UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DIRECCIÓN DE DOCENCIA

EJERCICIOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAL:

TEXTO DE APOYO AL ESTUDIANTE, TOMO 2.

AUTOR: FRANCISCO TOLEDO OÑATE

CONCEPCIÓN-CHILE

A: 2019

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

Este texto fue creado como una ayuda para el estudiante que enfrenta las matemáticas de primer año de Universidad. La dinámica consiste fundamentalmente en explicar los contenidos a través de ejercicios, los cuales el estudiante debe ir resolviendo en la medida que lee el texto. La idea es ir resolviendo estos ejercicios en base a la intuición y a algunos conocimientos previamente adquiridos. La buena comprensión de la resolución de los ejercicios permite luego generalizar lo aprendido, estableciendo definiciones y teoremas. El texto pretende que el estudiante use mecanismos lo menos posible, privilegiando el desarrollo de los problemas de forma razonada e intuitiva. Se pretende también en el texto, usar la formalidad matemática justa y necesaria, adoptando un lenguaje más cercano a aquella persona que no sabe Matemática, y que desea aprenderla. En definitiva, se busca acercar la Matemática a la gente.

En este segundo tomo, el texto trata las siguientes 6 unidades:

- Capítulo 1: Relaciones y funciones
- Capítulo 2: Función exponencial y logarítmica
- Capítulo 3: Trigonometría y funciones circulares
- Capítulo 4: Números complejos

- Capítulo 5: Polinomios
- Capítulo 6: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones

En el capítulo 1, se abordan los conceptos básicos vinculados con funciones, sin olvidar algunas aplicaciones. Los capítulos 2 y 3 nos permiten conocer varios tipos de funciones, los cuales describen distintos tipos de comportamiento de ciertos fenómenos en contexto. En el capítulo 4 estudiaremos el mundo de los números complejos. Los capítulos 5 y 6 se centran en técnicas para resolver ecuaciones polinomiales y sistemas de ecuaciones. Además, al final del texto aparecen las respuestas de los ejercicios propuestos.

Finalmente quisiera agradecer a la Dirección de Docencia, a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y a todas aquellas personas que me ayudaron a realizar este texto, sin ustedes este proyecto no hubiese llegado a buen puerto.

Espero disfruten este texto, el sacrificio del autor está plasmado en estas páginas.

Francisco Toledo Oñate.

Capítulo 2

Relaciones y funciones.

2.1. Introducción.

El concepto de función fue introducido formalmente en conjunto con los inicios del Cálculo, esto en el siglo XVII, por los matemáticos René Descartes, Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Su idea conceptual básica está relacionada con una dependencia entre dos cantidades, las cuales se denominan variable independiente y variable dependiente. Determinando la función que relaciona a dos cantidades, podemos determinar su gráfico, y de este modo observar el comportamiento de cierto fenómeno, y así predecir sucesos futuros, de modo de tomar las mejores decisiones en cuánto a este.

Las funciones nos permiten establecer relaciones entre dos cantidades, tales como:

- la distancia recorrida por un auto de Fórmula Uno, y el instante en el que lleva recorrida esa distancia, no sin antes conocer su rapidez promedio, la cual se supone constante. Esto nos podría ayudar a predecir qué corredor ganará la carrera y en qué momento un corredor superará a otro.

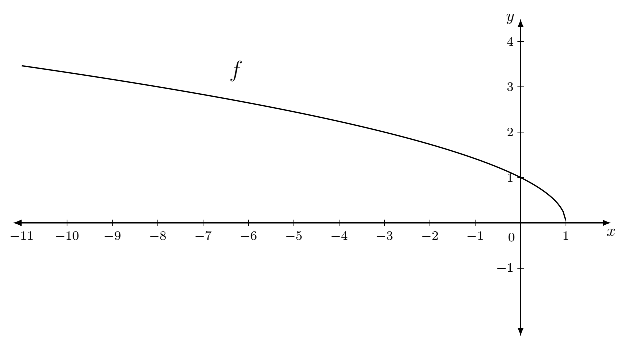
- artículos vendidos y la ganancia obtenida en una empresa. Veremos que el gráfico de la función respectiva es una parábola, por lo que podríamos predecir, cuántos artículos debemos vender para obtener la máxima ganancia.

- la concentración de un cierto medicamento en la sangre, pasado un cierto tiempo desde que fue suministrado. Esto les permitiría a los médicos regular las dosis y tomar las mejores decisiones en cuánto al paciente.

Partiremos este capítulo con el concepto de relación, y luego veremos que una función es un caso particular de ésta. Veremos inicialmente cómo calcular el dominio de una función, que es el conjunto de valores que toma la variable independiente (usualmente x). En segundo lugar, veremos cómo calcular el recorrido de una función, que es el conjunto de valores que toma la variable dependiente (usualmente y). Por ejemplo, la función

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = \sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

tiene dominio $]-\infty, 1]$ y recorrido $[0, +\infty[$. Por otro lado, con algunos conocimientos de cónicas, en este caso podemos obtener el gráfico de f:



en el cual podemos distinguir su dominio (en el eje x) y su recorrido (en el eje y).

Posteriormente nuestro trabajo apuntará a generar condiciones para obtener la función inversa de una función dada, y luego calcularla. En palabras simples, la función inversa consiste en intercambiar la dependencia de las variables (es decir, la variable independiente pasa a ser la dependiente y viceversa).

Por otro lado, estudiaremos algunos tipos de funciones, como las funciones pares, impares, crecientes y decrecientes. Además, realizaremos operaciones entre funciones, entre las que destacan la composición de funciones.

Finalmente, pasaremos a las aplicaciones, similares a las planteadas al inicio de esta introducción.

Cabe mencionar que todos los conceptos relacionados con funciones y las técnicas de cálculo asociadas, son usadas en el estudio del Cálculo, por lo que una buena comprensión de ellos es importante.

2.2. Relaciones.

Informalmente, si A y B son dos conjuntos no vacíos, una **relación** R de A en B, es una ley de asociación que relaciona elementos de A con elementos de B. Cuando el elemento $a \in A$ está relacionado con $b \in B$, esto se denota por aRb.

Veamos un ejemplo. Sean $A = \{0, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$ y R la relación definida por

$$aRb \Leftrightarrow a \text{ divide a } b, \ a \in A, b \in B.$$

En este caso:

- como 2 divide a 4, entonces $2R4$.
- como 2 no divide a 5, entonces 2 no está relacionado con 5.
- se tiene además que $2R6$, $3R3$, $3R6$ y $4R4$.

Tenemos que:

- El **dominio** de R, el cual es denotado por $\operatorname{Dom} R$, corresponde al conjunto formado por todos elementos de A que están relacionados con algún elemento de B. Es decir,

$$\operatorname{Dom} R = \{2, 3, 4\}.$$

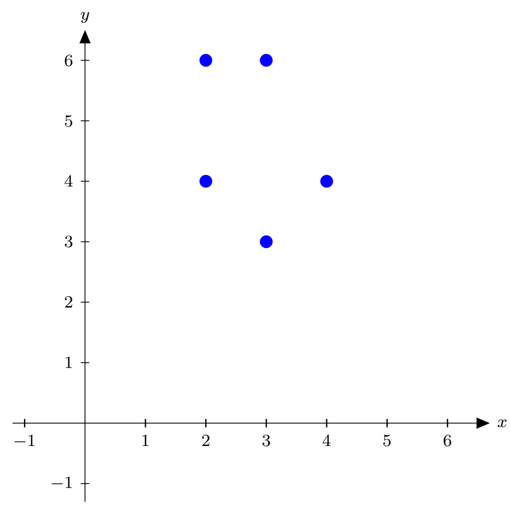
- El **recorrido** de R, el cual es denotado por $\operatorname{Rec} R$, corresponde al conjunto formado por todos los elementos de B los cuales se relacionan con algún elemento de A. Es decir,

$$\operatorname{Rec} R = \{3, 4, 6\}.$$

- El **gráfico** de R, el cual es denotado por $\operatorname{Gr} R$, corresponde al conjunto de pares ordenados (a, b) tal que la primera componente $a \in A$, está relacionada con la segunda componente $b \in B$. En nuestro caso,

$$\operatorname{Gr} R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}.$$

Note que si consideramos un plano cartesiano, donde A lo consignamos en el eje x y B en el eje y, entonces GrR es representado por



En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.2.1. *Una* ***relación*** *R consiste en:*

- *Un conjunto A.*
- *Un conjunto B.*
- *Una función proposicional $R(x, y)$ definida en $A \times B$.*

Si $R(a, b)$ es verdadera, entonces decimos que a está ***relacionado*** *con b y lo denotamos por aRb.*

Además,

- Llamamos **dominio de** R, el cual es denotado por $\operatorname{Dom} R$, al conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con algún elemento de B. Es decir,

$$\operatorname{Dom} R = \{a \in A : \exists b \in B \text{ de modo que } aRb\}.$$

- Llamamos **recorrido de** R, el cual es denotado por $\operatorname{Rec} R$, al conjunto de todos los elementos de B los cuales se relacionan con algún elemento de A. Es decir,

$$\operatorname{Rec} R = \{b \in B : \exists a \in A \text{ de modo que } aRb\}.$$

- Llamamos **gráfico de** R, el cual es denotado por $\operatorname{Gr} R$, al conjunto de todos los pares ordenados $(a,b) \in A \times B$ tales que a está relacionado con b. Es decir,

$$\operatorname{Gr} R = \{(a,b) \in A \times B : aRb\}.$$

Ejercicio 2.2.1. *Sea* $A = \{2,8,9\}$ *y* $B = \{1,3,4,6,7\}$*. Definimos la relación*

$$aRb \Leftrightarrow MCD(a,b) = 1,\ \ a \in A, b \in B.$$

¿A qué conjunto corresponde $\operatorname{Dom} R$, $\operatorname{Rec} R$ *y* $\operatorname{Gr} R$*?*

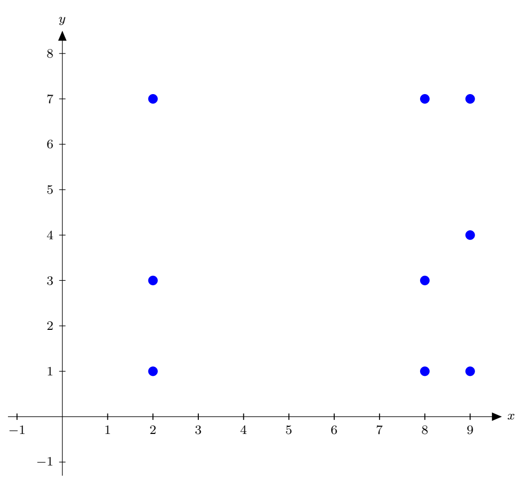
Solución. Buscamos los elementos $a \in A$ y $b \in B$, tales que el número natural "más grande", que divide simultáneamente a a y b es 1. Se tiene que

- $2R1$, $2R3$, $2R7$.
- $8R1$, $8R3$, $8R7$.
- $9R1$, $9R4$, $9R7$.

De este modo,

- $\operatorname{Dom} R = \{2,8,9\} = A$.
- $\operatorname{Rec} R = \{1,3,4,7\}$.
- $\operatorname{Gr} R = \{(2,1),(2,3),(2,7),(8,1),(8,3),(8,7),(9,1),(9,4),(9,7)\}$.

El gráfico de R, representado en un plano cartesiano es



$\square$

Ejercicio 2.2.2. *Consideremos* $A = \mathbb{R}$ *y* $B = \mathbb{R}$. *Definimos la relación*

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

1. *¿Con qué valor de* $y \in \mathbb{R}$ *está relacionado*

   a) $x = -5$*?*

   b) $x = 5$*?*

   c) $x = 0$*?*

   d) $x = 3$*?*

   Solución. Si reemplazamos

   a) $x = -5$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos que $y^2 = 0$, de donde $y = 0$, por lo que $-5R0$.

   b) $x = 5$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos que $y^2 = 0$, de donde $y = 0$, por lo que $5R0$.

   c) $x = 0$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos que $y^2 = 25$, de donde $y = 5$ o $y = -5$. Así $0R5$ y $0R-5$.

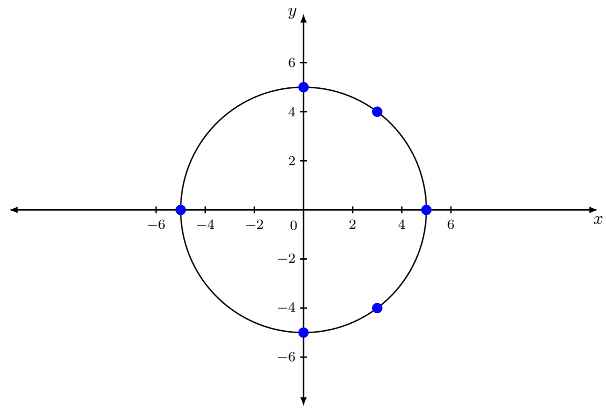
   d) $x = 3$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtenemos que $y^2 = 16$, de donde $y = 4$ o $y = -4$. Así $3R4$ y $3R-4$.

2. *Obtenga el dominio, recorrido y gráfico de* R.

   Solución. Note que los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación

   $$x^2 + y^2 = 25,$$

   son todos los puntos de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r = 5$. De este modo, el gráfico de R, destacando los puntos inicialmente obtenidos, es



Observando el eje x, vemos que $\operatorname{Dom} R = [-5, 5]$, y observando el eje y, que $\operatorname{Rec} R = [-5, 5]$. □

Ejercicio 2.2.3. *Considere $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$. Considere la relación*

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4.$$

Obtenga su gráfico, dominio y recorrido.

Solución. Lo hacemos de dos formas:

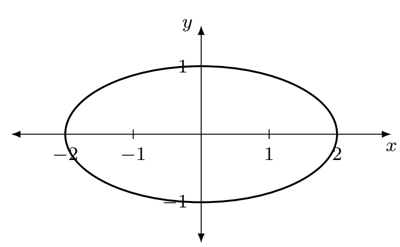
- Primera forma: Usamos un argumento gráfico. La ecuación

$$x^2 + 4y^2 = 4,$$

corresponde a una elipse, cuya ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1,$$

y cuyo gráfico es



De acá deducimos que $\operatorname{Dom} R = [-2, 2]$ y que $\operatorname{Rec} R = [-1, 1]$.

- Segunda forma: Usamos un argumento algebraico para calcular el dominio y el recorrido de R. Se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} R &= \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ de modo que } xRy\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ de modo que } x^2 + 4y^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Despejamos y de la ecuación $x^2 + 4y^2 = 1$, obteniendo que

$$y = \pm \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}.$$

Por lo tanto, en general, un elemento x del dominio, está relacionado con dos elementos y del codominio B, siendo estos de la forma $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ o $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$. Así, para que x esté relacionado con algún y real, entonces necesariamente se debe cumplir que

$$4 - x^2 \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} R &= \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\} \\ &= [-2, 2]\,.\end{aligned}$$

Calculemos el recorrido de R. Note que

$$\begin{aligned}\operatorname{Rec} R &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ de modo que } xRy\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ de modo que } x^2 + 4y^2 = 4\}.\end{aligned}$$

Análogamente a lo hecho en el cálculo de $\operatorname{Dom} R$, ahora despejamos x de la ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$. De este modo,

$$x = \pm\sqrt{4 - 4y^2}.$$

Luego, para que existe algún x real que se relaciona con y, el valor de y debe cumplir que

$$4 - 4y^2 \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Rec} R &= \{y \in \mathbb{R} : 4 - 4y^2 \geq 0\} \\ &= [-1, 1]\,.\end{aligned}$$

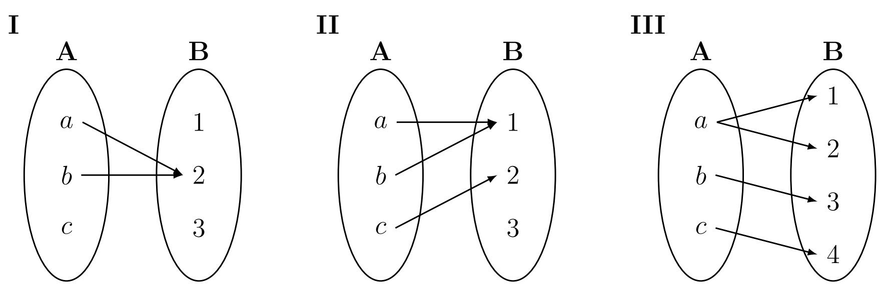
El gráfico se obtiene de la misma manera que en la primera forma.

□

2.3. Funciones.

Sean A y B conjuntos no vacíos. Informalmente, una **función** es una relación de A en B, en la cual cada elemento de A se relaciona con un único elemento de B.

Ejercicio 2.3.1. *Cada diagrama siguiente representa una relación R de A en B. ¿Cuál o cuáles de ellos corresponde a una función de A en B?*



Solución. Se tiene que

- En el diagrama I, el elemento $c \in A$ no se relaciona con ningún elemento de B, por lo que este diagrama no corresponde al de una función.

- En el diagrama III, el elemento $a \in A$ se relaciona con dos elementos de B, a saber 1 y 2, por lo que este diagrama no corresponde al de una función.

Por otro lado, en el diagrama II, se tiene que:

- El elemento a de A está relacionado sólo con el 1 de B.

- El elemento b de A está relacionado sólo con el 1 de B.
- El elemento c de A está relacionado sólo con el 2 de B.

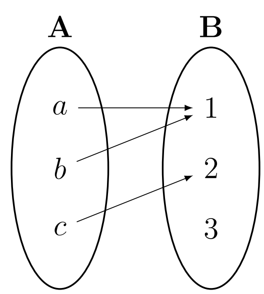
Es decir, cada elemento de A, está relacionado con un único elemento de B. De este modo, el diagrama II corresponde al de una función, y es el único diagrama que cumple con esta condición. $\square$

Definición 2.3.1. *Una **función** f de A en B, es una relación de A en B, de modo que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B. Esta función la denotamos por*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x), \end{aligned}$$

*donde $f(x)$ corresponde al único elemento de $y \in B$ relacionado con $x \in A$, y se lee "f de x". En este caso, decimos que $f(x)$ es la **imagen** de x.*

Ejercicio 2.3.2. *Consideremos el diagrama II del ejercicio anterior:*



Si esta función la denotamos por $f : A \to B$. ¿Cuál es el valor de

a) $f(a)$?

b) $f(b)$?

c) $f(c)$?

Solución. Se tiene que

a) $f(a) = 1$, o sea la imagen de a es 1.

b) $f(b) = 1$, o sea la imagen de b es 1.

c) $f(c) = 2$, o sea la imagen de c es 2.

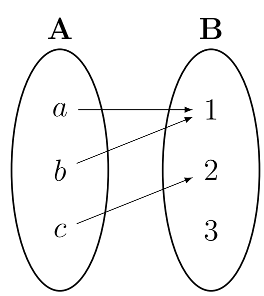
$\square$

Definición 2.3.2. *Sea*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

una función. Si y es la imagen de x, entonces decimos que x es la ***preimagen*** *de y.*

Ejercicio 2.3.3. *Consideremos nuevamente el diagrama II del primer ejercicio del capítulo:*



Obtenga, si es que existen,

a) la o las preimágenes de 1.

b) la o las preimágenes de 2.

c) la o las preimágenes de 3.

Solución. Se tiene que

a) El elemento 1 de B tiene dos preimágenes, a saber a y b.

b) El elemento 2 de B tiene una preimagen, la cual es c.

c) El elemento 3 de B no tiene preimagen.

$\square$

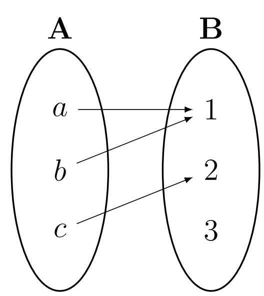
Definición 2.3.3. *Sea*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

una función. Se tiene que

- *El conjunto A se denomina* ***Dominio*** *de f, y se denota por* $\operatorname{Dom} f$.
- *El conjunto B se denomina* ***Codominio*** *de f, y se denota por* $\operatorname{Cod} f$.
- *El conjunto de todos los elementos de B que tienen preimagen por f se denomina* ***Recorrido*** *de f, y se denota por* $\operatorname{Rec} f$.

Ejercicio 2.3.4. *Nuevamente consideramos el diagrama:*



Si esta función la denotamos por $f : A \to B$

a) *¿Cuál es el dominio de f?*

Solución. El dominio de f es A. Es decir, $\operatorname{Dom} f = \{a, b, c\}$.

b) *¿Cuál es el codominio de f?*

Solución. El codominio de f es B. Es decir, $\operatorname{Cod} f = \{1, 2, 3\}$.

c) *¿Cuál es el recorrido de f?*

Solución. El recorrido de f, es el conjunto de elementos de B que tienen al menos una preimagen. Es decir, $\operatorname{Rec} f = \{1, 2\}$. $\square$

Ejercicio 2.3.5. *Considere la función*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

a) *Determine si es posible,* $f(0), f(\sqrt{2}), f(1)$.

Solución. La función dada, a cada valor de x le asocia como imagen $\frac{1}{x^2-1}$. De este modo

- $f(0) = \frac{1}{0^2-1} = -1$.
- $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{(\sqrt{2})^2-1} = 1$.
- $f(1) = \frac{1}{0}$, por lo que $f(1)$ no existe.

b) *¿Cuál es* $\operatorname{Dom} f$*?*

Solución. El dominio de f, será el conjunto de todos los números reales x, los cuales tienen imagen, es decir, para los cuales $f(x)$ existe. Como $f(x)$ está definida por una fracción, entonces al reemplazar cualquier valor de x, se debe cumplir que el denominador no puede ser 0. De este modo,

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\},$$

por lo que

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1\}.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

$\square$

Ejercicio 2.3.6. *Considere la función*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{6+x}. \end{aligned}$$

a) *Determine, si es posible,* $f(-2)$*,* $f(-6)$ *y* $f(-10)$*.*

Solución. Se tiene que

- $f(-2) = 2$.
- $f(-6) = 0$.
- $f(-10) = \sqrt{-4}$, pero $\sqrt{-4}$ no es un número real. Como $\operatorname{Cod} f = \mathbb{R}$, entonces $f(-10)$ no existe, por lo que $-10 \notin \operatorname{Dom} f$.

b) *¿Cuál es* $\operatorname{Dom} f$*?*

Solución. Se tiene que

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ existe}\}.$$

O sea,

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{6+x} \in \mathbb{R}\}.$$

Para que $\sqrt{6+x} \in \mathbb{R}$, entonces la cantidad subradical $6+x$ no puede ser negativa. Luego,

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : 6 + x \geq 0\}.$$

Así,

$$\operatorname{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -6\}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Dom} f = [-6, +\infty[\,.$$

$\square$

Ejercicio 2.3.7. *Considere la función*

$$\begin{aligned} f: \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{2-x}. \end{aligned}$$

a) *Obtenga* $\operatorname{Dom} f$.

Solución. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$.

b) *Determine, si es que existe, la preimagen por f de*

- $y = 1$
- $y = \frac{3}{2}$
- $y = 0$

Solución. Note que, en general, x es la preimagen de y, si y sólo si, $y = f(x)$. En este caso

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2-x}.$$

- Reemplazamos $y = 1$ en $y = \frac{1}{2-x}$, obteniendo $1 = \frac{1}{2-x}$. Despejando x de esta última igualdad, obtenemos que $x = 1$, por lo que la preimagen de $y = 1$ es $x = 1$.
- Reemplazando $y = \frac{3}{2}$ en $y = \frac{1}{2-x}$ y luego despejando x, obtenemos que su preimagen es $x = \frac{4}{3}$.
- Reemplazando $y = 0$ en $y = \frac{1}{2-x}$, obtenemos que $0 = 1$, por lo que $y = 0$ no tiene preimagen.

c) *Obtenga* $\operatorname{Rec} f$.

