Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Cálculo en 1 variable. Semestre I 2023.
Certamen 1: pauta

Problema 1. (15 pt)

Analizar

$$\lim_{x\to 1}\left(2|x| - 5\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

Solución.

Usando que $\sqrt{x}-1 = (\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)$, vemos que

$$\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 1}\left(2|x| - 5\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(2|x| - 5\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\right).$$

Reemplazando $x = 1$, queda que

$$\lim_{x\to 1}\left(2|x| - 5\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right) = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Problema 2. (15 pt)

Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|^3-8}{4-x^2} & \text{si } |x| \neq 2, \\ \frac{3}{2} & \text{si } |x| = 2. \end{cases}$$

Determine los puntos donde f es continua.

Solución.

En primer lugar, observar que la función sólo presenta problemas en los puntos $x = \pm 2$, así que f es continua para todos los $x \neq \pm 2$.

Analicemos individualmente cada punto $x = \pm 2$.

$\underline{x = 2}$. Como $x > 0$ cuando $x \to 2$, se tiene en este caso que $|x| = x$ y luego

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x|^3 - 8}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{4 - x^2}.$$

Usando diferencia de cubos y diferencia de cuadrados u otra técnica, vemos que este límite es igual a -3.

Por lo tanto, f NO es continua en $x = 2$.

$\underline{x = -2}$. Como $x < 0$ cuando $x \to -2$, se tiene en este caso que $|x| = -x$ y luego

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x|^3 - 8}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{-x^3 - 8}{4 - x^2}.$$

Mediante técnicas algebraicas u otras, vemos que este límite es igual a -3.

Por lo tanto, f NO es continua en $x = -2$.

En resumen, f es continua en todo x, excepto para $x = \pm 2$.

Problema 3. (15 pt)

Analizar

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$$

Solución.

Se tiene:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{(\sqrt{x})\times(1/\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}})\times(1/\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}}.$$

Y como $1/\sqrt{x}\to 0$ si $x\to+\infty$, queda que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}}\right) = 1.$$

Problema 4. (15 pt)

Si $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$, determine los puntos donde f es diferenciable.

Solución.

En primer lugar, el dominio de la función es el intervalo $[-1, 1]$ y, además, $x = 0$ es un punto de bifurcación.

Los anteriores son los únicos puntos en que puede perderse la diferenciabilidad así que, en primer lugar, la función si es diferenciable en los x con $-1 < x < 1$ y $x \neq 0$.

Queda analizar individualmente los puntos $x = 0,\ \pm 1$.

$\underline{x = 0}$. Analizamos el límite de diferenciabilidad

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - |x|} - 1}{x}$$

Se tiene

$$\frac{\sqrt{1 - |x|} - 1}{x} = \frac{|x|}{x(\sqrt{1 - |x|} + 1)}.$$

Para eliminar el valor absoluto, se calculan los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x(\sqrt{1 - |x|} + 1)} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x(\sqrt{1 - x} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x(\sqrt{1 - |x|} + 1)} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Como los límites laterales son diferentes, concluimos que $f'(0)$ no existe.

$\underline{x = 1}$. Analizamos el límite de diferenciabilidad

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1 - |x|}}{x - 1}.$$

Como $x > 0$ si $x \to 1$, queda

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1 - |x|}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1 - x}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} -\frac{1}{\sqrt{1 - x}} = -\infty$$

Como el límite es infinito, concluimos que $f'(1)$ no existe.

$\underline{x = -1}$. Analizamos el límite de diferenciabilidad

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{1 - |x|}}{x + 1}.$$

Como $x < 0$ si $x \to -1$, queda

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{1 - |x|}}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{1 + x}}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{1 + x}} = +\infty$$

Como el límite es infinito, concluimos que $f'(-1)$ no existe.

En resumen, f es diferenciable sólo si $-1 < x < 1$ y $x \neq 0$.