?

b) Justificar la diferenciabilidad de f en $(2,-4)$ y luego determinar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(2,-4,3)$.

c) Determinar el valor mínimo, si existe, de la derivada direccional de f en el punto $(2,-4)$.

Solución:

a) Como para $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x| + |y|) = 0$, por Teorema del sandwich se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$ ya que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. **(4 puntos)**

b) En una vecindad abierta de V de $(2,-4)$, se tiene $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2-y}$, de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4 - 3x^2y - 2xy^2}{(x^2-y)^2} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 + 2x^2y - y^2}{(x^2-y)^2}.$$

Como las derivadas parciales de f son funciones continuas (cuocientes de polinomios con denominador no nulo) en V entonces f es de clase C^1 en V y por tanto ella es diferenciable en $(2,-4)$. **(4 puntos)**. Dado que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-4) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-4) = -\dfrac{5}{8}$, la ecuación pedida es

$$z = f(2,-4) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,-4)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-4)(y+4)$$

y el plano está determinado entonces por $5y + 8z = 4$. **(4 puntos)**

c) De la parte anterior como f es diferenciable en $(2,-4)$, la derivada direccional de f en el punto $(2,-4)$ existe en cualquier dirección $\vec{v}$, su valor es

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(2,-4) = \nabla f(2,-4) \cdot \hat{v} \text{ \textbf{(2 puntos)}}$$

y en este caso el valor mínimo, se alcanza en la dirección de $-\nabla f(2,-4)$. Dicho valor mínimo es $-\|\nabla f(2,-4)\| = -\dfrac{5}{8}$. **(4 puntos)**

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^8)}{x^2+y^8} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Schwarz, mostrar que f no es de clase C^2 en una vecindad del origen.

Solución: Si f fuese de clase C^2 en una vecindad V del origen, entonces por el Teorema de Schwarz, para cada $(x,y) \in V$, se tendría que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Dado que para cada $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = -y,$$

entonces $\displaystyle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = -1.$ **(4 puntos)**

De manera análoga, dado que para cada $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = x$$

y entonces $\displaystyle \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1.$ **(4 puntos)**

De lo anterior, como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, se tiene que f no es de clase C^2 en una vecindad del origen. **(4 puntos)**

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ y sea $w(x, y, z) = y^3 f\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$. Decidir, de manera justificada, si se satisface la relación

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 3w.$$

Solución: De la regla de la cadena, como f es diferenciable, al considerar $u = \frac{x}{y}$ y $v = \frac{z}{y}$ se tiene que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^3 \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = y^2\frac{\partial f}{\partial u} \quad \textbf{(2 puntos)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = y^3 \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = y^2\frac{\partial f}{\partial v}. \quad \textbf{(2 puntos)}$$

Por otra parte, de la regla del producto y nuevamente la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 3y^2 f(u, v) + y^3\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 3y^2 f(u, v) - xy\frac{\partial f}{\partial u} - yz\frac{\partial f}{\partial v}. \quad \textbf{(4 puntos)}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned} x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} &= xy^2\frac{\partial f}{\partial u} + 3y^3 f(u, v) - xy^2\frac{\partial f}{\partial u} - y^2 z\frac{\partial f}{\partial v} + y^2 z\frac{\partial f}{\partial v} \\ &= 3y^3 f(u, v) \\ &= 3w \end{aligned}$$

y por lo tanto, la relación indicada sí se satisface. **(4 puntos)**

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y$ y el conjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

a) Justificar adecuadamente el hecho de que f posee extremos absolutos sobre D.

b) Utilizando el criterio de la matriz hessiana, determinar la naturaleza del único punto crítico de f en el interior de D.

c) Determinar los valores extremos absolutos de f sobre D.

Solución:

a) Dado que f es continua y D es compacto, entonces por el Teorema de los valores extremos, f posee extremos absolutos sobre D. **(4 puntos)**

b) El único punto crítico de f en el interior de D es $P_1 = (1, 1)$. Dado que $H(f(P_1)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, se tiene que $\triangle_1 > 0$ y $\triangle_2 > 0$, por lo tanto P_1 es un punto de mínimo relativo. **(4 puntos)**

c) De la parte anterior, el punto $P_1 = (1, 1)$ es candidato a extremo absoluto para f en D.

Para el lado horizontal del triángulo, con $x \in]0, 5[$, $f(x, 0) = x^2 - 2x$ tiene como único punto crítico a $x = 1$, por lo que se considera el punto $P_2 = (1, 0)$.

Para el lado oblicuo del triángulo, con $x \in]0, 5[$, $f(x, 5-x) = 3x^2 - 18x + 30$ tiene como único punto crítico a $x = 3$, por lo que se considera el punto $P_3 = (3, 2)$.

Para el lado vertical del triángulo, con $y \in]0, 5[$, $f(0, y) = 2y^2 - 4y$ tiene como único punto crítico a $y = 1$, por lo que se considera el punto $P_4 = (0, 1)$.

Dado que los extremos absolutos podrían alcanzarse en los vértices del triángulo, entonces también se consideran los puntos $P_5 = (0, 0)$, $P_6 = (5, 0)$ y $P_7 = (0, 5)$. **(7 puntos)**

Evaluando en f, se tiene que $f(P_1) = -3$, $f(P_2) = -1$, $f(P_3) = 3$, $f(P_4) = -2$, $f(P_5) = 0$, $f(P_6) = 15$ y $f(P_7) = 30$, por lo tanto el mínimo absoluto es -3 y el máximo absoluto es 30. **(3 puntos)**

14 de Enero de 2019
EGG/egg