Solución. Recordemos que el recorrido de una función lo componen todos los valores de y que tienen preimagen x. De este modo

$$\begin{aligned} \operatorname{Rec} f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \operatorname{Dom} f \text{ tal que } y = f(x)\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} - \{2\} \text{ tal que } y = \frac{1}{2-x}\right\}. \end{aligned}$$

De $y = \frac{1}{2-x}$, despejamos la supuesta preimagen x, obteniendo que $x = \frac{2y-1}{y}$. Es decir, para que y tenga preimagen, se debe cumplir que $y \neq 0$. En definitiva

$$\begin{aligned} \operatorname{Rec} f &= \{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 2.3.8. *Considere la función*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

a) *Obtenga* $\operatorname{Dom} f$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} f &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 \geq x\} \\ &= \left]-\infty, 1\right]. \end{aligned}$$

b) *Obtenga* $\operatorname{Rec} f$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Rec} f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \operatorname{Dom} f \text{ tal que } y = f(x)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \left]-\infty, 1\right] \text{ tal que } y = \sqrt{1-x}\} \end{aligned}$$

Como y es igual a una raíz cuadrada, entonces $y \geq 0$. Ahora despejamos x de $y = \sqrt{1-x}$, obteniendo que la preimagen de $y \in \operatorname{Rec} f$, viene dada por

$$x = 1 - y^2.$$

Note que esta expresión que define a x, no genera ninguna restricción adicional sobre y, dado que $1 - y^2$ es un polinomio. En definitiva,

$$\begin{aligned}\operatorname{Rec} f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \left]-\infty, 1\right] \text{ tal que } x = 1 - y^2 \ \wedge y \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \\ &= \left[0, +\infty\right[.\end{aligned}$$

□

Definición 2.3.4. *Consideremos una función*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

El gráfico de f*, denotado por* $\operatorname{Gr} f$*, consiste en el conjunto*

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Observación 2.3.1. Por ejemplo, para la función del ejercicio anterior

$$\begin{aligned} f : \left]-\infty, 1\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{1 - x}, \end{aligned}$$

su gráfico corresponde a

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{1 - x}\}.$$

Veamos a qué curva corresponde su gráfico. Elevando al cuadrado en

$$y = \sqrt{1 - x},$$

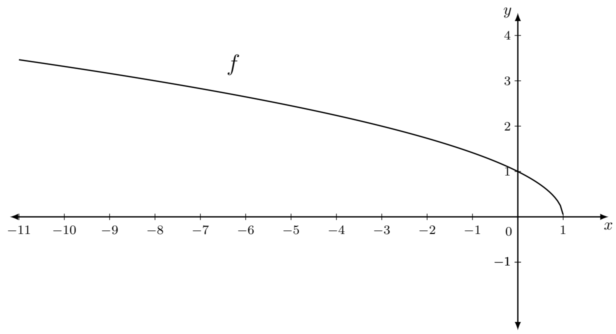
obtenemos

$$y^2 = 1 - x,$$

la cual es la ecuación de una parábola. Como esta expresión es equivalente a

$$y^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)(x - 1),$$

entonces la párabola tiene vértice $(0, 1)$ y $p = -\frac{1}{4}$, de modo que abre hacia la izquierda. Así, como $y \geq 0$, el gráfico de f es



En el eje x se aprecia que $\operatorname{Dom} f = \left]-\infty, 1\right]$, y en el eje y que $\operatorname{Rec} f = \left[0, +\infty\right[$.

Ejercicio 2.3.9. *Considere la función*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \frac{\sqrt{36 - 9x^2}}{2}. \end{aligned}$$

a) *Obtenga* $\operatorname{Dom} f$.

Solución.

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} f &= \{x \in \mathbb{R} : 36 - 9x^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 4 \geq x^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\} \\ &= [-2, 2]\,. \end{aligned}$$

b) *Obtenga* $\operatorname{Rec} f$.

Solución. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{Rec} f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \operatorname{Dom} f \text{ tal que } y = f(x)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \exists x \in [-2, 2] \text{ tal que } y = \frac{\sqrt{36 - 9x^2}}{2} \ \wedge \ y \geq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \exists x \in [-2, 2] \text{ tal que } x = \pm\frac{\sqrt{36 - 4y^2}}{3} \ \wedge \ y \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 36 - 4y^2 \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq y \leq 3 \ \wedge \ y \geq 0\} \\ &= [0, 3]\,. \end{aligned}$$

c) *Obtenga* Gr f.

Solución.

$$\operatorname{Gr} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{\sqrt{36-9x^2}}{2} \right\}$$

Elevando al cuadrado en

$$y = \frac{\sqrt{36-9x^2}}{2},$$

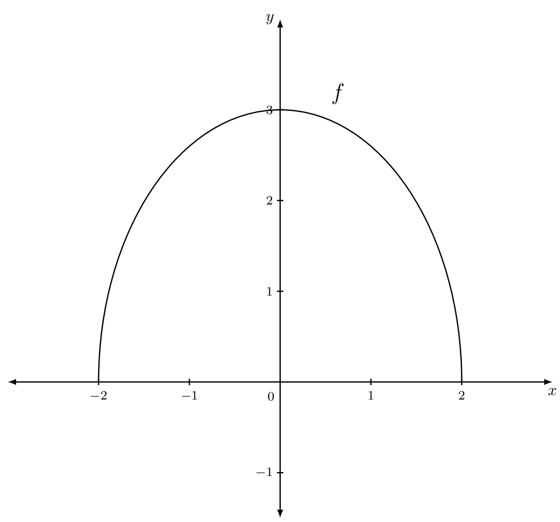
se obtiene que

$$y^2 = \frac{36-9x^2}{4},$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

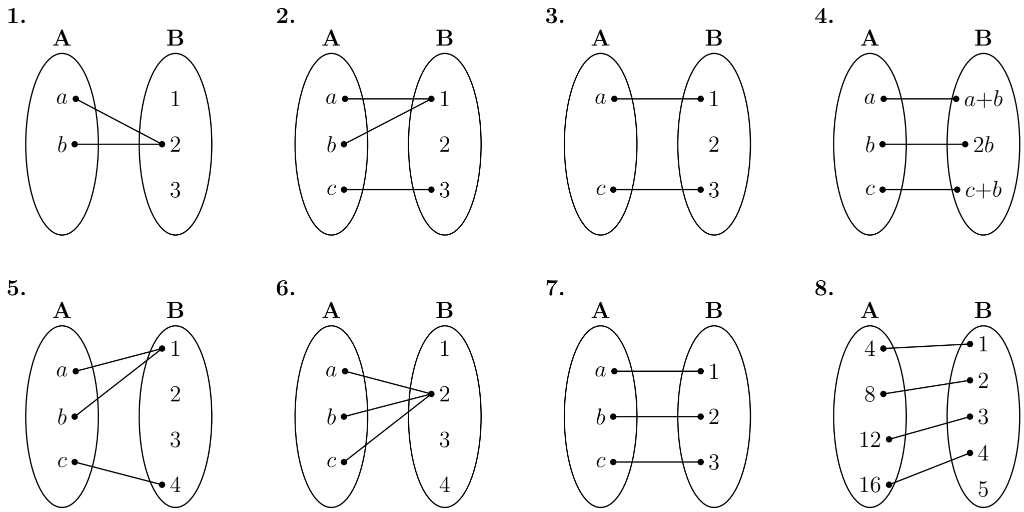
Esta ecuación corresponde a una elipse, cuyo centro es $(0,0)$ y cuyo eje mayor está sobre el eje y, con $a = 3$ y $b = 2$. Dado que $\operatorname{Rec} f = [0,3]$, entonces f corresponde a la semielipse superior, es decir a:



□

2.4. Función inyectiva.

Ejercicio 2.4.1. *Considere los siguientes diagramas de funciones*



¿En cuales de ellos, se cumple siempre que elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas?

Solución. Esto ocurre en los diagramas $3, 4, 7$ y 8. Una función que cumple siempre que elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas, se denomina **función inyectiva**.

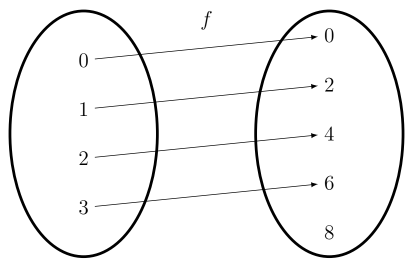
Definición 2.4.1. *Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f es* ***inyectiva****, si cada par de elementos distintos del dominio, tienen imágenes distintas, es decir si se cumple que*

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2), \tag{2.4.1}$$

o su contrarecíproco

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2. \tag{2.4.2}$$

Ejercicio 2.4.2. *Consideremos la función f del siguiente diagrama*



¿Es f inyectiva?

Solución. Note que

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 2$
- $f(2) = 4$
- $f(3) = 6$,

por lo que cada par de elementos de $\{0, 1, 2, 3\}$ tienen imágenes distintas por f. De este modo, f es inyectiva. Note también, que en este caso, cada elemento de $\operatorname{Rec} f$, tiene una única preimagen, en efecto:

- La preimagen de 0 es 0.
- La preimagen de 2 es 1.
- La preimagen de 4 es 2.
- La preimagen de 6 es 3.

$\square$

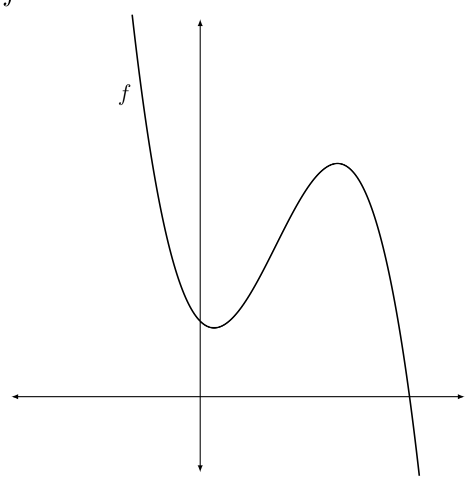
El hecho que cada elemento del recorrido de f tenga una única preimagen, es una característica de las funciones inyectivas, la cual enunciamos formalmente:

Proposición 2.4.2. *Una función $f : A \to B$ es inyectiva, si y sólo si, cada elemento de* $\operatorname{Rec} f$ *tiene una única preimagen, es decir*

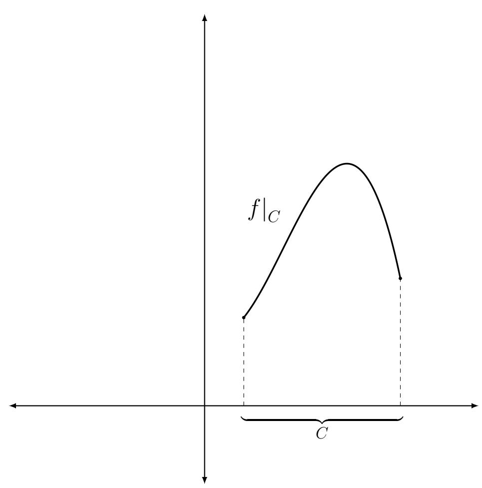
$$\forall y \in \operatorname{Rec} f : \exists! x \in A : f(x) = y.$$

Observación 2.4.1. Estudiemos lo que es la **restricción** de una función f. Informalmente, restringir f consiste en considerar una nueva función que está definida de igual manera que f, pero que tiene dominio correspondiente a sólo una "parte" C del dominio original. Para una función $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el gráfico de una restricción $f|_C$ es un "trozo" del gráfico de f.

Ejemplo de gráfico de f:



Ejemplo de una restricción de f a un conjunto C:



Definición 2.4.3. *Sea*

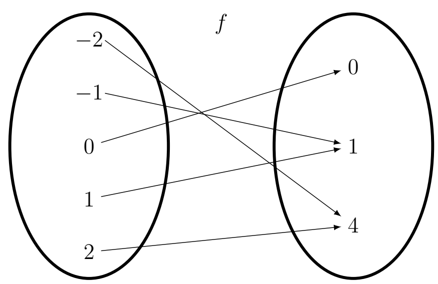
$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

una función. Una ***restricción*** *de f es una función*

$$\begin{aligned} g : C &\to B \\ x &\mapsto g(x) = f(x) \end{aligned}$$

con $C \subset A$. Usualmente g se denota como $g := f|_C$, o sin lugar a confusión, simplemente como f.

Ejercicio 2.4.3. *Consideremos la función f del diagrama*



a) *¿Es f inyectiva?*

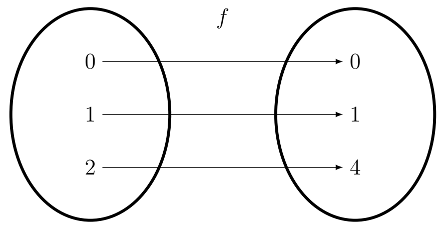
Solución. Note que -1 y 1 tienen la misma imagen por f, en efecto

$$f(-1) = 1 = f(1).$$

De este modo, f no es inyectiva.

b) *Si f no es inyectiva, obtenga una restricción de f que sea inyectiva.*

Solución. Note que además de 1 y -1, también 2 y -2 tienen la misma imagen. De este modo, si consideramos en el dominio de f, solamente valores mayores o iguales a 0, entonces f es inyectiva. Es decir, la restricción f escogida es

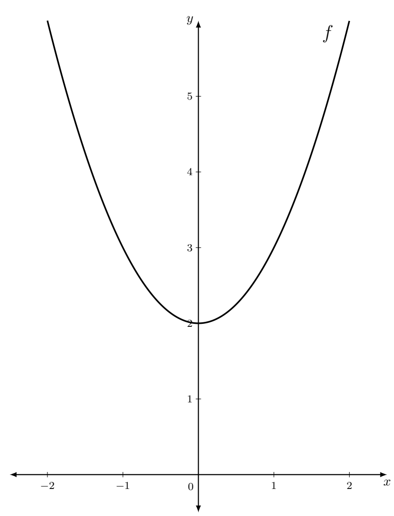


□

Ejercicio 2.4.4. *Sea f la función definida por*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

Su gráfico es



a) *¿Es f inyectiva?*

Solución. Note que $x = 1$ y $x = -1$ tienen la misma imagen por f, en efecto $f(1) = 2 = f(-1)$. En general, observando el gráfico, podemos ver que

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x).$$

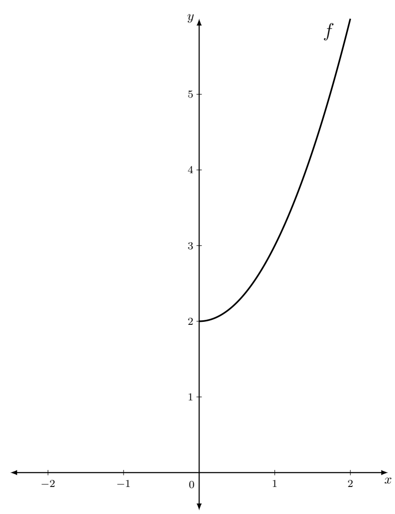
De este modo, f no es inyectiva.

b) *Obtenga una restricción de f que sea inyectiva.*

Solución. Para que no ocurra que x y su opuesto $-x$ tengan la misma imagen, entonces consideramos la restricción de f:

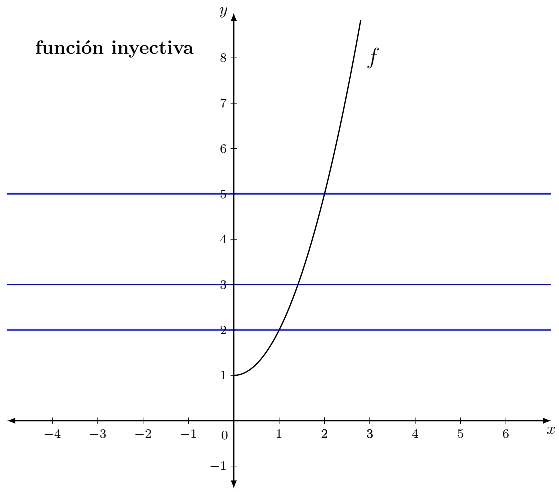
$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

De este modo, la nueva función f cumple que cada par de elementos distintos de su dominio tienen imágenes distintas, lo cual se puede apreciar en su gráfico:

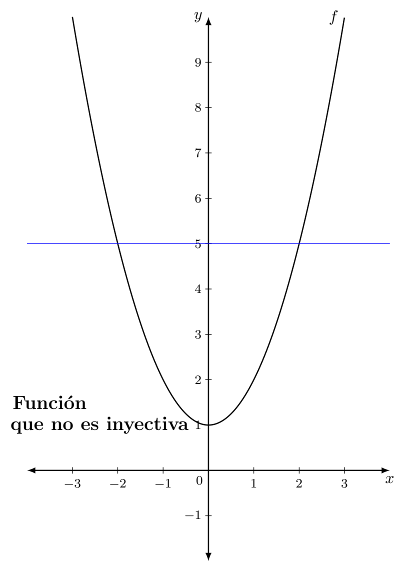


(También podríamos haber obtenido la restricción $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, cuyo gráfico corresponde al trozo de parábola que está en el segundo cuadrante). $\square$

Observación 2.4.2. Consideramos una función $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vimos que en general, una función f es inyectiva cuando cada elemento del recorrido tiene una única preimagen. Gráficamente, esto se puede apreciar por el hecho que toda recta horizontal que intersecta al gráfico de f, lo hace en un sólo punto:



Por otro lado, f no es inyectiva, cuando existe un elemento del recorrido que tiene más de una preimagen. Gráficamente, esto quiere decir que existe una recta horizontal que intersecta al gráfico de f en más de un punto:



En definitiva, si $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se tiene que:

- la función f es inyectiva si, y sólo si, toda recta horizontal que intersecta a su gráfico, lo hace en un sólo punto.
- la función f no es inyectiva si, y sólo si, existe una recta horizontal que intersecta a su gráfico en más de un punto.

Este criterio gráfico para determinar inyectividad se denomina **prueba de la recta horizontal para inyectividad**.

Ejercicio 2.4.5. *¿Cuál de las siguientes curvas representa el gráfico de una función inyectiva?*

a) Una recta de pendiente positiva.

b) Una parábola que abre hacia abajo.

d) La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$.

d) Una recta paralela al eje x.

f) La semiparábola $x = y^2, y \geq 0$.

Solución. Usamos el criterio de la recta horizontal. En el caso de una parábola que abre hacia abajo, la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, y una recta paralela al eje x, vemos que existen rectas horizontales que tocan a cada una de estas curvas en más de un punto. Por lo tanto, no representan el gráfico de una función inyectiva.
En el caso de las restantes curvas, es decir, la recta de pendiente positiva y la semiparábola $x = y^2, y \geq 0$, toda recta horizontal que la intersecta lo hace en un solo punto. De este modo, esta curvas corresponden al gráfico de una función inyectiva. $\square$

Ejercicio 2.4.6. *Sea la función* f *definida por*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + 1. \end{aligned}$$

Determine si f *es inyectiva:*

a) *En forma algebraica.*

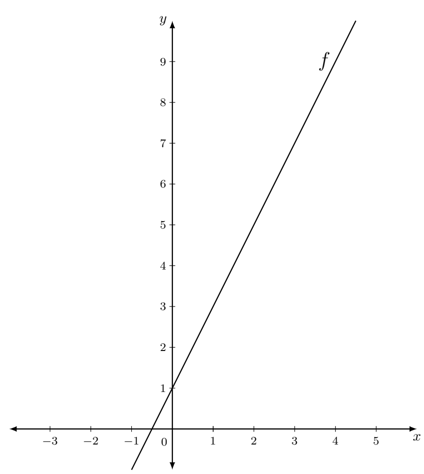
Solución. Lo hacemos usando la aseveración (2.4.2). Sean x_1, x_2 dos elementos de $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, los cuales tienen la misma imagen por f, es decir, se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$. Intentaremos probar que x_1 y x_2 son el mismo elemento, es decir que $x_1 = x_2$, y de este modo f es inyectiva. Note que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

b) *En forma gráfica.*

Solución. Vemos que el gráfico de f es una recta, en efecto, este es



Por la prueba de la recta horizontal, se aprecia que f es inyectiva. □

Ejercicio 2.4.7. *Sea f la función definida por*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Determine si f es inyectiva, y en caso que no lo sea, obtenga una restricción de f que lo sea.

a) *En forma algebraica:*

Solución. Vemos que $\operatorname{Dom} f = [-1, 1]$. Se tiene que $f(1) = 1 = f(-1)$, por lo que existen dos valores distintos de x, en este caso $x = 1$ y $x = -1$, los cuales tienen la misma imagen. De este modo, f no es inyectiva.

Para obtener una restricción inyectiva de f, intentaremos demostrar forzozamente que f es inyectiva. Es decir, intentamos probar que si x_1, x_2 son dos elementos del dominio de f que tienen la misma imagen, entonces $x_1 = x_2$. O sea, que

$$\forall x_1, x_2 \in [-1, 1] : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\forall x_1, x_2 \in [-1, 1] : f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{1 - x_1^2} = \sqrt{1 - x_2^2} \\
&\Rightarrow 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \\
&\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\
&\Rightarrow |x_1| = |x_2|,
\end{aligned}$$

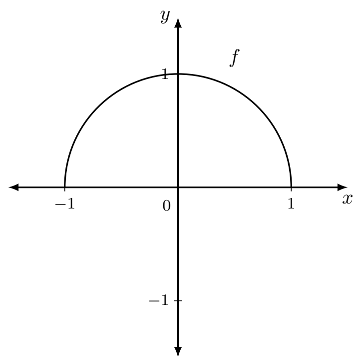
donde la última igualdad se genera al extraer raíz cuadrada en el paso que lo antecede. Note que la igualdad $|x_1| = |x_2|$ no nos permite concluir que $x_1 = x_2$. Sin embargo, si $x_1, x_2 \geq 0$, entonces

$$|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2.$$

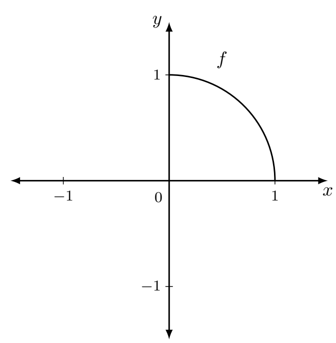
Es decir, si $\operatorname{Dom} f = [0, 1]$ (sólo los valores no negativos del dominio original), entonces f es inyectiva.

b) *En forma gráfica:*

Solución. El gráfico de f es



donde usando la prueba de la recta horizontal, se aprecia que f no es inyectiva. Restringiendo el dominio de f a $\operatorname{Dom} f = [0, 1]$, entonces el gráfico de esta restricción es



donde se aprecia que es inyectiva. $\square$

Ejercicio 2.4.8. *Sea f la función definida por*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Determine si f es inyectiva, y en caso que no lo sea, restringa su dominio para que así lo sea.

a) *En forma algebraica.*

Solución. Intentamos demostrar que f es inyectiva, sin saber a priori si esto es así. Es decir, intentamos probar que

$$\forall x_1, x_2 \in [-1, 1] : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

En caso que f no sea inyectiva, podremos a través de algún paso adicional, obtener una restricción de f que sí lo sea. Se tiene que

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 = x_2^2 - 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 = x_2^2 - 2x_2 + 1 \text{ (completamos cuadrado)} \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_1 - 1)^2 \\ &\Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \text{(extraemos raíz cuadrada)} \end{aligned}$$

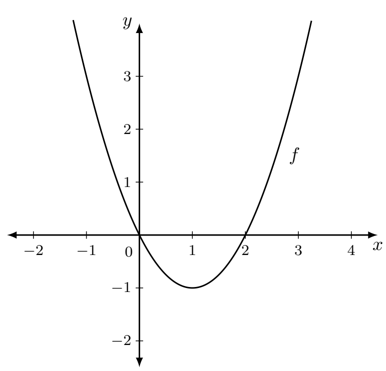
En la última igualdad, no podemos eliminar las barras del valor absoluto, por lo que f no es inyectiva. Sin embargo, si $x_1, x_2 \geq 1$, entonces

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

De este modo, si $\operatorname{Dom} f = [1, +\infty[$, entonces f restringida es inyectiva (En general, el nuevo dominio se obtiene intersectando el dominio original con la restricción obtenida. En nuestro caso, esto es $\mathbb{R} \cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$).

b) *En forma gráfica.*

Solución. Note que el gráfico de f corresponde al de la parábola $y = x^2 - 2x$, cuya ecuación canónica es $(x-1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}(y+1)$. De este modo, su gráfico es

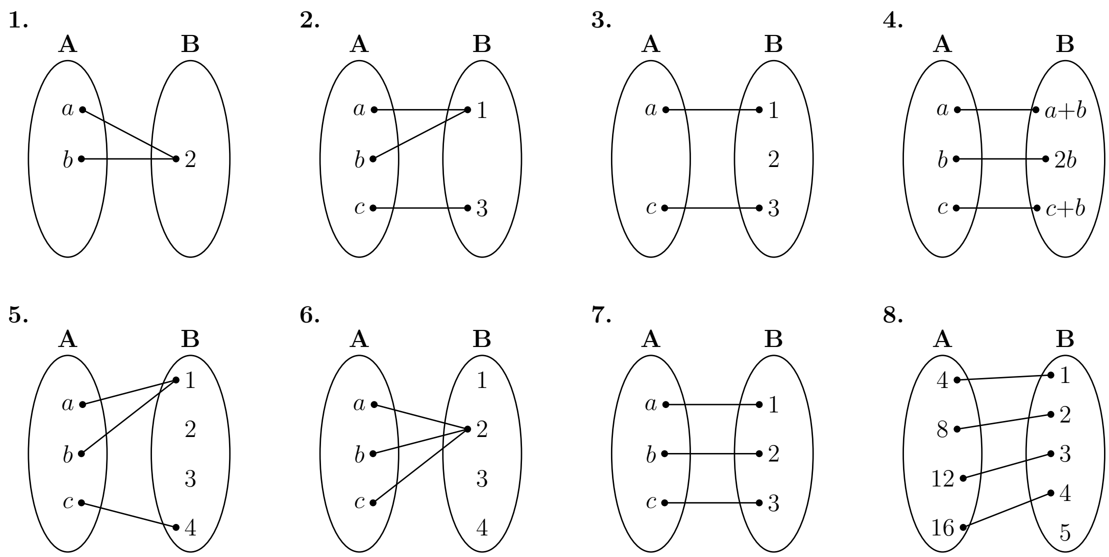


Según el criterio de la recta horizontal, f no es inyectiva. También en el gráfico, se observa que si consideramos el trozo de parábola que está desde $x = 1$ a la derecha, esta representa una función inyectiva. Por lo tanto, escogemos la restricción de f de modo que $\operatorname{Dom} f = [1, +\infty[$.

