Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Cálculo en 1 variable. Semestre I 2023.
Certamen 2: Soluciones

Problema 1. (15 pt)

Determinar la derivada de

$$f(x) = \frac{(x^2+3)^3}{(x^2+1)^2},$$

e indicar el valor de $f'(0)$.

Solución. La función no tiene singularidades, así que podemos aplicar la regla para derivar un cuociente y la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{3(x^2+3)^2 \cdot (2x) \cdot (x^2+1)^2 - (x^2+3)^3 \cdot 2(x^2+1) \cdot (2x)}{(x^2+1)^4}$$

No se pide simplificar **(10pt)**

Además, si reemplazamos $x = 0$, queda

$$f'(0) = \frac{0}{1} = 0.$$

(05pt)

Problema 2. (15 pt)

Determine los intervalos de monotonía de $f(x) = |x^2 - 1|$.

Solución. Escribiendo la función por tramos, queda

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

Luego, hay singularidades en $x = \pm 1$ y en los otros puntos se tiene que la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 1 \text{ (Positiva)} \\ -2x & \text{si } -1 < x < 1 \text{ (Positiva si } -1 < x < 0\text{. Negativa si } 0 < x < 1) \\ 2x^2 & \text{si } x \leq -1 \text{ (Negativa)} \end{cases}$$

(10pt)

Por lo tanto, los intervalos de monotonía son:

- f es creciente en $[-1, 0]$ y en $[1, +\infty[$.
- f es decreciente en $]-\infty, -1]$ y en $[0, 1]$.

(05pt)

Problema 3. (15 pt)

Analizar
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right).$$

<u>*Solución*</u>. Para usar L'Hopital manipulamos la expresión:
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}\right).$$

(05pt)

Se trata de una expresión del tipo 0/0, así que
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = e^0.$$

Así, el límite es $= 1$. **(10pt)**

Problema 4. (15 pt)

Encontrar los puntos críticos y analizar su naturaleza para $f(x) = x^2e^{-x}$.

<u>*Solución*</u>. La función no tiene puntos no regulares no puntos puntos frontera. Calculamos la derivada:
$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$$

(04pt)

Plantemaos la ecuación para los puntos críticos:
$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \iff xe^{-2}(2-x) = 0.$$

Esto lleva a los puntos críticos $x = 0$ y $x = 2$. **(05pt)**

$x = 0$ es un mínimo, pues f' cambia de negativa para $x \to 0-$ a positiva cuando $x \to 0+$. **(03pt)**

$x = 2$ es un máximo, pues f' cambia de positiva para $x \to 2-$ a negativa cuando $x \to 2+$. **(03pt)**

$x = 0$ es un mínimo absoluto porque f siempre es ≥ 0. **(02pt)Extra**

$x = 2$ no es un máximo absoluto porque f tiende a $+\infty$ cuando $x \to -\infty$. **(02pt)Extra**

Tiempo máximo: 75 minutos.