□

2.5. Función sobreyectiva.

Ejercicio 2.5.1. *Considere los siguientes diagramas de funciones*



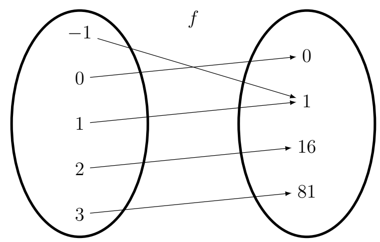
¿En cuales de ellos, el recorrido coincide con el codominio?

Solución. En los diagramas $1, 2, 4$ y 7. Cada una de estas funciones, en las cuales el recorrido coincide con el codominio, se denomina **función sobreyectiva**. □

Definición 2.5.1. *Sea $f : A \to B$. Se dice que f es* ***sobreyectiva****, si*

$$\operatorname{Rec} f = \operatorname{Cod} f.$$

Ejercicio 2.5.2. *Consideremos la función f del diagrama*



¿Es f sobreyectiva?

Solución. Note que

- $f(-1) = 1$
- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $f(2) = 16$
- $f(3) = 81$

por lo que

$$\operatorname{Rec} f = \{0, 1, 16, 81\} = \operatorname{Cod} f.$$

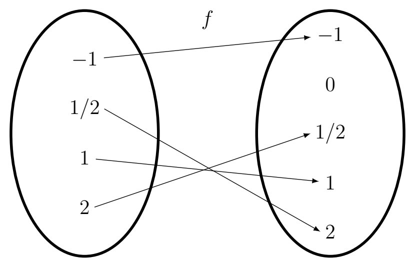
Por lo tanto, f es sobreyectiva. Note que en este caso, todo elemento del codominio de f tiene preimagen. $\square$

El hecho que cualquier elemento de $\operatorname{Cod} f$ tiene al menos una preimagen, es una característica de las funciones sobreyectivas, que formalizamos en la siguiente proposición:

Proposición 2.5.2. *Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva, si y sólo si, cada elemento del codominio B tiene preimagen, esto es,*

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y.$$

Ejercicio 2.5.3. *Consideremos la función f del diagrama*



a) *¿Es f sobreyectiva?*

Solución. Note que 0 no tiene preimagen por f, luego f no es sobreyectiva. Otro modo de justificar que f no es sobreyectiva, es que

$$\operatorname{Rec} f = \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

y

$$\operatorname{Cod} f = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\},$$

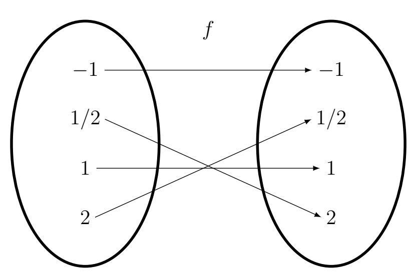
los cuales son evidentemente distintos.

b) *Si f no es sobreyectiva, ¿cómo podríamos restringir* $\operatorname{Cod} f$ *de modo que f redefinida sea sobreyectiva?*

Solución. Escogemos como nuevo codominio al recorrido de nuestra función. Es decir,

$$\operatorname{Cod} f = \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}.$$

Así, el nuevo diagrama es

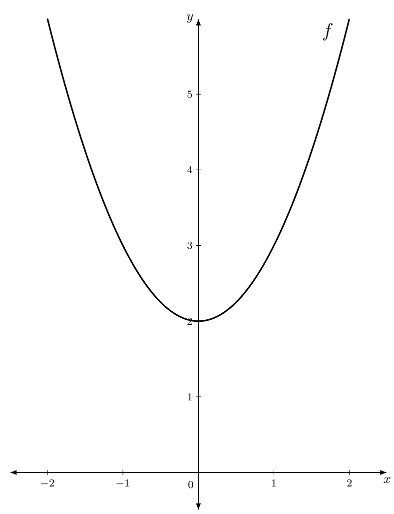


el cual corresponde a una función sobreyectiva. □

Ejercicio 2.5.4. *Sea f la función definida por*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

Su gráfico es



Observando el gráfico

a) *¿Es f sobreyectiva?*

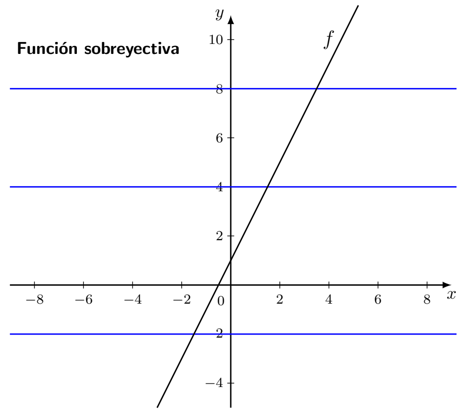
Solución. En el gráfico se ve que

$$\operatorname{Rec} f = [2, +\infty[\neq \mathbb{R} = \operatorname{Cod} f.$$

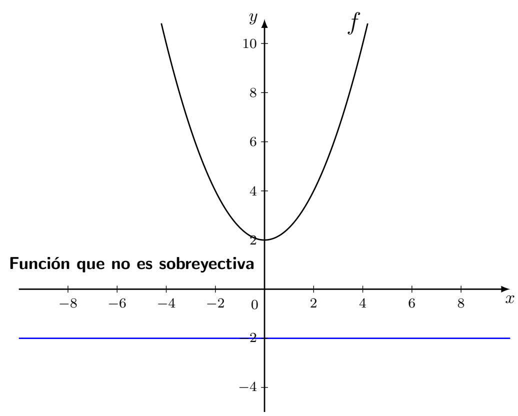
b) *Si no es sobreyectiva, ¿cómo podríamos restringir* $\operatorname{Cod} f$ *de modo que f redefinida sea sobreyectiva?*

Solución. Escogemos como $\operatorname{Cod} f$ al recorrido de f, es decir $\operatorname{Cod} f = [2, +\infty[$.

Observación 2.5.1. Consideramos una función $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Note que f es sobreyectiva, cuando todo elemento del codominio tiene al menos una preimagen. Gráficamente, esto se puede interpretar como que toda recta horizontal intersecta al gráfico de f en al menos un punto:



Así también, f no es sobreyectiva, cuando existe un elemento del codominio que no tiene preimagen. Graficamente, y como $\mathrm{Cod}\, f = \mathbb{R}$, esto quiere decir que existe una recta horizontal que no intersecta al gráfico de f:



En definitiva, se tiene que, si $f : \mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces

- la función f es sobreyectiva si, y sólo si, toda recta horizontal intersecta a su gráfico en al menos un punto.

- la función f no es sobreyectiva si, y sólo si, existe una recta horizontal que no intersecta al gráfico de f.

Este criterio gráfico para determinar sobreyectividad, se denomina **prueba de la recta horizontal para sobreyectividad**.

Ejercicio 2.5.5. *Sea f la función definida por*

$$
\begin{aligned}
f : \operatorname{Dom} f &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) = x^2 - 2x.
\end{aligned}
$$

Determine si f es sobreyectiva. Si f no es sobreyectiva, restringa $\operatorname{Cod} f$ *de modo que así lo sea.*

a) *En forma algebraica:*

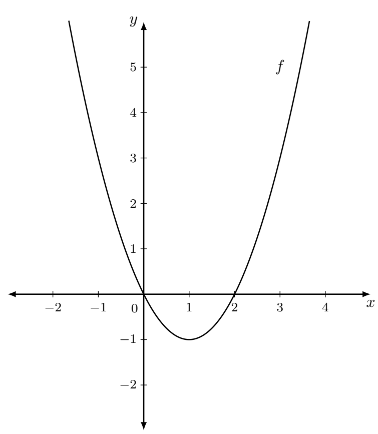
Solución. Calculamos $\operatorname{Rec} f$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Rec} f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = x^2 - 2x\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y + 1 = (x-1)^2\} \text{ (completando cuadrado)} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = 1 \pm \sqrt{y+1}\} \text{ (despejando } x \text{)} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y \geq -1\} \\
&= [-1, +\infty[\,.
\end{aligned}
$$

De este modo, como $\operatorname{Rec} f \neq \mathbb{R} = \operatorname{Cod} f$, entonces f no es sobreyectiva. Si escogemos $\operatorname{Cod} f = \operatorname{Rec} f = [-1, +\infty[$, entonces f es sobreyectiva.

b) *En forma gráfica:*

Solución. Note que el gráfico de f corresponde a la parábola $y = x^2 - 2x$, cuyo vértice está en $(1, -1)$ y $p = \frac{1}{4}$, por lo que abre hacia arriba. Su gráfico es



Si hacemos la prueba de la recta horizontal, vemos que existen rectas de este tipo que no intersectan al gráfico de f, por lo que f no es sobreyectiva. Más aún, también se aprecia graficamente que $\operatorname{Rec} f = [-1, +\infty[$, por lo que si

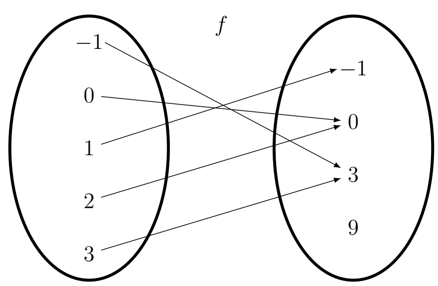
$$\operatorname{Cod} f = \operatorname{Rec} f = [-1, +\infty[\,,$$

entonces f es sobreyectiva. Gráficamente, la sobreyectividad se puede observar limitando el plano solamente a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -1\}$ y haciendo la prueba de la recta horizontal. $\square$

2.6. Función biyectiva.

Definición 2.6.1. *Una función $f : A \to B$ se dice* ***biyectiva*** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejercicio 2.6.1. *Consideremos la función f del diagrama*



a) *¿Es f biyectiva?*

Solución. Note que $f(0) = 0 = f(2)$. Así, f no es inyectiva, y por lo tanto f no es biyectiva. Vemos además que 9 no tiene preimagen, por lo que f tampoco es sobreyectiva.

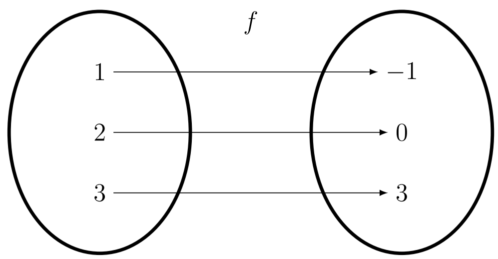
b) *Restringa* $\operatorname{Dom} f$ *y* $\operatorname{Cod} f$*, de modo que f redefinida sea biyectiva.*

Solución. Se tiene que:

- si $\operatorname{Dom} f = \{1, 2, 3\}$, entonces f restringida es inyectiva.

- si $\operatorname{Cod} f = \{-1, 0, 3\}$, entonces f restringida es sobreyectiva.

De este modo, la restricción biyectiva de f que escogemos es



Observemos que para f redefinida, cada elemento del codominio tiene una única preimagen, en efecto

- la preimagen de -1 es sólo 1.
- la preimagen de 0 es sólo 2.
- la preimagen de 3 es sólo 3.

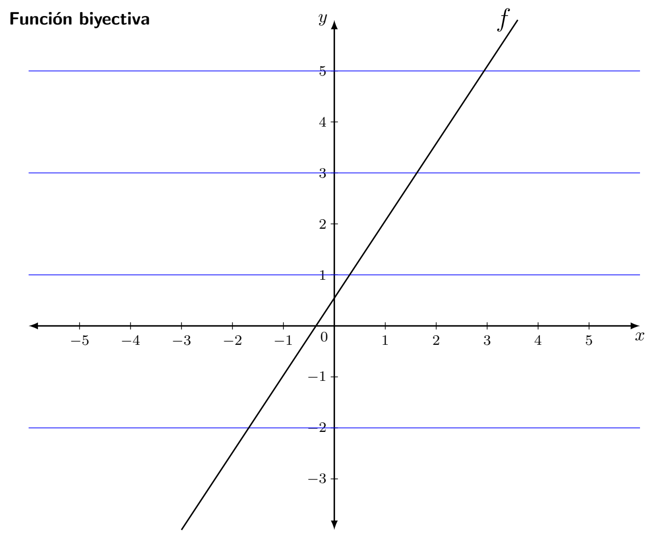
$\square$

El hecho que cada elemento del codominio de f tenga una única preimagen, es una característica de las funciones biyectivas, la cual formalizamos en la siguiente proposición:

Proposición 2.6.2. *Una función $f : A \to B$ es biyectiva, si y sólo si, cada elemento del codominio B tiene una única preimagen, esto es*

$$\forall y \in B : \exists! x \in A : f(x) = y.$$

Observación 2.6.1. Consideramos una función $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vimos recién que f es biyectiva si todo elemento del codominio tiene una única preimagen. Gráficamente, considerando el criterio de la recta horizontal para inyectividad y sobreyectividad, se tiene que f es biyectiva, cuando cualquier recta horizontal intersecta al gráfico de f en un solo punto:



Si esto no ocurre, es decir, si existe una recta horizontal, que no intersecta al gráfico de f, o que la intersecta en más de un punto, entonces f no es biyectiva.

Ejercicio 2.6.2. *Sea f la función definida por*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}. \end{aligned}$$

Determine si f es biyectiva. Si no lo es, redefina f de modo que sea biyectiva.

a) *En forma algebraica.*

Solución. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} f &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 \geq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \geq 2\} \\ &= \left]-\infty, 0\right] \cup \left[4, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Intentamos demostrar que f es inyectiva. Se tiene que

$$\begin{aligned}\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{x_1^2 - 4x_1} = \sqrt{x_2^2 - 4x_2} \\ &\Rightarrow x_1^2 - 4x_1 = x_2^2 - 4x_2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 = x_2^2 - 4x_2 + 4 \\ &\Rightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \\ &\Rightarrow |x_1 - 2| = |x_2 - 2|.\end{aligned}$$

En la última igualdad, no podemos eliminar las barras del valor absoluto, por lo que f no es inyectiva. Sin embargo, si $x_1, x_2 \geq 2$, entonces

$$|x_1 - 2| = |x_2 - 2| \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

De este modo, si $\operatorname{Dom} f = [4, +\infty[$, entonces f es inyectiva.

Analicemos la sobreyectividad de f restringida. Su recorrido es

$$\begin{aligned}\operatorname{Rec} f &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [4, +\infty[\text{ con } y = \sqrt{x^2 - 4x},\ y \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [4, +\infty[\text{ con } x = 2 \pm \sqrt{y^2 + 4},\ y \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \text{ (como } y^2 + 4 \text{ es siempre positivo, no hay más restricciones)} \\ &= [0, +\infty[\,.\end{aligned}$$

Así, como $\operatorname{Cod} f = \mathbb{R}$, entonces f no es sobreyectiva, pero si consideramos que $\operatorname{Cod} f = [0, +\infty[$, entonces f redefinida es sobreyectiva. En consecuencia, f redefinida y biyectiva corresponde a

$$\begin{aligned}f : [4, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}.\end{aligned}$$

b) *En forma gráfica.*

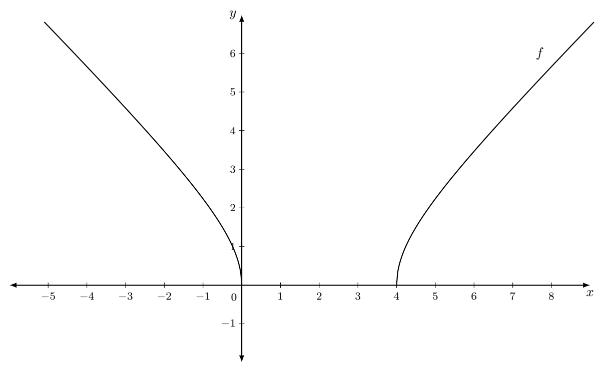
Solución. Consideremos la ecuación

$$y = \sqrt{x^2 - 4x}. \tag{2.6.1}$$

Elevando al cuadrado y operando según corresponda, obtenemos la ecuación

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1, \tag{2.6.2}$$

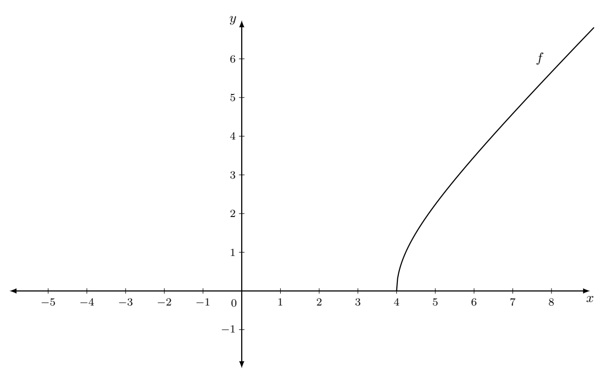
la cual corresponde a una hipérbola. Ésta cónica tiene centro en $(2,0)$ y eje transversal paralelo al eje x, con $a = b = 2$. Como $y \geq 0$, entonces el gráfico de f es



Por la prueba de la recta horizontal, es evidente que f no es biyectiva, más específicamente, f no es inyectiva ni sobreyectiva. También de su gráfico, apreciamos que si $\operatorname{Dom} f = [4, +\infty[$, entonces f es inyectiva, y si $\operatorname{Cod} f = [0, +\infty[$, entonces f redefinida es sobreyectiva. Por lo tanto, f redefinida y biyectiva es

$$\begin{aligned} f : [4, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}, \end{aligned}$$

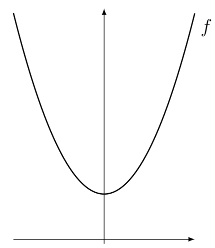
y su gráfico es

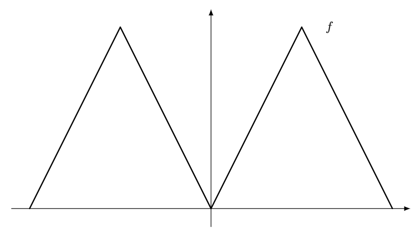


□

2.7. Funcion par y función impar.

Ejercicio 2.7.1. *Considere los siguientes dos gráficos de funciones:*

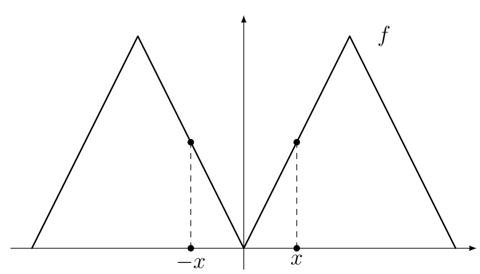
- 

- 

a) *¿Qué tipo de simetría se observa en cada gráfico dado?*

Solución. Ambos gráficos son simétricos con respecto al eje y.

b) *Consideremos el gráfico de una de estas funciones, y la figura*



¿Qué relación se observa entre $f(x)$ y $f(-x)$?

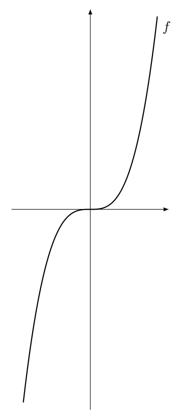
Solución. La relación es que $f(x) = f(-x)$. $\square$

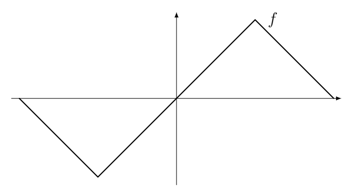
Definición 2.7.1. *Una función $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **par**, si y sólo si,*

- $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$.
- $\forall x \in \operatorname{Dom} f : f(x) = f(-x)$.

Observación 2.7.1. El gráfico de una función par es simétrico con respecto al eje y.

Ejercicio 2.7.2. *Considere los siguientes gráficos de funciones:*

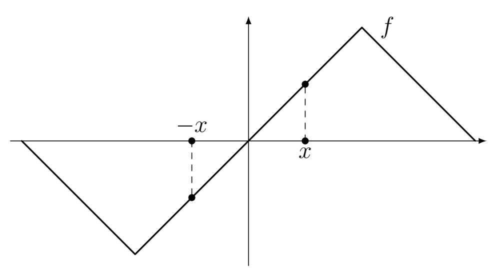
- 

- 

a) *¿Qué tipo de simetría se observa en cada gráfico dado?*

Solución. Observamos que cada gráfico es simétrico con respecto al origen.

b) *Consideremos el gráfico de una de estas funciones, y la figura*



¿Qué relación existe entre $f(x)$ y $f(-x)$?

Solución. La relación es que $f(-x) = -f(x)$. □

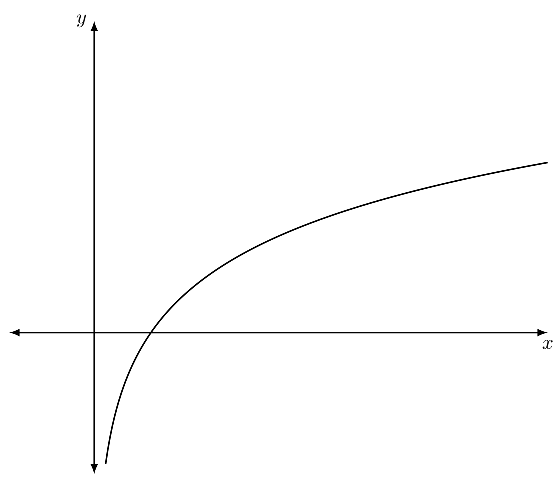
Definición 2.7.2. *Una función* $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice* ***impar****, si y sólo si,*

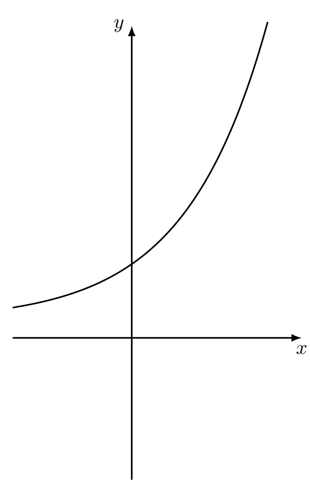
- $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$.
- $\forall x \in \operatorname{Dom} f : f(x) = -f(-x)$.

Observación 2.7.2. El gráfico de una función impar es simétrico con respecto al origen. Es decir, una parte del gráfico corresponde a una rotación en 180° con respecto al origen de la otra parte.

2.8. Función creciente y decreciente.

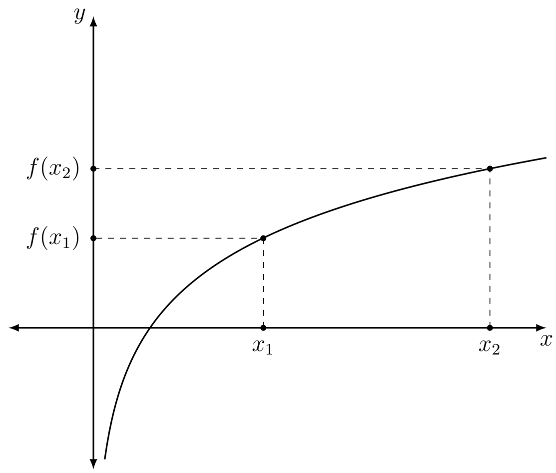
Considere los siguientes dos gráficos de funciones:

- 

- 

Intuitivamente, en cada figura vemos que, en la medida que nos movemos hacia la derecha a través del gráfico, éste crece. Cada uno de estos gráficos, corresponde a una función estrictamente creciente.

Ejercicio 2.8.1. *Considere el gráfico:*



¿Cuál de los valores x_1 y x_2, tiene mayor imagen?

Solución. Note que, en el gráfico de f, $f(x_2)$ está más alto que $f(x_1)$, por lo que

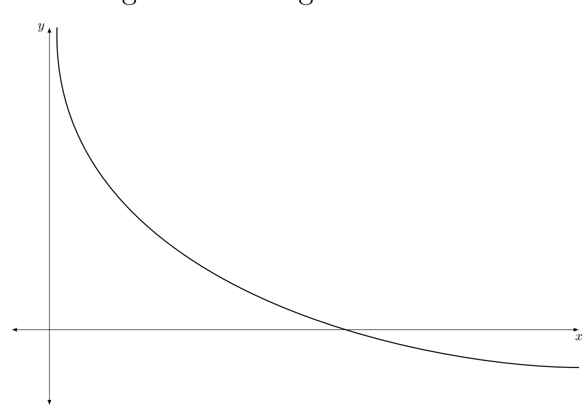
$$f(x_1) < f(x_2).$$

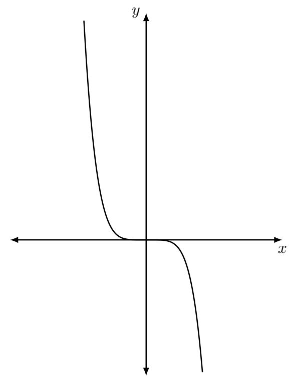
□

Definición 2.8.1. *Sea $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es **estrictamente creciente** si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Por otro lado, considere los siguientes dos gráficos de funciones:

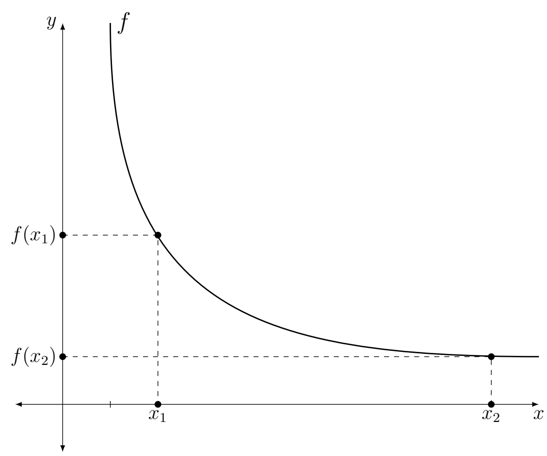




■

Intuitivamente, en cada gráfico se observa que en la medida que nos movemos hacia la derecha a través del gráfico, este decrece. Cada uno de estos gráficos, corresponde a una función estrictamente decreciente.

Ejercicio 2.8.2. *Considere el gráfico:*



¿Cuál de los valores x_1 y x_2, tiene menor imagen?

Solución. Note que, en el gráfico de f, $f(x_1)$ está más alto que $f(x_2)$, por lo que

$$f(x_1) > f(x_2).$$

□

Definición 2.8.2. *Sea* $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función. Se dice que* f *es* ***estrictamente decreciente*** *si*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Observación 2.8.1. Podemos ver que en el caso de las funciones estrictamente crecientes, mientras mayor sea el valor x, mayor es su imagen $f(x)$. En el caso de funciones estrictamente decrecientes, a mayor valor de x, menor es su imagen $f(x)$.

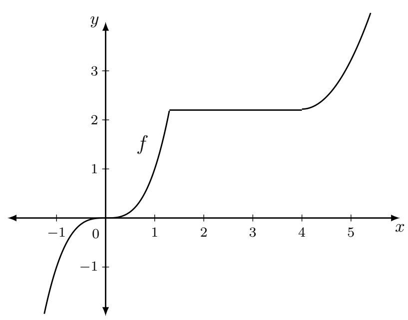
Observación 2.8.2. Usando la prueba de la recta horizontal para inyectividad, apreciamos que si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, entonces f es inyectiva.

Más generalmente, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.8.3. *Sea $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que*

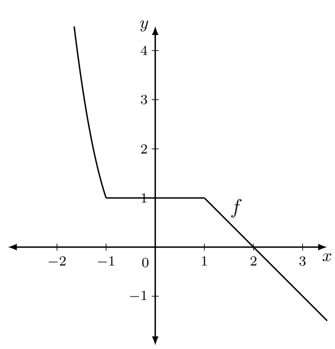
- *f es **creciente** si*

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



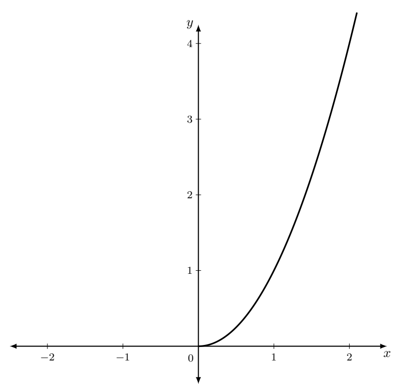
- *f es **decreciente** si*

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom} f : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Observación 2.8.3. De la última definición, se deduce que si una función es estrictamente creciente (estrictamente decreciente), entonces es también una función creciente (decreciente).

Observación 2.8.4. Observemos el gráfico de la función f definida por $f(x) = x^2$, para $x \geq 0$:



el cual corresponde a una semiparábola. En él podemos apreciar que f es una función creciente, esto quiere decir que si tenemos una desigualdad como

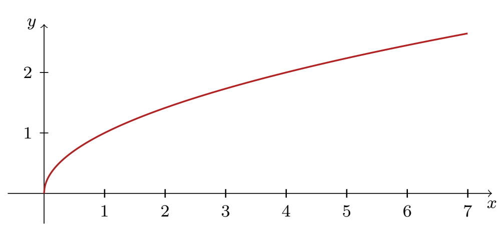
$$x_1 \leq x_2,$$

con x_1 y x_2 no negativos, entonces

$${x_1}^2 \leq {x_2}^2.$$

Esto lo podemos interpretar como que si elevamos al cuadrado en ambos miembros de una desigualdad, donde ambos miembros son no negativos, entonces su sentido se mantiene.

Por otro lado, veamos el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$:



el cual también corresponde a una semiparábola. Vemos que esta función también es creciente, esto quiere decir que si tenemos una desigualdad como

$$x_1 \leq x_2,$$

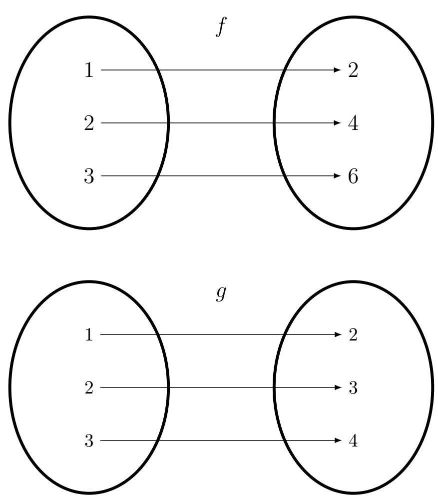
con x_1 y x_2 no negativos, entonces

$$\sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}.$$

Esto lo podemos interpretar, como que si extraemos raíz cuadrada en ambos miembros de una desigualdad, evidentemente con ambos miembros no negativos, entonces el sentido de ésta se mantiene.

2.9. Operaciones con funciones.

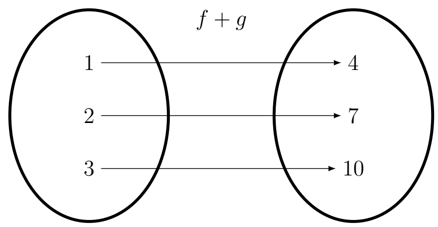
Considere las funciones f y g del diagrama:



Note que

- $f(1) + g(1) = 2 + 2 = 4.$
- $f(2) + g(2) = 4 + 3 = 7.$
- $f(3) + g(3) = 6 + 4 = 10.$

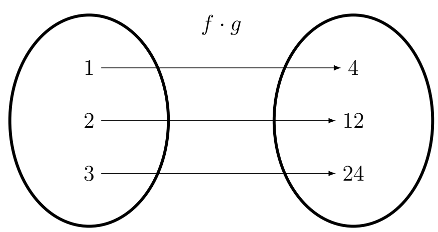
De este modo, definimos la **función suma** de f y g, la cual se denota por $f + g$:



Análogamente, del hecho que

- $f(1) \cdot g(1) = 4$.
- $f(2) \cdot g(2) = 12$.
- $f(3) \cdot g(3) = 24$.

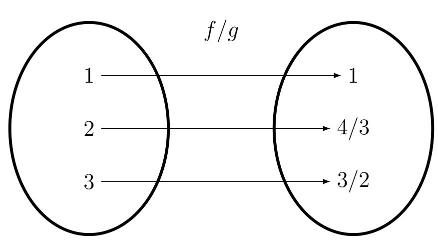
obtenemos la **función producto** entre f y g, la cual se denota por $f \cdot g$:



Finalmente, como

- $\dfrac{f(1)}{g(1)} = 1$.
- $\dfrac{f(2)}{g(2)} = \dfrac{4}{3}$.
- $\dfrac{f(3)}{g(3)} = \dfrac{3}{2}$,

Obtenemos la **función cuociente** de f y g, en ese orden, la cual se denota por $\dfrac{f}{g}$. Es decir,



Definición 2.9.1. *Sean $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define la función:*

- *Suma:*

$$\begin{aligned} f + g : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x). \end{aligned}$$

- *Producto:*

$$\begin{aligned} f \cdot g : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

- *Cuociente:*

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

  siempre que $g(x) \neq 0$, para todo $x \in X$.

- *Producto por un escalar ($\lambda \in \mathbb{R}$):*

$$\begin{aligned} \lambda f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.1. *Sean las funciones f y g definidas por*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : \operatorname{Dom} g \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

Realizando restricciones si es necesario, obtenga $f + g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$.

Solución. Note que

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \text{ y } \operatorname{Dom} g = [-1, +\infty[\,.$$

Vemos que $\operatorname{Dom} f \neq \operatorname{Dom} g$, por lo que para poder definir $f + g$ y $f \cdot g$, debemos restringir f y g de modo que tengan el mismo dominio. El dominio en común X será la intersección de sus dominios, es decir

$$X = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g = [-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[\,.$$

Consideramos las restricciones de f y de g cuyo dominio es X, es decir

$$\begin{aligned} f : [-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : [-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \sqrt{x + 1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} f + g : [-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f + g)(x) = \frac{x^2}{4 - x^2} + \sqrt{x + 1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f \cdot g : [-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \cdot g)(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x + 1}}{4 - x^2}. \end{aligned}$$

Además, para definir $\dfrac{f}{g}$, necesitamos que g no se anule en ningún punto de su dominio, por lo que definimos el conjunto

$$\begin{aligned} D &= \{x \in X : g(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in [-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[\, : \sqrt{x + 1} \neq 0\} \\ &= \{x \in [-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[\, : x \neq -1\} \\ &= \,]-1, 2[\, \cup \,]2, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Ahora consideramos las restricciones de f y g, cuyo dominio es D, es decir

$$\begin{aligned} f :]-1, 2[\cup]2, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2} \end{aligned}$$

y

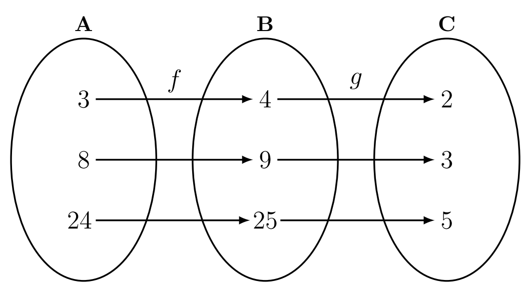
$$\begin{aligned} g :]-1, 2[\cup]2, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

De este modo,

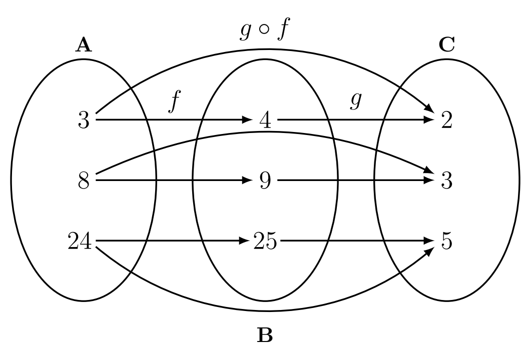
$$\begin{aligned} \frac{f}{g} :]-1, 2[\cup]2, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{(4 - x^2) \cdot \sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

$\square$

Considere las funciones f y g, las cuales están representadas en el mismo diagrama:



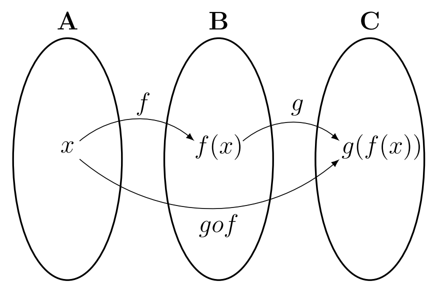
Note que $\operatorname{Rec} f = \operatorname{Dom} g$. Representamos la **función compuesta** $g \circ f$, del siguiente modo:



Vemos que, para cualquier $x \in A$, el valor de $(g \circ f)(x)$ corresponde al valor obtenido de aplicar primero f a x y después g a $f(x)$. Es decir,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

como se describe en el dibujo



En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.9.2. *Sean*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : B &\to C \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

dos funciones. La función ***compuesta*** $g \circ f$ *está definida por*

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Ejercicio 2.9.2. *Sean las funciones f y g definidas por*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : \operatorname{Dom} g \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = \sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

Defina, realizando restricciones si es necesario, las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, ¿son la misma función?

Solución. Recordemos, del ejercicio anterior, que

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \text{ y } \operatorname{Dom} g = [-1, +\infty[\,.$$

- Queremos obtener $f \circ g$. Aplicamos primero g, es decir, la función que está más a la derecha en la notación $f \circ g$, y luego f, por lo que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{2.9.1}$$

  Para poder definir $f \circ g$, necesitamos verificar que su dominio no es $\emptyset$. Para que x pertenezca al dominio de $f \circ g$, en virtud de (2.9.1), en primer lugar, ha de poder aplicársele g, es decir x debe pertenecer a $\operatorname{Dom} g = [-1, +\infty[$, o sea $x \geq -1$. En segundo lugar, también en virtud de (2.9.1), a $g(x)$ ha de poder aplicársele f, por lo que $g(x)$ debe pertenecer al dominio de f. Note que

$$\begin{aligned} g(x) \in \operatorname{Dom} f &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \in \operatorname{Dom} f \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \neq \pm 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \neq 2 \\ &\Leftrightarrow x+1 \neq 4 \\ &\Leftrightarrow x \neq 3. \end{aligned}$$

  De este modo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}(f \circ g) &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \operatorname{Dom} g \ \wedge \ g(x) \in \operatorname{Dom} f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \ \wedge \ x \neq 3\} \\ &= [-1, +\infty[\, \cap (\mathbb{R} - \{3\}) \\ &= [-1, 3[\, \cup\,]3, +\infty[\, \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Como este conjunto no es vacío, entonces es posible definir $f \circ g$ como sigue:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(\sqrt{x+1})\\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2}{4-(\sqrt{x+1})^2}\\ &= \frac{x+1}{3-x}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f \circ g : [-1,3[\cup]3,+\infty[&\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f \circ g)(x) = \frac{x+1}{3-x}.\end{aligned}$$

- Calculamos ahora $g \circ f$. Note que, en este caso

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

por lo que a un valor admisible de x, ha de aplicarsele primero f, y luego a su imagen $f(x)$ se le debe aplicar la función g. De este modo, para que x pertenezca a $\operatorname{Dom}(g \circ f)$, entonces, en primer lugar x debe pertenecer a $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, por lo que $x \neq \pm 2$. En segundo lugar, $f(x)$ debe pertenecer a $\operatorname{Dom} g$. Note que

$$\begin{aligned}f(x) \in \operatorname{Dom} g &\Leftrightarrow \frac{x^2}{4-x^2} \in \operatorname{Dom} g\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{4-x^2} \geq -1\\ &\Leftrightarrow -2 < x < 2.\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom}(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R} : x \in \operatorname{Dom} f \ \wedge \ f(x) \in \operatorname{Dom} g\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2 \ \wedge \ -2 < x < 2\}\\ &=]-2, 2[\neq \emptyset.\end{aligned}$$

Así, podemos definir $g \circ f$ como

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2}+1} \\ &= \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}.\end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} g \circ f : \left]-2,2\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Veamos si $f \circ g = g \circ f$. En general, dos funciones h y l son iguales, si

$$\operatorname{Dom} h = \operatorname{Dom} l = X$$

y

$$\forall x \in X : h(x) = l(x) \tag{2.9.2}$$

Es evidente que

$$g \circ f \neq f \circ g,$$

dado que no tienen el mismo dominio. Otro argumento sería, que por ejemplo

$$(f \circ g)(0) = \frac{1}{3} \text{ y } (g \circ f)(0) = 1,$$

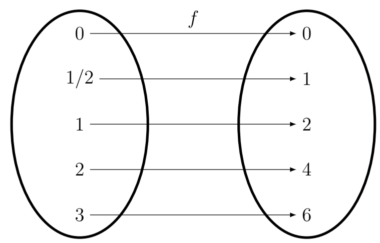
por lo que la condición (2.9.2) no se cumple. □

Observación 2.9.1. El ejemplo anterior nos muestra que en general, la composición de funciones no es conmutativa, o sea, no siempre es válido que

$$g \circ f = f \circ g.$$

2.10. Función Inversa.

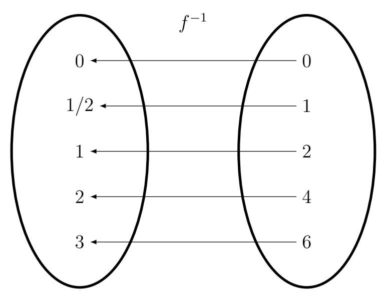
Ejercicio 2.10.1. *Considere la función f del diagrama*



¿Es f biyectiva?

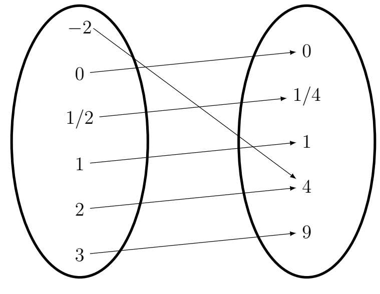
Solución. Como cada elemento de $\operatorname{Cod} f$ tiene una única preimagen, entonces f es biyectiva. $\square$

Observación 2.10.1. En el caso del ejercicio anterior, podemos definir la **función inversa** de f, la cual se denota por f^{-1}, como la función que a cada elemento de $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ le asocia su preimagen por f. De este modo, su diagrama es



En general, para una función f biyectiva dada, podemos definir su función inversa f^{-1}, como aquella función que a cada elemento de $\operatorname{Cod} f$ le asocia como imagen su preimagen por f. La pregunta es ahora, ¿por qué f debe ser biyectiva? Analizemos esto en los siguientes dos ejemplos.

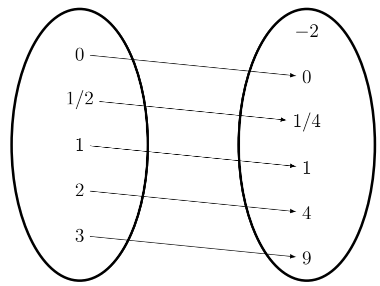
Ejercicio 2.10.2. *Considere la función f del diagrama*



¿Por qué no es posible definir f^{-1}?

Solución. Note que $4 \in \operatorname{Cod} f$ tiene dos preimágenes, las cuales son 2 y -2, por lo que f no es inyectiva, luego no es biyectiva. En este caso, $f^{-1}(4)$ puede ser 2 o -2, por lo que no es posible definir f^{-1}. $\square$

Ejercicio 2.10.3. *Considere la función f del diagrama*



¿Por qué no es posible definir f^{-1}?

Solución. Note que $-2 \in \operatorname{Cod} f$ no tiene preimagen, por lo que f no es sobreyectiva, luego no es biyectiva. Así, $f^{-1}(-2)$ no existe. De este modo, no es posible definir f^{-1}. $\square$

Definición 2.10.1. *Sean A, B dos conjuntos no vacíos. Sea*

$$f : A \to B$$

*una función biyectiva. Se define la **función inversa** de f, la cual es denotada como f^{-1}, como*

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ b &\mapsto f^{-1}(b) = a, \end{aligned}$$

con

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow b = f(a), \tag{2.10.1}$$

para todo $a \in A, b \in B$.

Observación 2.10.2. La equivalencia (2.10.1) nos dice que como $b = f(a)$, entonces $f^{-1}(b)$ corresponde a la preimagen de b a través de la función f, es decir a a.

Ejercicio 2.10.4. *Sea f la función definida por*

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1. \end{aligned}$$

a) *Obtenga, redefiniendo f si es necesario, su función inversa f^{-1}.*

Solución. En este caso $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.

- Analizamos la inyectividad de f. Se tiene que

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \\ &\Rightarrow |x_1| = |x_2|, \end{aligned}$$

por lo que f no es inyectiva. Sin embargo, si $x_1, x_2 \geq 0$, entonces

$$|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2.$$

De este modo

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

es inyectiva.

- Analizamos la sobreyectividad de f restringida, dado que queremos que sea biyectiva, es decir inyectiva y sobreyectiva a la vez. Vemos que

$$\operatorname{Rec} f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [0, +\infty[\text{ con } y = x^2 + 1\}.$$

Despejando la preimagen x de la igualdad $y = x^2 + 1$, obtenemos que $x = \pm\sqrt{y-1}$. Sin embargo, como $x \in [0, +\infty[$, entonces escogemos como preimagen $x = \sqrt{y-1}$. De este modo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Rec} f &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [0, +\infty[\text{ con } x = \sqrt{y-1}\right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\} \\ &= [1, +\infty[\,. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Rec} f \neq \operatorname{Cod} f$, entonces f no es sobreyectiva. Sin embargo, si $\operatorname{Cod} f = [1, +\infty[$, entonces f es sobreyectiva.

De este modo, f redefinida como

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\to [1, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

es biyectiva. Su función inversa f^{-1}, la cual a cada elemento de $y \in [1, +\infty[$ le asocia su preimagen x por f en $[0, +\infty[$, es

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0, +\infty[&\to [1, +\infty[\\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}. \end{aligned}$$

Si cambiamos x por y en $\operatorname{Dom} f^{-1}$, concluimos que la función inversa de f es

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0, +\infty[&\to [1, +\infty[\\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

b) *Para f biyectiva, obtenga las funciones compuestas $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$.*

Solución. Tenemos que

$$\operatorname{Dom}(f \circ f^{-1}) = [0, +\infty[= \operatorname{Dom} f^{-1} \text{ y } \operatorname{Dom}(f^{-1} \circ f) = [1, +\infty[= \operatorname{Dom} f.$$

Por otro lado,

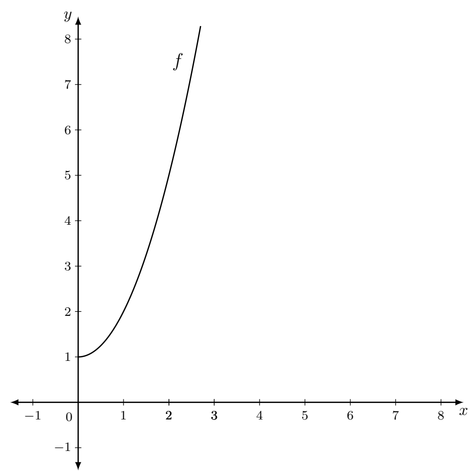
$$\forall x \in [0, +\infty[: (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x$$

y

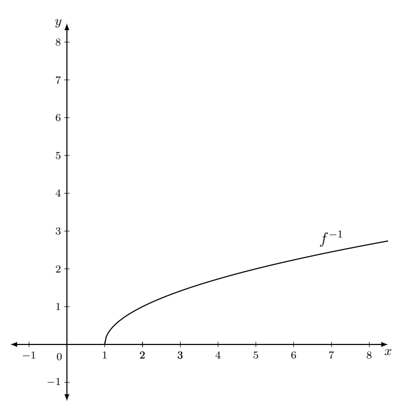
$$\forall x \in [1, +\infty[: (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = x.$$

c) *Grafique f biyectiva y f^{-1} en un mismo plano cartesiano ¿Con respecto a qué recta, son estos gráficos simétricos entre sí?*

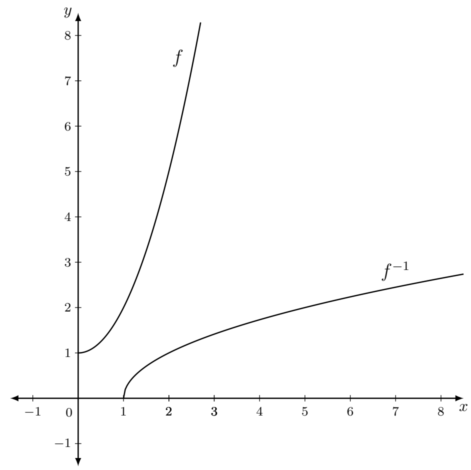
Solución. El gráfico de f biyectiva corresponde a la parte de la párabola de ecuación $x^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)(y-1)$, donde $x \geq 0$:



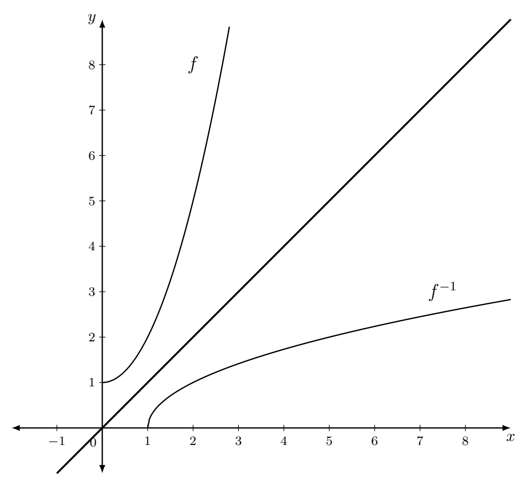
y el gráfico de f^{-1} corresponde a la parte de la párabola de ecuación $y^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)(x-1)$, donde $y \geq 0$:



Si juntamos ambos gráficos en un mismo plano cartesiano:



Podemos ver que son simétricos con respecto a la recta $y = x$:



$\square$

Algunas propiedades de la función inversa:

- Si $f : A \to B$ es biyectiva entonces

$$\forall x \in A : (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

y

$$\forall x \in B : (f \circ f^{-1})(x) = x$$

(esto quiere decir, que la función compuesta entre una función y su inversa, corresponde a la función identidad, es decir, a la función que a cada x le asocia como imagen el mismo valor x).

- Si una función f tiene función inversa, entonces esta es única.
- Dada una función $f : A \to B$ biyectiva, se puede mostrar que su inversa f^{-1} es también biyectiva, por lo que posee inversa. Más aún, $(f^{-1})^{-1} = f$ (es decir, la inversa de la inversa de una función, es la misma función).
- Los gráficos de f y f^{-1} son simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$.

2.11. Aplicaciones de las funciones.

Existen variadas situaciones que involucran dos variables, las cuales se relacionan mediante una función. En estos casos, es importante distinguir cuál de estas variables es la variable independiente (la cual representamos en el eje x) y cuál es la variable dependiente (la cual representamos en el eje y).

Ejercicio 2.11.1. *En cada situación siguiente, indique:*

a) ¿Cuáles son las variables involucradas?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿Cuál es la función que relaciona a ambas variables?

1) *El costo total al comprar una cierta cantidad de botellas de bebida, si cada botella cuesta* \$900.

   Solución. Se tiene que:

   a) Las variables involucradas son el costo pagado por el total de bebidas compradas, el cual llamamos C y el número de bebidas compradas, el cual denotamos por b.

   b) El costo total de las bebidas depende de la cantidad de bebidas compradas, luego C es la variable dependiente y b es la variable independiente.

   c) La función que relaciona a estas variables es $C(b) = 900b$ con $b \geq 0$.

2) *El área de un terreno cuadrado que se quiere formar usando una cuerda cualquiera.*

Solución. Se tiene que

a) Las variables son el área del terreno, denotado por A, y la longitud de la cuerda, denotado por x.

b) El área depende de la longitud de la cuerda, luego la variable dependiente es A y la variable independiente es x.

c) Como la cuerda mide x unidades, entonces cada lado del terreno cuadrado medirá $\frac{x}{4}$ unidades. De este modo, la función que relaciona a las variables es $A(x) = \dfrac{x^2}{16}$, con $x \geq 0$.

3) *El número de bacterias presentes en un cultivo en un instante dado, si inicialmente hay 2000 y estas se van triplicando minuto a minuto.*

Solución. Se tiene que

a) Las variables involucradas son el número de bacterias, el cual denotamos por N, y el tiempo en minutos, el cual denotamos por t.

b) El número de bacterias en el cultivo depende del tiempo transcurrido, luego N es la variable dependiente y t es la variable independiente.

c) La función que relaciona a estas variables es $N(t) = 3^t \cdot 2000$, con $t \geq 0$.

4) *La concentración de sal en un estanque de 5 litros de capacidad, el cual además posee 2 kg de sal, el cual se está llenando con agua pura.*

Solución. Se tiene que

a) Las variables son la concentración de sal en el estanque, la cual denotamos por C, y los litros de agua pura en el estanque, lo cual denotamos por l.

b) La concentración de sal depende de la cantidad de litros de agua en el estanque, por lo que C es la variable dependiente y l es la variable independiente.

c) La función que relaciona ambas variables es $C(l) = \dfrac{2}{l}$, con $0 \leq l \leq 5$.

2.11.1. Función lineal.

En variadas situaciones, la función que relaciona a dos variables, corresponde a una función cuyo gráfico es una recta. Es decir, si la variable independiente es x y la variable dependiente es y, entonces la función tiene la forma

$$y(x) = mx + b, \tag{2.11.1}$$

donde m es la pendiente y b determina su intersección de la recta con el eje y. Una función de la forma (2.11.1), se dice una **función lineal**. En este caso, decimos que las variables involucradas x e y se relacionan mediante un **modelo lineal**.

¿Cómo determinar si un modelo es lineal? La respuesta es que cuando la variable independiente varía de 1 unidad en 1 unidad, entonces la variable dependiente varía en forma constante, donde tal constante determina el valor de la pendiente del modelo. Intentemos comprender esto en los siguientes ejemplos:

Ejercicio 2.11.2. *Determine en cada caso, las variables involucradas, y si el modelo es lineal. Finalmente, obtenga el modelo que relaciona a ambas variables:*

a) *El peso de Andrés en un mes dado, si actualmente pesa 107 kg, y si mediante una dieta pretende bajar 2 kg por mes.*

Solución. Las variables involucradas son el peso de Andrés, denotado por P, y los meses transcurridos luego de iniciada la dieta, denotado por m. Como el peso depende de los meses transcurridos de la dieta, entonces P es la variable dependiente y m es la variable independiente. Note que mes a mes, el peso va disminuyendo en forma fija, de 2 en 2, por lo tanto estas variables se relacionan mediante un modelo lineal, cuya pendiente es -2. La función que relaciona a ambas variables es

$$P(m) = 107 - 2m, \ m \geq 0.$$

b) *La cantidad de contagiados por un virus en Concepción en un cierto mes, si inicialmente hay un sólo contagiado y mes a mes estos se van duplicando.*

Solución. Las variables involucradas son la cantidad de contagiados c, y los meses transcurridos, denotado por t. Note que c es la variable dependiente y t es la variable independiente. Mes a mes, la cantidad de contagiados se va duplicando, es decir, la cantidad de contagiados no aumenta en forma fija, por lo que el modelo no es lineal. En este caso, la función es

$$c(t) = 2^t, \ t \geq 0.$$

c) *El costo de un plan teléfonico mensual, el cual consiste en un cargo fijo de* \$14000 *más* \$40 *por cada minuto hablado.*

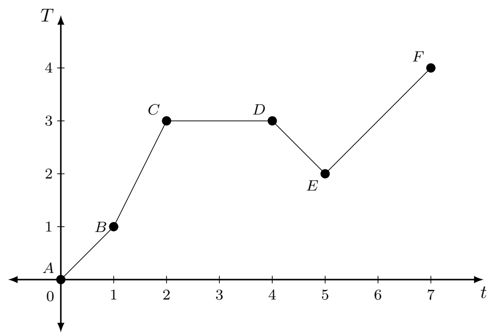
Solución. Las variables involucradas son el costo C del plan y la cantidad de minutos hablados m. Note que C depende de m. Además, por cada minuto adicional que hablo, el costo aumenta de \$40 en \$40, por lo que el modelo es lineal de pendiente 40. La función que relaciona ambas variables es

$$C(m) = 40m + 14000, \ m \geq 0.$$

□

Veamos el siguiente ejemplo, el cual corresponde a un modelo lineal por tramos:

Ejercicio 2.11.3. *En un laboratorio, se está fabricando un medicamento a bajas temperaturas. El gráfico muestra la temperatura, en grados Celsius, del medicamento durante las 7 horas que demoró su creación.*



Considere los intervalos determinado por los segmentos.

a) *Obtenga la rapidez con la que varía la temperatura en cada intervalo de tiempo.*

Solución. En un intervalo dado, la rapidez pedida la obtenemos calculando $\frac{\triangle T}{\triangle t}$, donde $\triangle T$ corresponde a la variación de la temperatura y $\triangle t$ corresponde a la variación de tiempo en ese intervalo. Como T es la variable dependiente y t es la variable independiente, entonces la rapidez $\frac{\triangle T}{\triangle t}$ corresponde a la pendiente del segmento dado. De este modo:

- En $[0,1]$, $\dfrac{\triangle T}{\triangle t} = \dfrac{1}{1} = 1\ \frac{C^\circ}{hr}$
- En $[1,2]$, $\dfrac{\triangle T}{\triangle t} = \dfrac{2}{1} = 2\ \frac{C^\circ}{hr}$
- En $[2,4]$, $\dfrac{\triangle T}{\triangle t} = \dfrac{0}{2} = 0\ \frac{C^\circ}{hr}$
- En $[4,5]$, $\dfrac{\triangle T}{\triangle t} = \dfrac{-1}{1} = -1\ \frac{C^\circ}{hr}$
- En $[5,7]$, $\dfrac{\triangle T}{\triangle t} = \dfrac{2}{2} = 1\ \frac{C^\circ}{hr}$

b) *¿En qué intervalo la temperatura aumentó más rapido? ¿Cómo se aprecia esto en el gráfico?*

Solución. Según lo obtenido en *a*), la temperatura aumentó con mayor rapidez en el intervalo $[1,2]$. En el gráfico, esto se puede apreciar observando que el segmento que está más inclinado con respecto a la horizontal es el correspondiente al intervalo $[1,2]$. $\square$

Observación 2.11.1. En un modelo lineal cuya variable independiente es el tiempo, la pendiente se puede interpretar como la rapidez constante con la que varía la variable dependiente. En general, para un modelo lineal cualquiera, la pendiente la podemos interpretar como la razón de cambio constante de la variable dependiente con respecto a la variable independiente.

Ejercicio 2.11.4. *Benjamín sale de su casa con destino a una playa y viaja con una rapidez constante de* $70\frac{km}{h}$. *Catalina sale de su casa a la misma hora y con destino a la misma playa, viajando con una rapidez constante de* $78\frac{km}{h}$. *Un helicóptero de carabineros que resguarda el tránsito, los capta en el momento que Benjamín lleva recorrido 30 kms y Catalina lleva recorrido 18 kms.*

a) *Determine la función que nos permite calcular la distancia* d_B *que lleva recorrida Benjamín desde su casa, t horas después de ser observado por el helicóptero.*

Solución. Como Benjamín en 1 hora recorre 70 kms, entonces en t horas recorre $70t$ kms. De este modo, dado que ya lleva recorridos 30 kms, la función pedida es

$$d_B(t) = 30 + 70t, \ t \geq 0.$$

b) *Determine la función que nos permite calcular la distancia* d_C *que lleva recorrida Catalina desde su casa, t horas después de ser observada por el helicóptero.*

Solución. Análogamente a lo razonado para el caso de Benjamín, la función en este caso es

$$d_C(t) = 18 + 78t, \ t \geq 0.$$

c) *¿En qué instante Catalina y Benjamín llevan recorrida la misma distancia?*

Solución. Para determinar el tiempo pedido, resolvemos la ecuación

$$d_B(t) = d_C(t),$$

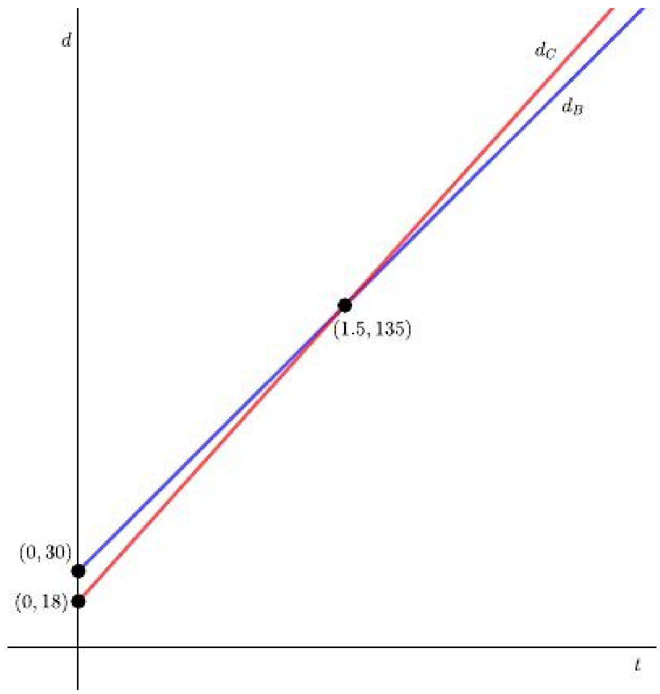
o sea,

$$30 + 70t = 18 + 78t.$$

La solución es $t = 1{,}5$, por lo que esto ocurrió 1 hora y media después de iniciado el trayecto de ambos. $\square$

c) *Grafique ambas funciones. Si la playa queda muy lejos de la casa de ambos, ¿Quién llegará primero a esta?*

Solución. En cada caso, el gráfico corresponde a una recta. De c), estas rectas se intersectan en el punto $(1,5;135)$. Además, el gráfico de d_B pasa por $(0,30)$ y el gráfico de d_C por $(0,18)$. De este modo, obtenemos



En esta imagen se aprecia que luego de 1 hora y media, el gráfico de d_C está por sobre el gráfico de d_B. Esto quiere decir que para un tiempo grande, la distancia recorrida por Catalina será mayor que la recorrida por Benjamín, por lo que ella llegará primero a destino.

2.11.2. Función cuadrática.

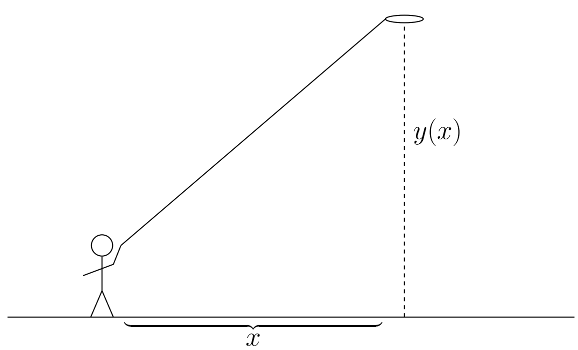
Existen algunas situaciones, las cuales se modelan mediante una función cuyo gráfico es una párabola. Más específicamente, si x es la variable independiente e y la variable dependiente, entonces estas se relacionan mediante una función de la forma

$$y(x) = ax^2 + bx + c, \tag{2.11.2}$$

donde a, b y c son números reales. Una función de la forma (2.11.2), recibe el nombre de **función cuadrática**.

Veamos algunos ejemplos de situaciones que involucran funciones cuadráticas:

Ejercicio 2.11.5. *En el marco de los Juegos Olímpicos de Río, se realiza la competencia de lanzamiento del disco. El competidor alemán Robert Harting realiza su lanzamiento. La altura $y(x)$ alcanzada por el disco, en el momento en que la distancia horizontal recorrida por este es x,*



viene dada por

$$y(x) = -\frac{1}{720}x^2 + \frac{1}{20}x + 2.$$

En esta disciplina, el record olímpico corresponde a un lanzamiento que recorrió una distancia horizontal de 70 metros. ¿Alcanzó Harting el recórd olímpico?

Solución. Para determinar si Harting alcanzó el recórd olímpico, debemos calcular cuál fue la distancia horizontal x recorrida por su disco una vez que toca el suelo, es decir cuando $y = 0$. Así, resolvemos la ecuación

$$-\frac{1}{720}x^2 + \frac{1}{20}x + 2 = 0,$$

la cual es equivalente a

$$x^2 - 36x - 1440 = 0.$$

Descomponiendo 1140 en factores primos si es necesario, obtenemos que la ecuación anterior queda como

$$(x - 60)(x + 24) = 0,$$

por lo que sus soluciones son $x = 60$ y $x = -24$. Como x debe ser positivo, entonces concluimos que el disco recorrió 60 metros. De este modo, Harting no batió el recórd olímpico. $\square$

Ejercicio 2.11.6. *Una librería puede vender 100 lápices pasta por semana a* \$500 *cada uno. Sin embargo, cada vez que se reduce en* \$10 *pesos el precio de cada lápiz, se pueden vender 20 lápices adicionales ¿Cuál debe ser el precio de cada lápiz para obtener la mayor ganancia posible?*
Planteamos algunas preguntas, para obtener, en primer lugar, la función que representa la ganancia obtenida al vender cada lápiz a un precio de x pesos, con $0 < x \leq 500$ (dado que el precio de cada lápiz se pretende disminuir, a partir de su precio original \$500*):*

a) *Determine una expresión algebraica de x para los pesos que bajó el precio de cada lápiz, con respecto al precio original de* \$500.

   Solución. Como el precio original es de 500 pesos y el nuevo precio es de x pesos, entonces la disminución corresponde a $500 - x$ pesos.

b) *Determine una expresión algebraica de x para el número de reducciones de* \$10 *que hubieron cuando el precio de cada lápiz bajó desde* \$500 *hasta x pesos.*

   Solución. Hacemos grupos de 10 pesos con los $500 - x$ pesos obtenidos en a). De este modo, hubieron $\frac{500-x}{10}$ reducciones.

c) *Determine una expresión algebraica de x para la cantidad de lápices adicionales se vendieron.*

Solución. Como se vendieron 20 lápices por cada reducción de \$10 en el precio, entonces en virtud de lo obtenido en b), se vendieron en total 20 veces $\frac{500-x}{10}$ lápices, es decir

$$20 \cdot \frac{500-x}{10} = 1000 - 2x \text{ lápices.}$$

d) *Determine una expresión algebraica de x para la cantidad total de lápices que se vendieron.*

Solución. Como inicialmente se pueden vender sólo 100 lápices, y adicionalmente, según c) se venden $1000 - 2x$ lápices, entonces se vendieron en total

$$100 + (1000 - 2x) = 1100 - 2x \text{ lápices.}$$

lápices.

e) *Determine una expresión algebraica de x para la ganancia total obtenida.*

Solución. La ganancia total se obtiene como

$$\textit{ganancia} = \textit{lápices vendidos} \cdot \textit{precio de cada lápiz.}$$

En virtud de d) y dado que el nuevo precio de cada lápiz es de x pesos, la ganancia viene dada por

$$G(x) = (1100 - 2x)x.$$

con $0 < x \leq 500$.

f) *Resuelva el problema inicial planteado.*

Solución. Para determinar la ganancia máxima, notamos que el gráfico de G corresponde a la parábola $y = 1100x - 2x^2$, la cual abre hacia abajo, dado que el coeficiente de x^2 es negativo. De este modo, la ganancia máxima está vinculada con la obtención del vértice. La ecuación de esta párabola es equivalente a

$$(x-275)^2 = -\frac{1}{2}(y-151250),$$

por lo cual su vértice es $(275, 151250)$. Por lo tanto, para lograr la mayor ganancia posible, se deben vender 275 lápices, obteniendo una ganancia de \$151.250. $\square$

2.12. Ejercicios propuestos.

1. Para cada relación R definida en $A \times B$, obtenga su dominio, recorrido y gráfico.

   a) $A = \{2, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 5, 12, 15\}$ y R definida por

   $$aRb \Leftrightarrow MCD(a, b) > 1, a \in A, b \in B.$$

   b) $A = \{2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$ y R definida por

   $$aRb \Leftrightarrow a + b \text{ es un número par}, a \in A, b \in B.$$

   c) $A = \{-1, 0, 1\}, B = \{-3, -1, 3\}$ y R definida por

   $$aRb \Leftrightarrow a + b < 0, a \in A, b \in B.$$

2. Considere la relación R en $\mathbb{R}^2$ definida como:

   2.1) $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$

   2.2) $xRy \Leftrightarrow 16x^2 + 9y^2 = 144$

   2.3) $xRy \Leftrightarrow 4x^2 - y^2 = 16$

   a) Obtenga algebraicamente su dominio y recorrido.

   b) Obtenga su gráfico e identifique el dominio y recorrido obtenida en a).

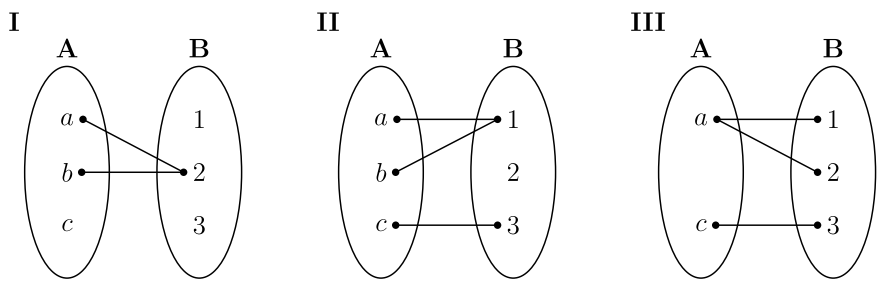
3. Considere la relación R en $\mathbb{R}^2$ definida por

   $$xRy \Leftrightarrow xy = 0.$$

a) Obtenga su gráfico.

b) ¿Es R una función? Justifique.

4. ¿Cuál(es) de los siguientes diagramas corresponde a una función de A en B? Justifique.



5. ¿Cuál de las siguientes curvas corresponde al gráfico de una función?

a) Una elipse.

b) Una hipérbola cuyo eje transversal es paralelo al eje y.

c) Una hipérbola cuyo eje transversal es paralelo al eje x.

d) Una parábola que abre hacia arriba.

e) Una recta de pendiente $m = 0$.

f) Una recta vertical.

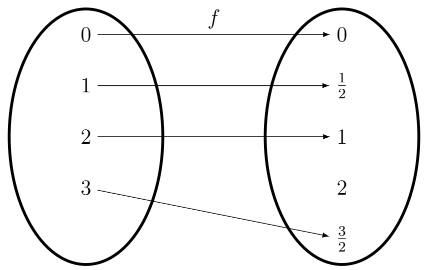
g) La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4,\ y \leq 0$.

h) La semielipse $x^2 + 4y^2 = 1,\ x \geq 0$.

i) La semielipse $x^2 + 4y^2 = 1,\ y \geq 0$.

j) La curva intersección de la hiperbóla $x^2 - y^2 = 1$ con el primer cuadrante.

6. Considere la función



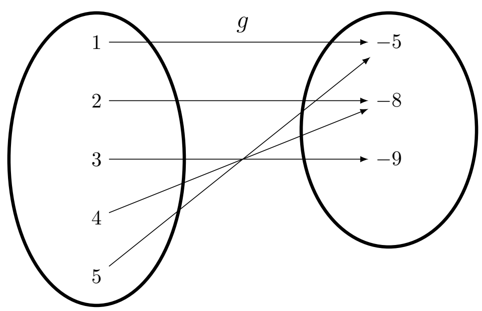
   a) Obtenga $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

   b) ¿Es f inyectiva? Justifique.

   c) ¿Es f sobreyectiva? Justifique.

   d) ¿Es f biyectiva? Justifique.

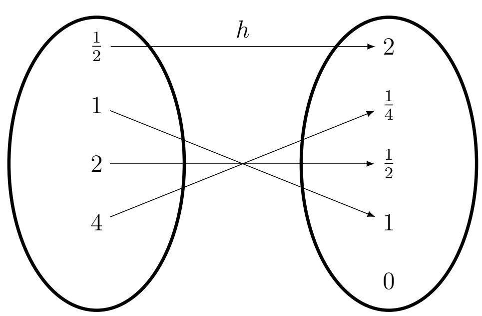
7. Consideremos la función



   a) ¿Es g inyectiva?

   b) Si g no es inyectiva, obtenga una restricción de g que sea inyectiva

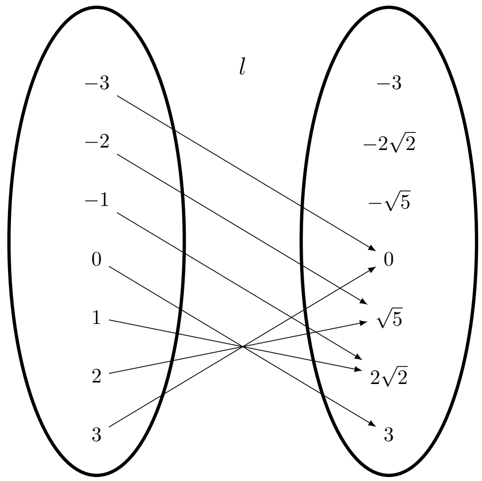
8. Consideremos la función



   a) ¿Es h sobreyectiva?

b) Si h no es sobreyectiva, restringa $\operatorname{Cod} h$, de modo que si lo sea.

9. Consideremos la función



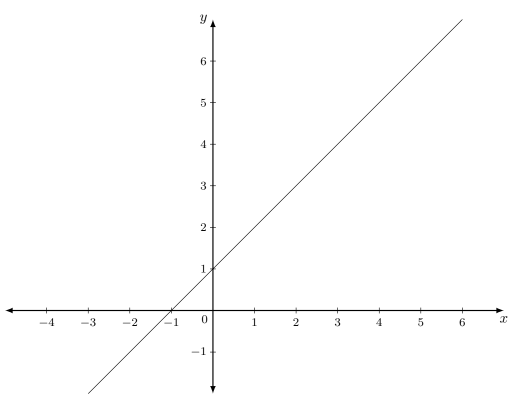
a) ¿Es l inyectiva?

b) ¿Es l sobreyectiva?

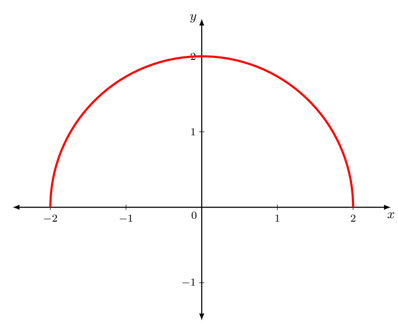
c) Si l no es biyectiva, restringa $\operatorname{Dom} l$ y $\operatorname{Cod} l$ de modo que l sea biyectiva.

10. Considere los siguientes gráficos de funciones. En cada caso, identifique su dominio y recorrido:

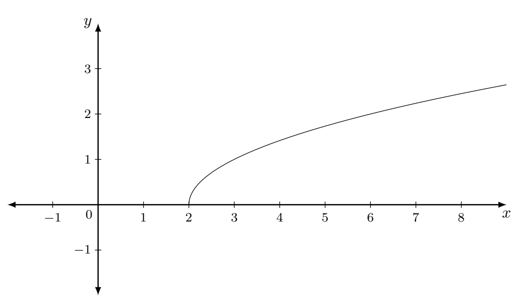
a)



b)



c)



11. Considere la función $f : \mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

    a) $f(x) = x + 1$

    b) $f(x) = x^2 + 4$

    c) $f(x) = \dfrac{1}{4 - x}$

    d) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

    e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

    f) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

    g) $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$

    h) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

    i) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

    j) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

    En cada caso, determine el dominio de f.

12. Sea

$$f : \mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 + 3.$$

    Determine

    a) La o las preimágenes de $y = 4$, si es que existen.

    b) La o las preimágenes de $y = 7$, si es que existen.

    c) La o las preimágenes de $y = 0$, si es que existen.

    d) El conjunto de todos los $y \in \mathbb{R}$ que tienen preimagen por la función f.

13. Sea

$$f : \mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{5 - x}.$$

    Determine

    a) $\mathrm{Dom}\, f$.

    b) La o las preimágenes de $y = 2$, si es que existen.

    c) La o las preimágenes de $y = 0$, si es que existen.

d) La o las preimágenes de $y = -1$, si es que existen.

e) El conjunto de todos los $y \in \mathbb{R}$ que no tienen preimagen por la función f.

14. Determine el recorrido de cada una de las funciones del ejercicio 11).

15. Considere la función $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

a) $f(x) = 6x - x^2$

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{36+4x^2}}{3}$

f) $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$

g) $f(x) = 3 + \sqrt{1 - x}$

h) $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

i) $f(x) = 1 + \sqrt{16 - 4x^2}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

Determine

15.1) El dominio de f.

15.2) El recorrido de f.

15.3) El gráfico de f, usando sus conocimientos de cónicas. Identifique en el gráfico de f, su dominio y recorrido calculados en 15.1) y 15.2).

16. Considere cada función $f : \operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = 5$

c) $f(x) = 2 - x^2$

d) $f(x) = 6x - x^2$

e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{x - 2}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{36+4x^2}}{3}$

i) $f(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$

j) $f(x) = 3 + \sqrt{1 - x}$

k) $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$

l) $f(x) = 1 + \sqrt{16 - 4x^2}$

m) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

16.1) En cada caso

16.1.1) Determine algebraicamente si f es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

16.1.2) En caso que no sea biyectiva, restrinja su dominio y/o codominio, de modo que f restringida si lo sea.

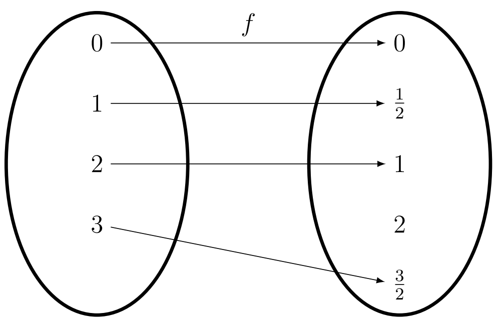
16.2) En cada caso:

16.2.1) Determine gráficamente si f es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

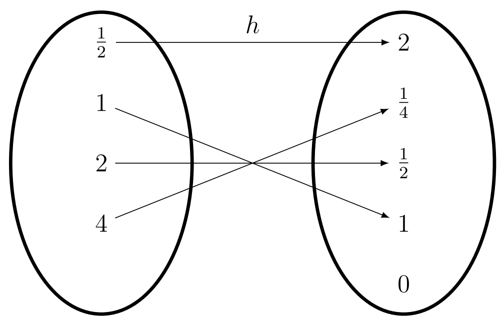
16.2.2) En caso que no sea biyectiva, restrinja su dominio y/o codominio, de modo que f restringida si lo sea.

17. Para cada función dada, obtenga, redefiniéndola si es necesario, el diagrama de su función inversa.

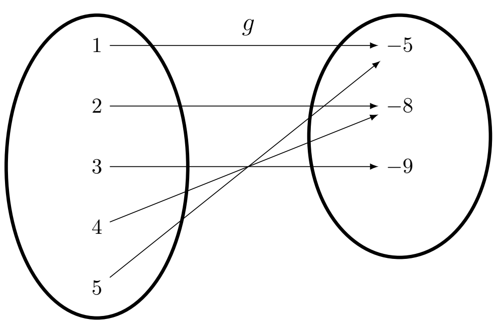
a)



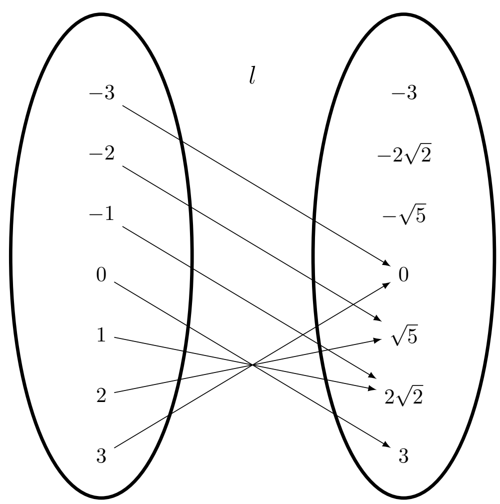
c)



b)



d)



18. Considere las funciones

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - 2x$.

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$.

   c) $f : \text{Dom}\, f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{2 - x}$.

   d) $f : \text{Dom}\, f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{36 - 9x^2}}{2}$.

   e) $f : \text{Dom}\, f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 16}}{2}$.

   18.1) Determine si f es biyectiva. En caso que no lo sea, obtenga una restricción biyectiva de f.

   18.2) Para f biyectiva obtenida en 18.1), obtenga f^{-1}.

   18.3) Compruebe que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

   18.4) Grafique f biyectiva, f^{-1}, y concluya que sus gráficos son simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$.

19. Considere las funciones inicialmente dadas en el ejercicio 17. Obtenga, restringiendo cada función si es necesario, el diagrama de:

   a) $l \circ f$

   b) $g \circ h$

   c) $l + h$

   d) $\dfrac{f}{h}$

   e) $g \cdot h$

20. Considere las funciones f y g definidas por

   a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

   b) $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

   Defina, restringiendo cada función si es necesario, las funciones $f + g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ y $\dfrac{g}{f}$.

21. Considere las funciones f y g definidas por

    a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$.

    b) $f(x) = 4 - \sqrt{4x^2 - 1}$ y $g(x) = 3x - 1$.

    c) $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{x}}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

    Defina, si es que existen, las funciones $f\,o\,g$ y $g\,o\,f$.

22. Considere las siguientes situaciones:

    a) Kilos de pan y su precio, si el kilo de pan cuesta \$350.

    b) El tiempo en minutos que demora un atleta en llegar a la meta y la distancia recorrida, si su velocidad constante es de $40\frac{m}{min}$.

    c) La cantidad de bacterias presentes en un cultivo, las cuales se triplican minuto a minuto.

    d) El volumen de un cubo y la longitud de su arista.

    e) El precio de un plan telefónico que consiste en \$20000 por cargo fijo, más \$50 por minuto hablado.

    f) La n-ésima elección presidencial en USA desde 1788, y el año en el cual sea realizó, si estas se realizan cada 4 anõs.

    22.1) Determine cuales son las variables involucradas

    22.2) Determine cuál es la variable independiente y cual es la variable dependiente

    22.3) Determine la función que relaciona ambas variables

23. Una señora se dedica a vender empanadas. Para elaborarlas, gasta \$80 en cada empanada, más \$400 por gastos de elaboración y venta.

    a) Obtenga la función g que permite calcular el gasto total por hacer un cierto número de empanadas.

b) Obtenga la función I que permite calcular el ingreso total por vender un cierto número de empanadas.

c) Si cada empanada es vendida a \$500, obtenga la función U que permite calcular las utilidades por hacer un cierto número de empanadas.

d) ¿Cuántas empanadas debe vender para que sus utilidades sean de \$29000?

24. Andrés le cuenta a su hijo Diego que en sus tiempos él arrendaba películas y se juntaba con sus amigos a verlas, a diferencia de lo que hace hoy en día de ver las películas en la televisión por cable. “Nuestro lugar preferido era Blockbuster, donde habían todas las películas que pudiese imaginar. Para poder rentar una película habían 3 alternativas:

- Primer plan: Pagar \$5000 por película y sin pagar membresía
- Segundo plan: Pagar \$3000 por película, cancelando \$12000 de membresía anual
- Tercer plan: Pagar \$1500 por película, cancelando \$24000 de membresía anual”

a) En cada caso, obtenga la función que nos permite calcular el dinero cancelado S por arrendar p películas en el año.

b) Grafique las tres funciones obtenidas en el paso anterior, en el mismo plano cartesiano.

c) Si en el año quiero arrendar muchas películas, ¿cuál es el plan más conveniente? ¿cómo se aprecia esto graficamente?

25. Andrea desea contratar un plan de telefonía, cuyas tarifas mensuales según los minutos hablados, se resumen en la siguiente tabla:

	Minutos hablados	Tarifa mensual en pesos
a)	300	14000
b)	400	18000
c)	500	22000

   a) ¿En base a los datos obtenidos, la relación entre minutos hablados y tarifa mensual es un modelo lineal? Justifique.

   b) Obtenga la función que relaciona a ambas variables.

   c) ¿Cuánto deberá pagar Andrea por hablar 600 minutos en el mes?

26. La población de Chile en 1990 era de 13,24 millones de personas, y en el año 2000, de 15,105 millones.

   a) Obtenga un modelo lineal que nos permita calcular la población total en Chile t años después de 1960. ¿Qué representa la pendiente de este modelo?

   b) Usando el modelo obtenido en a), obtenga una estimación de la población total en Chile en el año 2030.

   c) Usando el modelo obtenido en a) responda, ¿a partir de qué año la población total en Chile sería de más de 25 millones de personas?

   d) Obtenga la función inversa del modelo obtenido en a), ¿qué nos permite calcular?

27. Un caracol parte del reposo desde un punto fijo. A los 2 segundos a está a $14mm$ del inicio y a los 7 segundos está a 14 mm del inicio.

   a) Determine la velocidad constante a la que va entre los 0 y 2 segundos.

   b) Determine la velocidad constante a la que va entre los 2 y 7 segundos.

   c) Determine la función posición del caracol entre los 0 y 2 segundos.

d) Determine la función posición del caracol entre los 2 y 7 segundos.

e) Grafique la función posición del caracol entre los 0 y 7 segundos.

f) ¿Qué representa el punto más alto de la gráfica de la función obtenida en e)?

28. Claudio Bravo tira un pelotazo largo a campo contrario, con una velocidad inicial de $30\frac{m}{s}$. Por efecto de la gravedad, la pelota cae con una aceleración de $10\frac{m}{s^2}$

    a) Determine la función que permite calcular la altura de la pelota a los t segundos de ser lanzada, y obtenga su dominio, recorrido y gráfico (Use $h(t) = v_o t + \frac{a}{2}t^2$, donde h es la altura, v_0 es la velocidad inicial y a es la aceleración).

    b) ¿A los cuántos segundos de ser lanzada la pelota cae?

    c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzó la pelota?

29. Don José desea cercar un terreno rectangular con 80 metros de cuerda para poder hacer un establo para sus ovejas

    a) Determine la función que permite calcular el área A del terreno, si el largo de la base mide x metros.

    b) ¿Cuál es el dominio de esta función?

    c) Grafique la función obtenida, ¿a qué curva corresponde su gráfico?

    d) ¿Qué dimensiones debería tener el terreno para que Don José ubique la mayor cantidad de animales posible dentro del terreno?

    e) Para la comodidad de sus animales, Don José considero que cada uno debe ocupar 5 m^2 de terreno. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que don José albergue a 35 animales?

30. La señora María fabrica pasteles para vender en su almacén. Según sus estadísticas

    - cada mes que fijó el precio de cada pastel en \$2000, vendió 300 pasteles en el mes.

- cada mes que fijó el precio de cada pastel en \$2200, vendió 295 pasteles en el mes.

a) Suponiendo que el modelo es lineal, determine la función que nos permite calcular el precio p de cada pastel de acuerdo al número mensual de pasteles vendidos x.

b) Según lo obtenido en a), determine la función que permite calcular el ingreso I al vender x pasteles en un mes.

c) De acuerdo al modelo obtenido en b) ¿cuántos pasteles en el mes deberá vender la señora María, para que su ingreso sea máximo? ¿cuál es el ingreso máximo?

d) ¿Cuál debe ser el precio por pastel para que el ingreso sea máximo?

31. Un estanque de 100 litros de capacidad, contiene actualmente 50 litros de agua y 2 kilos de sal. En un cierto instante comienza a ser llenado con agua.

    a) Determine la función que nos permite calcular la concentración c de sal en el estanque cuando este tiene l litros de agua. Además, determine su dominio y recorrido.

    b) Si al estanque entran 2 litros de agua por minuto, determine la función que nos permite calcular la cantidad l de litros que hay en el estanque a los t minutos de iniciado el llenado. Además, determine su dominio y recorrido.

    c) Usando las funciones obtenidas en los ítems anteriores, determine la función que nos permite calcular la concentración c de sal en el estanque, a los t minutos de iniciado el llenado. Además, determine su dominio y recorrido.

    d) ¿Al cuánto tiempo la concentración de sal es de $3\,\%$?

32. Considere una lámina cuadrada de cobre de 1 metro y 44 centimetros de longitud. Se desea construir una caja sin tapa con esta lámina, cortando cuadraditos de longitud x de cada una de sus esquinas.

a) Determine la función $V(x)$ que nos permite calcular el volumen de la caja

b) ¿Cuál es el dominio de esta función?

c) ¿Es posible formar una caja cortando cuadraditos de longitud 80 centímetros?

Capítulo 3

Función exponencial y función logarítmica.

3.1. Introducción.

En este capítulo aprenderemos sobre la función exponencial y logarítmica. Ejemplos de funciones exponenciales son las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 3^x \text{ y } g(x) = e^x,$$

donde e es el número de Euler. Cuando la base de la potencia es mayor a 1, estas funciones tiene un gráfico que crece muy rápido, en la medida que x aumenta. Por otro lado, si la base está entre 0 y 1, sin incluirlos, el gráfico de la función exponencial decrece muy rápido, en la medida que x aumenta. Existen varios fenoménos que se ajustan a un modelo de crecimiento exponencial, tales como una población de seres vivos, el dinero invertido en un fondo de inversión, o la cantidad de cárbono 14 en un fósil, la cual nos permite determinar su edad. Resolveremos algunos problemas de aplicación tales como

Don Pablo, dueño de una agencia de Diseño gráfico, compró el 1 de Enero de 2017 una máquina plotter, con los dineros del Capital Semilla que se adjudicó. La máquina le costó \$250000. *Su tasa de depreciación es de un* $10\,\%$ *anual. Don Pablo desea venderla* *cuando el precio no sea menor que* \$150000. *¿En cuánto tiempo más es el tope para vender la máquina y cumplir sus deseos?*

Veremos que dada la depreciación, el precio de la máquina durante los años venideros se ajusta a un modelo exponencial, con lo cual podremos responder a esta interrogante.

A continuación de la función exponencial, estudiaremos su función inversa, llamada función logarítmica. Por ejemplo, la función inversa de la función $f(x) = 3^x$ es $g(x) = \log_3(x)$, llamada función logaritmo de base 3. Una interesante aplicación de las funciones logarítmicas, es la escala Richter, con la cual se mide la intensidad de un terremoto, sabiendo cual fue el alcance de éste, el cual es llamado amplitud. En base a esto, podremos resolver un problema como

El año 2017, en México hubo un terremoto y en China hubo otro de 1 grado más de magnitud que el de México ¿Cuántas veces la amplitud del sismo en China es la amplitud del terremoto de México?

Para poder resolver problemas de aplicación como los mencionados, es necesario primero conocer las principales propiedades de este tipo de funciones, y resolver ecuaciones que las involucran. Todos estos temas los presentamos a continuación.

3.2. Función exponencial.

Ejercicio 3.2.1. *Consideremos la función*

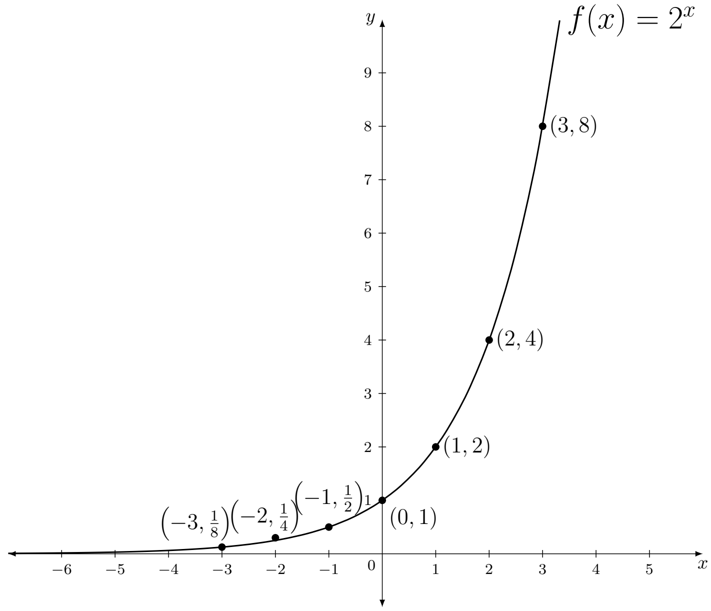
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to]0, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = 2^x. \end{aligned}$$

Con ayuda de una tabla de valores, bosqueje el gráfico de f.

Solución. En cada fila de la siguiente tabla, vemos un valor de x y su respectivo valor de y:

x	1	2	3	0	-1	-2	-3
$y = 2^x$	2	4	8	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

De este modo, el gráfico de f pasa por los puntos $(1,2), (2,4), (3,8), (0,1), \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$, por lo que un bosquejo de este es



$\square$

Ejercicio 3.2.2. *Consideremos la función*

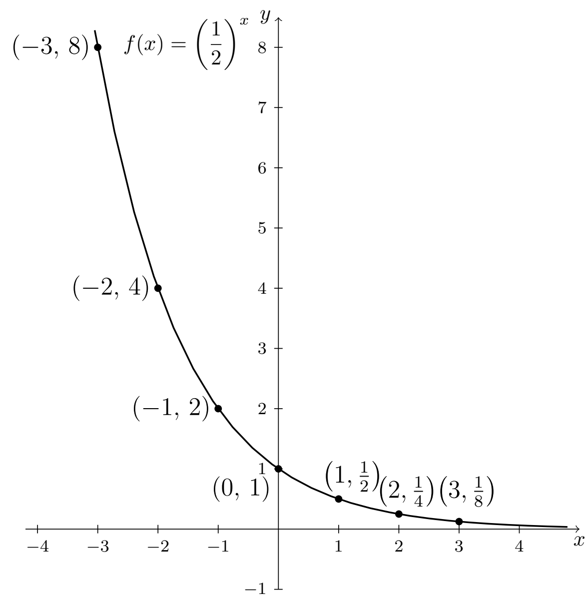
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to]0, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x. \end{aligned}$$

Con ayuda de una tabla de valores, bosqueje el gráfico de f.

Solución. Hacemos una tabla de forma análoga a la del ejercicio anterior:

x	1	2	3	0	-1	-2	-3
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1	2	4	8

De este modo, usando los puntos obtenidos a partir la tabla, obtenemos un bosquejo del gráfico de f:



□

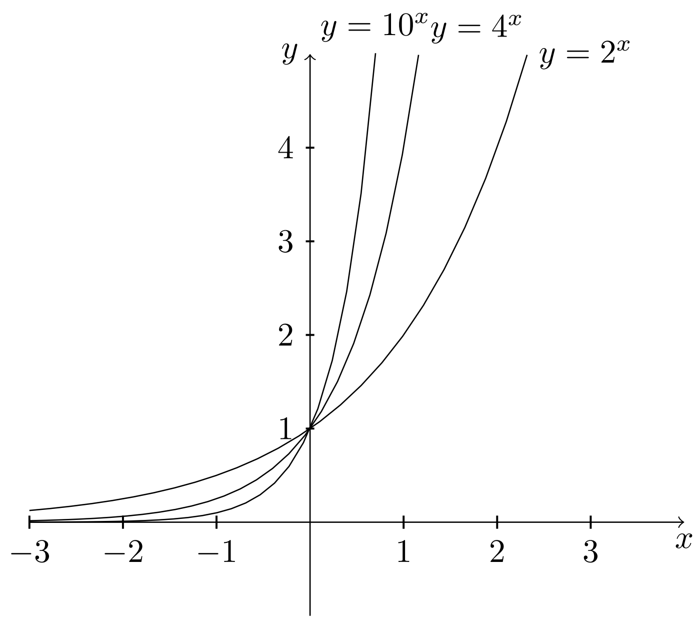
Definición 3.2.1. *Sea $b\in\mathbb{R}$, tal que $b>0$ y $b\neq 1$. La **función exponencial de base** b, es la función*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\,]0,+\infty[\\ x&\mapsto f(x)=b^x. \end{aligned}$$

Observación 3.2.1. Si $b=e\approx 2,7182...$, es decir, si la base de la función exponencial es el llamado *número de Euler*, entonces esta función es simplemente llamada **función exponencial**.

3.3. Función exponencial de base b, con $b > 1$.

Observemos el gráfico de la función exponencial de base 2, de base 4 y de base 10, todos juntos dentro de un mismo plano cartesiano:



En estos gráficos se pueden observar ciertas similitudes, las cuales se generalizan en las siguientes propiedades:

Propiedades de la función exponencial de base b, con $b > 1$:

- Su gráfico pasa por $(0, 1)$.
- Su gráfico se aproxima a $y = 0$, es decir al eje x, en la medida que x se va hacia $-\infty$ (es decir, cuando x es un número negativo cada vez más "lejano" de 0). En este caso, decimos que el eje x es una **asíntota horizontal** de esta función.
- La función es creciente. En consecuencia, la función es inyectiva (gráficamente, esto se puede apreciar haciendo la prueba de la recta horizontal).
- Si $f(x) = b^x$ es la función exponencial de base b en cuestión, entonces

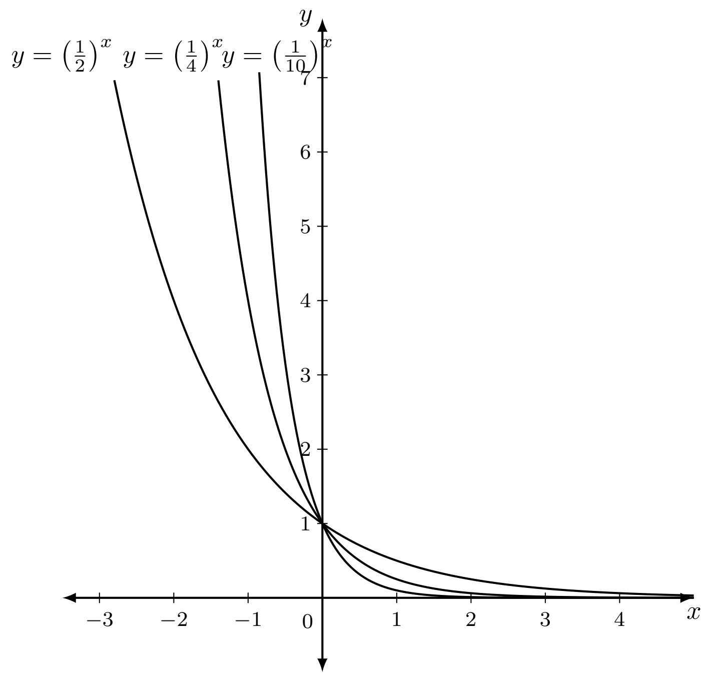
$$\operatorname{Rec} f =]0, +\infty[= \operatorname{Cod} f,$$

por lo que esta función es sobreyectiva, luego biyectiva. De este modo,

$$\forall x \in \mathbb{R} : b^x > 0.$$

3.4. Función exponencial de base b, con $0 < b < 1$.

Observemos el gráfico de la función exponencial de base $\frac{1}{2}$, de base $\frac{1}{4}$ y de base $\frac{1}{10}$, todos en el mismo plano cartesiano:



Análogamente al caso $b > 1$, observamos ciertas similitudes en estos gráficos, los cuales se generalizan en las siguientes propiedades:

Propiedades de la función exponencial de base b, con $0 < b < 1$:

- Su gráfico pasa por $(0, 1)$.
- Su gráfico se aproxima a $y = 0$, es decir al eje x, en la medida que x se va hacia $+\infty$ (o sea, cuando x es un número positivo cada vez más "lejano" de 0). En este caso, decimos que el eje x es una **asíntota horizontal** de la función exponencial de base b.

- La función es decreciente. En consecuencia, la función es inyectiva (gráficamente, esto se aprecia usando la prueba de la recta horizontal).
- Si $f(x) = b^x$ es la función exponencial de base b en cuestión, entonces

$$\operatorname{Rec} f =]0, +\infty[= \operatorname{Cod} f,$$

por lo que esta función es sobreyectiva, luego biyectiva. Así,

$$\forall x \in \mathbb{R} : b^x > 0.$$

3.5. Ecuaciones exponenciales.

Queremos determinar todos los números reales x para los cuales

$$2^x = 64. \tag{3.5.1}$$

Necesitamos de alguna propiedad que nos permita despejar la x de forma apropiada.

Vimos que para cualquier $b > 0, b \neq 1$, la función $f(x) = b^x$ es inyectiva. Esto quiere decir que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : b^{x_1} = b^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2. \tag{3.5.2}$$

Es decir, si tenemos la igualdad de potencias de igual base $b^{x_1} = b^{x_2}$, entonces sus exponentes deben ser los mismos, o sea, $x_1 = x_2$. ¿Cómo usamos esta propiedad para resolver (3.5.1)? Veamos:

Expresamos el 64 como potencia de 2, de donde la ecuación queda como

$$2^x = 2^6.$$

Es decir, igualamos bases. Como las bases son iguales, entonces en virtud de (3.5.2), podemos igualar los exponentes, obteniendo que

$$x = 6.$$

O sea, el conjunto solución es $S = \{6\}$.

Definición 3.5.1. *Una **ecuación exponencial** es una ecuación en la cual intervienen potencias de uno o varios números reales, y donde la incógnita forma parte del exponente de alguna de las potencias en cuestión.*

Ejercicio 3.5.1. *Resuelva la ecuación exponencial*

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{27}.$$

Solución. Intentamos igualar bases, para luego igualar exponentes. Note que

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{1-x^2} = 3^{-3}.$$

Igualando los exponentes de la última igualdad, obtenemos que $1 - x^2 = -3$, por lo que $x^2 = 4$. De este modo,

$$x = 2 \text{ o } x = -2.$$

Es decir, el conjunto solución es

$$S = \{-2, 2\}.$$

□

Para resolver ecuaciones exponenciales, también podemos usar propiedades de potencias, las cuales fueron vistas en el capítulo de conjuntos númericos. Recordamos aquellas propiedades que nos son necesarias:

Proposición 3.5.2. *(Propiedades de potencias) Sea $b > 0, b \neq 1$. Se tiene que*

a) $\forall x \in \mathbb{R} : b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$.

b) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1+x_2}$.

c) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1-x_2}$.

d) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 \cdot x_2}$.

Ejercicio 3.5.2. *Resuelva la ecuación exponencial* $2^{1-x} = 4^{2x}$.

Solución. Intentamos obtener potencias de 2 en ambos miembros. Como $4 = 2^2$, por la propiedad d), tenemos que

$$\begin{aligned} 2^{1-x} = 4^{2x} &\Leftrightarrow 2^{1-x} = \left(2^2\right)^{2x} \\ &\Leftrightarrow 2^{1-x} = 2^{4x} \\ &\Leftrightarrow 1 - x = 4x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Si no estuviéramos seguro de la respuesta, podemos comprobar. Note que, si $x = \frac{1}{5}$, entonces

$$2^{1-x} = 2^{1-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}$$

y

$$4^{2x} = 4^{\frac{2}{5}} = \left(2^2\right)^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}.$$

Así, hemos comprobado que el conjunto solución es $S = \{\frac{1}{5}\}$ (De todos modos, en las ecuaciones exponenciales, la comprobación no es necesaria).

Ejercicio 3.5.3. *Resuelva la ecuación exponencial* $\dfrac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$.

Solución. Por la propiedad d) de potencias:

$$\frac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128 \Leftrightarrow \frac{2^{2x+2}}{2^{x+2}} = 128.$$

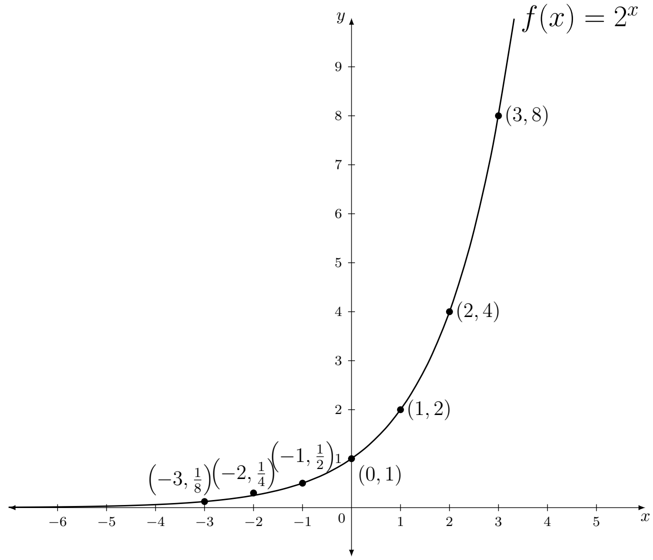
Usando la propiedad c), dividimos las potencias de igual base, obteniendo que

$$\frac{2^{2x+2}}{2^{x+2}} = 128 \Leftrightarrow 2^x = 2^7$$

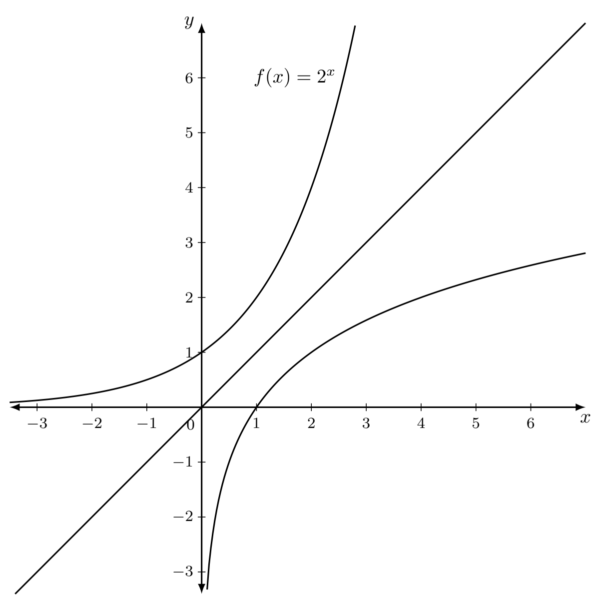
De este modo, $x = 7$ y $S = \{7\}$.

3.6. Función logarítmica

Considere el gráfico de la función exponencial de base 2:



Como esta función es biyectiva, podemos simetrizar su gráfico con respecto a la recta $y = x$, y de este modo obtener el gráfico de su función inversa:



Su función inversa se denomina función **logarítmica de base 2**, y se denota por log_2.

De este modo,

$$\begin{aligned} \log_2 :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_2(x) = y, \end{aligned}$$

de donde

$$\log_2(x) = y \Leftrightarrow 2^y = x.$$

Definición 3.6.1. *Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $b > 0$ y $b \neq 1$. La función inversa de la función exponencial de base b, es denominada* ***función logaritmo de base*** *b y es denotada por $\log_b$. Es decir,*

$$\begin{aligned} \log_b :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_b(x) = y, \end{aligned}$$

donde

$$\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x. \tag{3.6.1}$$

Observación 3.6.1. Se tiene que:

- Sin lugar a confusión, podemos expresar $\log_b(x)$ como $\log_b x$.
- En la expresión $\log_b x$, la variable x recibe el nombre de **argumento** del logaritmo dado.
- Cuando queremos calcular $\log_b x$, en virtud de (3.6.1), estamos en busca del exponente al que debe ser elevado la base b para obtener x. Por ejemplo, $\log_2 8$, es 3, dado que $2^3 = 8$.

Notaciones:

- La función $\log_{10}$ se denota simplemente como log.
- La función $\log_e$ se denota como ln y es llamada **logaritmo natural**.

Ejercicio 3.6.1. *Determine si cada una de las aseveraciones es verdadera o falsa:*

a) $\log_2 32 = 4$.

Solución. Dos formas:

- Si $\log_2 32 = y$, esto es equivalente a decir que $2^y = 32$. Es decir buscamos el exponente y al que debe ser elevado 2, para obtener 32. Se tiene que $y = 5$, por lo que $log_2 32 = 5$. Así, la aseveración es falsa.
- La igualdad $\log_2 32 = 4$ es equivalente a decir que la base 2, elevada al valor del logaritmo 4, nos da el argumento 32. O sea, a que

$$2^4 = 32,$$

lo cual es evidentemente falso, dado que $2^4 = 16$.

b) $\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$.

Solución. Calculamos $\log_5 \left(\frac{1}{125}\right)$, valor que corresponde al exponente al que debe estar elevado 5, de modo que el valor de la potencia sea $\frac{1}{125}$. Este exponente es -3. Así, la aseveración es correcta.

c) $\log 1000 = 3$.

Solución. Para calcular $\log 1000$, debemos hallar el exponente al que debe estar elevado 10 para obtener 1000. Este es 3. Por lo tanto, la aseveración es correcta. Note que el valor de este logaritmo corresponde al número de ceros del argumento (en general es así para logaritmos de base 10, cuyo argumento es una potencia de 10).

c) $\log_2 16 + \log_2 4 = \log_2 20$.

Solución. Note que

$$\log_2 16 + \log_2 4 = 4 + 2 = 6.$$

Para que la igualdad planteada en el enunciado sea válida, se debe cumplir entonces que $\log_2 20 = 6$. Esto quiere decir que $2^6 = 20$, lo cual es falso. Por lo tanto, la aseveración es falsa. Es decir, en general no es cierto que la suma de logaritmos corresponde al logaritmo de la suma.

d) $\log_3 27 - \log_3 9 = \log_3 18$.

Solución. Note que

$$\log_3 27 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1.$$

Si $\log_3 18 = 1$, entonces $3^1 = 18$, lo cual es falso. Por lo tanto, la aseveración es falsa. Es decir, en general no es cierto que la diferencia de logaritmos corresponde al logaritmo de la diferencia.

e) $log_4 4^5 = 5 \log_4 4$.

Solución. Para calcular $log_4 4^5$, notamos que el exponente que necesita el 4 para obtener 4^5 es evidentemente 5. Así, $log_4 4^5 = 5$. Por otro lado, $5 \log_4 4 = 5 \cdot 1 = 5$, por lo que la aseveración es verdadera. □

Los siguientes tres ejercicios apuntan a descubrir tres propiedades importantes de los logaritmos:

Ejercicio 3.6.2. *Sean* $\log_b x_1 = y_1$ *y* $\log_b x_2 = y_2$*, con* $b > 0, b \neq 1$ *y* $x_1, x_2 > 0$.

a) *¿A qué expresión de x_1 y x_2 corresponde la potencia $b^{y_1+y_2}$?*

Solución. Note que

$$\log_b x_1 = y_1 \Leftrightarrow b^{y_1} = x_1$$

y

$$\log_b x_2 = y_2 \Leftrightarrow b^{y_2} = x_2.$$

De este modo,

$$b^{y_1+y_2} = b^{y_1} \cdot b^{y_2} = x_1 \cdot x_2.$$

b) *En base a lo obtenido en a), ¿a qué expresión de* x_1 *y* x_2 *corresponde* $\log_b(x_1 \cdot x_2)$*?*

Solución. Como

$$b^{y_1+y_2} = x_1 \cdot x_2,$$

entonces

$$\log_b(x_1 \cdot x_2) = y_1 + y_2 = \log_b(x_1) + \log_b(x_2).$$

□

Proposición 3.6.2. *Sean* $b > 0, b \neq 1, x_1, x_2 > 0$*. Se tiene que*

$$\log_b(x_1) + \log_b(x_2) = \log_b(x_1 \cdot x_2).$$

Observación 3.6.2. Una forma de interpretar esta propiedad es que la suma de los logaritmos corresponde al logaritmo de la multiplicación.

Ejercicio 3.6.3. *Sean* $\log_b x_1 = y_1$ *y* $\log_b x_2 = y_2$*, donde* $b > 0, b \neq 1$ *y* $x_1, x_2 > 0$*.*

a) *¿A qué expresión de* x_1 *y* x_2 *corresponde la potencia* $b^{y_1-y_2}$*?*

Solución. Note que

$$\log_b x_1 = y_1 \Leftrightarrow b^{y_1} = x_1$$

y

$$\log_b x_2 = y_2 \Leftrightarrow b^{y_2} = x_2.$$

De este modo,

$$b^{y_1-y_2} = \frac{b^{y_1}}{b^{y_2}} = \frac{x_1}{x_2}.$$

b) *En base a lo obtenido en a), ¿a qué expresión de* x_1 *y* x_2 *corresponde* $\log_b(\frac{x_1}{x_2})$*?*

Solución. Como

$$b^{y_1-y_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

entonces

$$\log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = y_1 - y_2 = \log_b(x_1) - \log_b(x_2).$$

□

Proposición 3.6.3. *Sean $b > 0, b \neq 1, x_1, x_2 > 0$. Se tiene que*

$$\log_b(x_1) - \log_b(x_2) = \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Observación 3.6.3. Una forma de interpretar esta propiedad es que la diferencia de logaritmos, se puede expresar como el logaritmo de la división, donde el argumento del logaritmo de signo positivo va en el numerador y el argumento del logaritmo de signo negativo va en el denominador.

Ejercicio 3.6.4. *Sea $\log_b x = y$ con $b > 0, b \neq 1$ y $x > 0$.*

a) *¿A qué expresión de x corresponde la potencia b^{-y}?*

Solución. Note que, como

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x,$$

entonces

$$b^{-y} = \frac{1}{b^y} = \frac{1}{x}.$$

b) *¿A qué expresión de x corresponde $\log_b\left(\frac{1}{x}\right)$?.*

Solución. Como

$$b^{-y} = \frac{1}{x},$$

entonces

$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -y = -\log_b x.$$

□

Proposición 3.6.4. *Sean $b > 0, b \neq 1, x > 0$. Se tiene que*

$$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x.$$

Observación 3.6.4. Una forma de interpretar esta propiedad es que logaritmo del recíproco es el opuesto del logaritmo (o que la fracción $\frac{1}{x}$ se invierte, y el logaritmo cambia de signo).

Ejercicio 3.6.5. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Supongamos que* $\log_b x = y$ *con* $b > 0, b \neq 1$ *y* $x > 0$.

a) *¿A qué expresión de* x *corresponde la potencia* $b^{\alpha y}$*?*

Solución. Se tiene que

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x.$$

De este modo,

$$b^{\alpha y} = (b^y)^\alpha = x^\alpha.$$

b) *¿A qué expresión de* x *corresponde* $\log_b(x^\alpha)$*?*

Solución. Como

$$b^{\alpha y} = x^\alpha,$$

entonces

$$\log_b(x^\alpha) = \alpha y = \alpha \log_b x.$$

Proposición 3.6.5. *Sean* $b > 0, b \neq 1, x > 0$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Se tiene que*

$$\log_b(x^\alpha) = \alpha \log_b x.$$

Observación 3.6.5. Una forma de interpretar esta propiedad es que para calcular el logaritmo de una potencia, el exponente "pasa hacia adelante" multiplicando al logaritmo.

Observación 3.6.6. Sea $b > 0$ y $b \neq 1$. Sea $f(x) = b^x$ y $g(x) = \log_b x$. Como f y g son funciones inversas, entonces

$$\forall x \in Dom g, (f \circ g)(x) = x,$$

lo que en este caso corresponde a

$$\forall x > 0, b^{\log_b x} = x. \tag{3.6.2}$$

Además,

$$\forall x \in Dom f, (g \circ f)(x) = x,$$

que específicamente corresponde a

$$\forall x \in \mathbb{R} : \log_b b^x = x. \tag{3.6.3}$$

Las sentencias (3.6.2) y (3.6.3) nos dicen informalmente que la función exponencial y logarítmica de la misma base se "cancelan" entre sí.

Veamos como usar las propiedades mencionadas en la resolución de algunas ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Ejercicio 3.6.6. *Resuelva la ecuación exponencial* $2^x = 64$.

Solución. Esta ecuación se resolvió anteriormente igualando bases y luego exponentes. Sin embargo, también puede ser resuelta usando logaritmos. En efecto, aplicamos logaritmo en base 2 en ambos miembros de la igualdad, obteniendo que

$$\log_2 2^x = \log_2 64.$$

De (3.6.3), se deduce que

$$x = 6.$$

O sea, $S = \{6\}$. □

No todas las ecuaciones exponenciales, es posible resolverlas igualando bases. ¿Cómo proceder en estos casos? Veamos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 3.6.7. *Resuelva la ecuación* $5^{2x-1} = 15$.

Solución. En este caso, 15 no se puede expresar como una potencia de 5 de exponente racional. Nuestro objetivo es que la incógnita x "baje" del exponente. Para tal efecto, aplicamos log_5 en ambos miembros, obteniendo que

$$\log_5 5^{2x-1} = \log_5 15. \tag{3.6.4}$$

Por la propiedad (3.6.3), se tiene que (3.6.4) queda como

$$2x - 1 = \log_5 15, \tag{3.6.5}$$

luego

$$x = \frac{1 + \log_5 15}{2}.$$

Como $\log_5 15 = \log_5 5 \cdot 3$, entonces usando la proposición 3.6.2, obtenemos que

$$x = \frac{2 + \log_5 3}{2}.$$

O sea

$$S = \left\{ \frac{2 + \log_5 3}{2} \right\}.$$

¿Qué tal si queremos comprobar? Reemplazamos $x = \frac{2+\log_5 3}{2}$ en el miembro izquierdo de la ecuación original, obteniendo

$$5^{2 \cdot \frac{2+\log_5 3}{2} - 1} = 5^{1+\log_5 3} = 5 \cdot 5^{\log_5 3} = 5 \cdot 3 = 15.$$

De este modo, verificamos que la solución es la correcta. □

Ejercicio 3.6.8. *Resuelva la ecuación*

$$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320.$$

Solución. Aplicamos $\log_2$ en ambos miembros, obteniendo

$$\log_2(2^{x+3} + 2^{2x+2}) = \log_2 320.$$

Sin embargo, no podemos separar el miembro izquierdo en dos términos, dado que el logaritmo de la suma no corresponde a la suma de los logaritmos. Por lo tanto con este razonamiento no podemos llegar a la solución ¿Qué podemos hacer entonces?

Intentamos hacer un cambio de variable en la ecuación original, en este caso $u = 2^x$. Para tal efecto, reexpresamos la ecuación como

$$2^x \cdot 2^3 + 4^x \cdot 4 = 320,$$

y luego equivalentemente como

$$8 \cdot 2^x + 4 \cdot (2^x)^2 - 320 = 0.$$

Reemplazando $u = 2^x$, obtenemos

$$8 \cdot u + 4 \cdot u^2 - 320 = 0.$$

Reordenando términos y luego dividiendo por 4, y obtenemos la ecuación cuadrática

$$u^2 + 2u - 80 = 0,$$

cuyas soluciones son $u = -10$ o $u = 8$. Deshacemos ahora el cambio de variable. Note que

- $u = -10$ es equivalente a $2^x = -10$, pero

$$\forall x \in \mathbb{R} : 2^x > 0,$$

  por lo que este valor de u no nos entrega ninguna solución de nuestra ecuación original.

- $u = 8$ es equivalente a $2^x = 8$, de donde $x = 3$.

Por lo tanto, $S = \{3\}$. $\square$

Descubramos otra propiedad de los logaritmos:

Ejercicio 3.6.9. *Lea y resuelva:*

a) *Demuestre que* $b^{\log_b a \cdot \log_a x} = x$.

Solución. Se tiene que

$$b^{\log_b a \cdot \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x.$$

b) *En base a la igualdad demostrada en a), ¿a qué expresión corresponde* $\log_b x$*?*

Solución. Como

$$b^{\log_b a \cdot \log_a x} = x,$$

entonces por definición de logaritmo en base b, se tiene que

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x.$$

Si despejamos $log_a x$, obtenemos

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \tag{3.6.6}$$

□

Proposición 3.6.6. *Sean $a, b, x > 0$ con $a, b \neq 1$. Se tiene que*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Observación 3.6.7. Esta propiedad es llamada **cambio de base**, dado que el logaritmo de la izquierda tiene base a y los logaritmos de la derecha tienen base b. Podemos interpretar que $\log_a x$ queda expresado como el logaritmo en base b del argumento x, partido por el logaritmo en base b de la base original a.

Ejercicio 3.6.10. *Resuelva la ecuación exponencial $5^x = 3^{x+1}$.*

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: Aplicamos $\log_5$ en ambos miembros de la igualdad, obteniendo

$$\log_5 5^x = \log_5 3^{x+1}.$$

  Usando la propiedad (3.6.3) a la izquierda y la proposición 3.6.5 a la derecha, obtenemos que

$$x = (x+1)\log_5 3.$$

  Despejamos x, y así

$$x = \frac{\log_5 3}{1 - \log_5 3}.$$

- Segunda forma: Aplicamos $\log_3$ en ambos miembros de la igualdad, obteniendo de forma análoga a la primera forma que

$$x = \frac{1}{\log_3 5 - 1}.$$

□

Observación 3.6.8. Luego de resolver la ecuación anterior de dos formas distintas, ¿cómo saber que los valores de x obtenidos son iguales? Para verificar esto, usamos la propiedad de cambio de base. Consideremos la solución obtenida en la primera forma, es decir

$$x = \frac{\log_5 3}{1 - \log_5 3}. \tag{3.6.7}$$

Cambiamos $\log_5 3$ a base 10, obteniendo que

$$\log_5 3 = \frac{\log 3}{log 5}.$$

Reemplazando este valor en (3.6.7), y usando las propiedades de logaritmos necesarias obtenemos que

$$x = \frac{\log 3}{\log\left(\frac{5}{3}\right)}.$$

Por otro lado, consideremos la solución obtenida en la segunda forma, es decir

$$x = \frac{1}{\log_3 5 - 1}. \tag{3.6.8}$$

Si cambiamos $\log_3 5$ a base 10, obtenemos que

$$\log_3 5 = \frac{\log_5}{\log_3}.$$

Reemplazando este valor en (3.6.8), usando propiedades de logaritmo obtenemos que

$$x = \frac{\log 3}{\log\left(\frac{5}{3}\right)}.$$

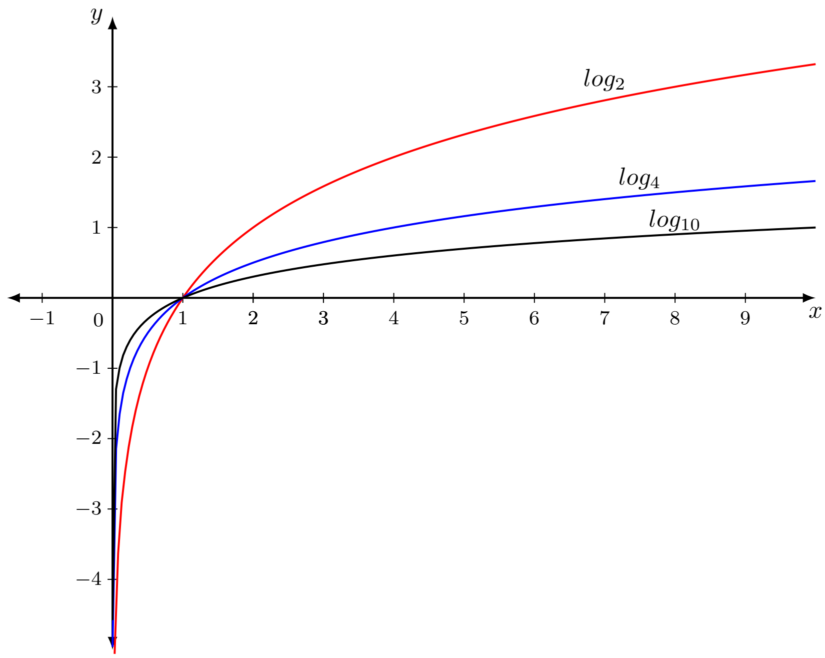
Concluimos entonces que la ecuación tiene solución única, con

$$S = \left\{ \frac{\log 3}{\log\left(\frac{5}{3}\right)} \right\}.$$

Retornemos al análisis de la función logarítmica, ahora desde el punto de vista de su gráfica:

3.7. Función logarítmica con base $b > 1$.

Observemos el gráfico de $\log_2, \log_4, \log_{10}$, todos en un mismo plano cartesiano:



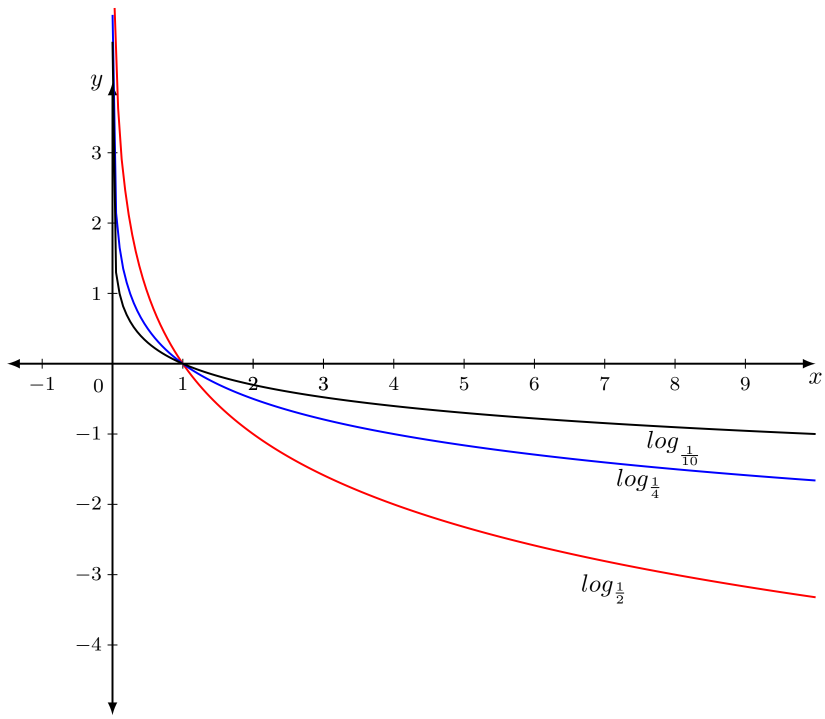
Observamos algunas similitudes, las cuales se generalizan en las siguientes propiedades:

Propiedades de $\log_b$ para $b > 1$:

- La curva pasa por $(1, 0)$.
- $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_b(x) < 0$.
- $x > 1 \Rightarrow \log_b(x) > 0$.
- La función log_b es estrictamente creciente, en consecuencia es inyectiva (esto se puede apreciar usando la prueba de la recta horizontal).
- En la medida que x se aproxima a 0, la curva se aproxima hacia $-\infty$ (intuitivamente, baja ilimitadamente), por lo que en este caso, decimos que el eje y es una asíntota vertical de $\log_b$.

3.8. Función logarítmica con base $0 < b < 1$.

Observemos las gráficas de las funciones $\log_{\frac{1}{2}}, \log_{\frac{1}{4}}, \log_{\frac{1}{10}}$ en un mismo plano cartesiano:



Estos ejemplos nos llevan a las siguientes propiedades:

Propiedades de $\log_b$ para $0 < b < 1$:

- La curva pasa por $(1, 0)$.
- $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_b(x) > 0$.
- $x > 1 \Rightarrow \log_b(x) < 0$.
- La función log_b es estrictamente decreciente, en consecuencia es inyectiva (esto se puede apreciar usando la prueba de la recta horizontal).
- En la medida que x se aproxima a 0, la curva se aproxima hacia $+\infty$ (intuitivamente, sube ilimitadamente), por lo que en este caso, decimos que el eje y es una asíntota vertical de $\log_b$.

Observación 3.8.1. Sea $b > 0, b \neq 1$. Como $\log_b$ es inyectiva, esto quiere decir que

$$\forall x_1, x_2 > 0 : \log_b x_1 = \log_b x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

O sea, si tenemos una igualdad de logaritmos, entonces sus argumentos deben ser los mismos. Esta propiedad nos proporciona una herramienta más para resolver ecuaciones logarítmicas, las cuales estudiaremos en la siguiente sección.

3.9. Ecuaciones logarítmicas.

Definición 3.9.1. *Una ecuación logarítmica es una ecuación en la cual intervienen logaritmos, y donde la incógnita es parte del argumento de algunos de estos logaritmos.*

Ejercicio 3.9.1. *Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas*

a) $\log_3(2x + 1) = 4$.

Solución. La resolvemos de tres formas distintas:

- Primera forma: Usamos la definición de logaritmo. En este caso, la ecuación dada es equivalente a $3^4 = 2x + 1$, de donde $x = 40$.

- Segunda forma: Aplicamos la función exponencial en base 3 en ambos miembros de la ecuación, obteniendo

$$3^{\log_3(2x+1)} = 3^4$$

De la propiedad (3.6.2), esta igualdad se transforma en

$$2x + 1 = 81,$$

de donde $x = 40$.

- Tercera forma: Expresamos la ecuación como

$$\log_3(2x + 1) = \log_3 81.$$

Como la función logaritmo de cualquier base, en particular de base 3, es inyectiva, entonces la última igualdad es equivalente a

$$2x + 1 = 81.$$

Así, $x = 40$.

Independiente de la forma en la cual se resolvió el ejercicio, es necesario comprobar si la solución obtenida es correcta, dado que la función logarítmica sólo tiene sentido cuando el argumento es positivo. En este caso, si $x = 40$, se tiene que

$$\log_3(2x + 1) = \log_3(2 \cdot 40 + 1) = \log_3 81 = 4,$$

por lo que $x = 40$ es solución de la ecuación, y de este modo $S = \{40\}$.

b) $\log_3(2x - 3) + log_3(x + 6) = 3$.

Solución. La idea es dejar un sólo logaritmo en el miembro izquierdo de la ecuación. Como la suma de logaritmos corresponde al logaritmo del producto, entonces la ecuación dada es equivalente a

$$\log_3 [(2x - 3)(x + 6)] = 3.$$

Usando cualquiera de las tres formas planteadas en la resolución del ejercicio anterior, obtenemos que

$$(2x - 3)(x + 6) = 27,$$

de donde resolviendo la ecuación cuadrática obtenida, obtenemos que $x = 3$ o $x = -\frac{15}{2}$.

Verifiquemos si los valores obtenidos de x son soluciones de la ecuación dada:

- Si $x = 3$, entonces

$$\log_3(2x - 3) + log_3(x + 6) = \log_3 9 + \log_3 3 = 2 + 1 = 3,$$

por lo que $x = 3$ es solución de la ecuación.

- Si $x = -\frac{15}{2} = -7{,}5$, entonces $\log_3(x+6) = \log_3(-1{,}5)$, el cual no está definido. Por lo tanto, $x = -\frac{15}{2}$ no es solución de la ecuación.

En definitiva, $S = \{3\}$.

c) $\log(2x+6) - \log(x-9) = \log 4$.

Solución. Intentamos dejar un sólo logaritmo en el miembro izquierdo. Por la proposición 3.6.3, la ecuación dada es equivalente a

$$\log\left(\frac{2x+6}{x-9}\right) = \log 4.$$

Igualando argumentos, se tiene que

$$\frac{2x+6}{x-9} = 4,$$

de donde $x = 21$. Note que, si $x = 21$, entonces

$$\log(2x+6) - \log(x-9) = \log 48 - \log 12 = \log\left(\frac{48}{12}\right) = \log 4,$$

por lo cual $S = \{21\}$. □

3.10. Inecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Consideremos la inecuación

$$2^x \geq \frac{1}{16}. \tag{3.10.1}$$

Para resolverla, podríamos aplicar log_2 en ambos miembros de la desigualdad. Sin embargo, al hacer esto, ¿se mantiene el sentido de la desigualdad o cambia?

Veamos esto. Recordemos que si $b > 1$, entonces la función $\log_b$ es creciente, por lo que

$$\forall x_1, x_2 > 0 : x_1 \leq x_2 \Rightarrow \log_b x_1 \leq \log_b x_2.$$

Esto quiere decir que si aplicamos $\log_b$, con $b > 1$, a una desigualdad, entonces el sentido de la desigualdad se mantiene. En particular, en nuestro caso $b = 2$, por lo que al aplicar

log_2 en nuestra desigualdad, el sentido de ésta se mantiene. De este modo, de (3.10.1), se deduce que

$$x \geq -4,$$

por lo que $S = [-4, +\infty[$.

Ejercicio 3.10.1. *Obtenga el conjunto solución de* $\left(\frac{3}{4}\right)^x \geq 1$.

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: Nuestra tentación es aplicar $\log_{\frac{3}{4}}$. Recordemos que si $0 < b < 1$, entonces $\log_b$ es decreciente, o sea, es válido que

  $$\forall x_1, x_2 > 0 : x_1 \leq x_2 \Rightarrow \log_b x_1 \geq \log_b x_2.$$

  Esto quiere decir, que al aplicar log_b, con $0 < b < 1$, en una desigualdad, el sentido de ésta cambia. De este modo, como $b = \frac{3}{4}$, entonces al aplicar $\log_{\frac{3}{4}}$ en nuestra inecuación, el sentido de ésta cambia, en efecto

  $$x \leq \log_{\frac{3}{4}}(1) \Leftrightarrow x \leq 0,$$

  por lo que $S = [0, +\infty[$.

- Segunda forma: Usando propiedades de potencias, expresamos nuestra inecuación como

  $$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} \geq 1.$$

  Ahora aplicamos $\log_{\frac{4}{3}}$ en ambos lados de la desigualdad, no si antes tener claro que como la base $\frac{4}{3} > 1$, entonces el sentido de la desigualdad no cambia. De este modo, obtenemos que

  $$-x \leq \log_{\frac{4}{3}} 1.$$

  Note que $\log_{\frac{4}{3}} 1 = 0$. Multiplicando la última desigualdad por -1, obtenemos que

  $$x \geq 0.$$

  Así, $S = [0, +\infty[$.

□

Estudiamos ahora algunas inecuaciones logarítmicas. Acá hay que trabajar con más cuidado, dado que el argumento del logaritmo debe ser positivo. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 3.10.2. *Obtenga el conjunto solución de* $\log_3(3x+9) > 4$.

Solución. Para el miembro izquierdo de la inecuación tenga sentido, entonces se debe cumplir que

$$3x + 9 > 0 \Leftrightarrow x > -3.$$

Luego, el conjunto restricción es $R = [-3, +\infty[$.

Resolvemos ahora la inecuación. La idea es aplicar la función exponencial de base 3 en ambos miembros de la inecuación. Recordemos que si $b > 1$, entonces la función exponencial de base b es creciente, es decir, se cumple que

$$\forall x_1, x_2 > 0 : x_1 \leq x_2 \Rightarrow b^{x_1} \leq b^{x_2}.$$

Por lo tanto, al aplicar esta función en una desigualdad, el sentido de ésta se mantiene. En particular, al aplicar la función exponencial de base 3 en nuestra inecuación, el sentido de la desigualdad se mantiene. En efecto, obtenemos que

$$3x + 9 > 3^4 \Leftrightarrow x > 24,$$

de donde $S' = [24, +\infty[$. De este modo, el conjunto solución es

$$S = R \cap S' = [24, +\infty[\,.$$

□

Ejercicio 3.10.3. *Obtenga el conjunto solución de* $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < -2$.

Solución. Note que x debe cumplir que $x + 1 > 0$, por lo que el conjunto restricción es $R =]-1, +\infty[$. Para continuar, planteamos dos formas:

- Primera forma: Aplicamos función exponencial de base $\frac{1}{3}$ en ambos miembros. Recordemos que si $0 < b < 1$, entonces la función exponencial de base b es decreciente, es decir, se cumple que

$$\forall x_1, x_2 > 0 : x_1 \leq x_2 \Rightarrow b^{x_1} \geq b^{x_2}.$$

Por lo tanto, al aplicar esta función en una desigualdad, el sentido de ésta cambia. Como en nuestro caso $b = \frac{1}{3}$, entonces el sentido de la desigualdad cambia. De este modo, obtenemos

$$x + 1 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2},$$

de donde $x > 8$. Así, $S' =]8, +\infty[$.

- Segunda forma: Usamos la propiedad

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x, \;\; a > 0, a \neq 1$$

(la cual si puede interpretar como que $\frac{1}{a}$ se invierte, y el logaritmo cambia de signo). De este modo, nuestra inecuación es

$$-\log_3(x + 1) < -2.$$

Multiplicando por -1, y luego aplicando función exponencial en base 3, obtenemos

$$x + 1 > 9 \Leftrightarrow x > 8.$$

Así, $S' =]8, +\infty[$.

Por lo tanto, con cualquiera de las dos formas realizadas,

$$S = R \cap S' =]8, +\infty[\,.$$

$\square$

3.11. Aplicaciones.

Veamos algunas aplicaciones cotidianas de la función exponencial, y de la función logarítmica:

Ejercicio 3.11.1. ***Depreciación:*** *Don Pablo, dueño de una agencia de Diseño gráfico, compró el 1 de Enero de 2017 una máquina plotter, con los dineros del Capital Semilla que se adjudicó. La máquina le costó* \$250000. *Su tasa de depreciación es de un* 10 % *anual. Don Pablo desea venderla cuando el precio no sea menor de* \$150000. *¿En cuánto tiempo más es el tope para vender la máquina y cumplir sus deseos? Use calculadora.*

Solución. El hecho que la tasa de depreciación sea de un 10 % anual, quiere decir que cada año el precio disminuye en un 10 % con respecto al precio del año anterior. Es decir, el precio queda en un 90 % del precio del año anterior. De este modo,

- Transcurrido 1 año, el precio es el 90 % de 250000, o sea
$$250000 \cdot \frac{9}{10}.$$
- Transcurridos 2 años, el precio es del 90 % del precio del año anterior, es decir es
$$\left(250000 \cdot \frac{9}{10}\right) \cdot \frac{9}{10} = 250000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$
- En general, transcurridos n años, el precio es de
$$250000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Para resolver nuestro problema, debemos determinar cuánto tiempo debe transcurrir a lo más, de modo que el valor no sea menor de \$150000. De este modo, debemos resolver la inecuación
$$250000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n \geq 150000,$$
la cual es equivalente a
$$\left(\frac{9}{10}\right)^n \geq \frac{3}{5}.$$

Aplicando *log* en ambos miembros la última desigualdad, se deduce que

$$n \log\left(\frac{9}{10}\right) \geq \log\left(\frac{3}{5}\right).$$

Queremos que $\log\left(\frac{9}{10}\right)$ aparezca dividiendo en el miembro derecho. Note que como $\frac{9}{10} < 1$, entonces $\log\left(\frac{9}{10}\right)$ es negativo, por lo que al dividir por él, el sentido de la desigualdad cambia. De este modo,

$$n \leq \frac{\log\left(\frac{3}{5}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} = 4{,}8.$$

Así n debe ser a lo más 4.8, por lo que la máquina se debe vender en a lo más $4,8$ años. Veamos a cuántos meses corresponden 0,8 años. Como

$$0{,}8 \cdot 12 = \frac{4}{5} \cdot 12 = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} = 9{,}6,$$

entonces la respuesta es 9,6 meses. Por otro lado, vemos a cuántos días equivalen 0,6 meses. Como

$$0{,}6 \cdot 30 = \frac{6}{10} \cdot 30 = 18,$$

entonces la respuesta es 18 días. Por lo tanto, Don Pablo debería vender la máquina en a lo más 4 años, 9 meses y 18 días. □

Ejercicio 3.11.2. ***Interés continuo:*** *Supongamos que se invierte un capital inicial de* $\$P$ *a una tasa de interés continua del* $j\,\%$. *El monto* S *obtenido a los* t *años, viene dado por*

$$S(t) = Pe^{\frac{j}{100} \cdot t}.$$

Supongamos que se invierte un capital inicial de $100000. *Transcurrido un año, el capital aumentó a* $108000. *Use calculadora para responder:*

a) *¿Cuál es la tasa de interés continua?*

Solución. En este caso, $P = 100000$, por lo que el monto $S(t)$ viene dado por

$$S(t) = 100000e^{\frac{j}{100} \cdot t}. \tag{3.11.1}$$

Note que

$$S(1) = 108000. \tag{3.11.2}$$

Reeemplazando $t = 1$ en (3.11.1) e igualando con (3.11.2), obtenemos que

$$100000e^{\frac{j}{100}} = 108000.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
100000e^{\frac{j}{100}} = 108000 &\Leftrightarrow e^{\frac{j}{100}} = 1{,}08 \\
&\Leftrightarrow \frac{j}{100} = \ln(1{,}08) \\
&\Leftrightarrow \frac{j}{100} = 0{,}077 \\
&\Leftrightarrow j = 7{,}7.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del 7,7 %.

b) *¿En cuánto tiempo el monto será de* \$150000*?*

Solución. Dada la tasa interés obtenida en a), obtenemos de (3.11.1) que

$$S(t) = 100000e^{0{,}077\cdot t}. \tag{3.11.3}$$

Resolvemos la ecuación $S(t) = 150000$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
S(t) = 150000 &\Leftrightarrow 100000e^{0{,}077\cdot t} = 150000 \\
&\Leftrightarrow e^{0{,}077\cdot t} = 1{,}5 \\
&\Leftrightarrow 0{,}077 \cdot t = \ln(1{,}5) \\
&\Leftrightarrow 0{,}077 \cdot t = \ln(1{,}5) \\
&\Leftrightarrow t \approx 5{,}25.
\end{aligned}$$

Como $0{,}25 = \frac{1}{4}$, entonces concluimos que el monto será de \$150000 aproximadamente a los 5 años y 3 meses. □

Ejercicio 3.11.3. *El sismólogo F. Richter* $(1900-1985)$ *ideó en 1935 la Escala de Richter que compara la fuerza de los diferentes terremotos. En ella la magnitud R de un terremoto se define por $R=\log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor (en el fondo es el alcance del terremoto) y A_0 es una amplitud de referencia que corresponde a una magnitud $R=0$.*

a) *¿Cuál es la magnitud de un terremoto cuya amplitud fue de 1 millón de veces la amplitud de referencia A_0?*

Solución. En este caso, $A=1000000A_0$, por lo que

$$\begin{aligned} R &= \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \\ &= \log\left(\frac{1000000A_0}{A_0}\right) \\ &= \log 1000000 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Es decir, el terremoto fue de 6 grados en la escala Richter.

b) *¿Cuál fue la amplitud de un sismo de* 3 *grados en la escala de Richter?*

Solución. En este caso, $R=3$, por lo que

$$\begin{aligned} 3 &= \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \\ \Leftrightarrow 10^3 &= \frac{A}{A_0} \\ \Leftrightarrow A &= 1000A_0. \end{aligned}$$

De este modo, la amplitud del sismo es de 1000 veces la onda de referencia.

c) *El año 2017, en México hubo un terremoto y en China hubo otro de 1 grado más de magnitud que el de México ¿Cuántas veces la amplitud del sismo en México es la amplitud del terremoto de China?*

Solución. Sea R la magnitud del terremoto en México y M su amplitud. Entonces se cumple la relación

$$R = \log\left(\frac{M}{A_0}\right). \tag{3.11.4}$$

Por otro lado, la magnitud del terremoto en China es $R+1$, por lo que si C es su amplitud, entonces se cumple la relación

$$R + 1 = \log\left(\frac{C}{A_0}\right). \tag{3.11.5}$$

Reemplazando (3.11.4) en (3.11.5), obtenemos la igualdad

$$\log\left(\frac{M}{A_0}\right) + 1 = \log\left(\frac{C}{A_0}\right).$$

O sea

$$\log\left(\frac{C}{A_0}\right) - \log\left(\frac{M}{A_0}\right) = 1.$$

Usando propiedades de logaritmos, la igualdad anterior se convierte en

$$log\left(\frac{C}{M}\right) = 1.$$

De este modo,

$$\frac{C}{M} = 10,$$

por lo que $C = 10M$, y concluimos que el terremoto en China tuvo un alcance de 10 veces el terremoto en México. □

Ejercicio 3.11.4. *La cantidad del isótopo Carbono 14, el cual es denotado por C-14, presente en cada ser vivo, es el mismo que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C-14 ya sea por respiración o alimentación cesa. De este modo, es posible determinar la edad aproximada de un fósil, a través de la cantidad de Carbono 14 presente en él, comparada con la cantidad constante de C-14 presente en la atmósfera, a través de un modelo de la forma*

$$A(t) = A_0 e^{kt}, \tag{3.11.6}$$

donde $A(t)$ es la cantidad de $C-14$ que queda en el fósil, a los t años de haber fallecido el ser vivo. Por otro lado, A_0 es la cantidad de $C-14$ presente en la atmósfera, o si tu quieres la cantidad de C-14 en el organismo cuando estaba vivo. Finalmente, k es una constante por determinar.

Se estima que la vida media del Cárbono 14, es decir el tiempo que demora en desintegrarse la mitad de éste, es de 5600 años. Use calculadora cuando sea necesario:

a) *Determine el valor de la constante k.*

Solución. Como A_0 es la cantidad de C-14 presente en el organismo cuando estaba vivo, entonces

$$A(5600) = \frac{A_0}{2}. \tag{3.11.7}$$

De este modo, reemplazando $t = 5600$ en (3.11.6) e igualando lo obtenido con (3.11.7), se deduce que

$$A_0 e^{5600k} = \frac{A_0}{2}.$$

Así

$$e^{5600k} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, de la última ecuación, podemos determinar el valor de k, aplicando logaritmo natural en ambos miembros, obteniendo que

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5600}.$$

b) *¿Cuál es la edad estimada de un fósil que contiene un 1% de la cantidad de cárbono 14 presente en la atmósfera?*

Solución. Reemplazando el valor obtenido de k en (3.11.6), obtenemos que

$$A(t) = A_0 e^{t \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5600}}.$$

Aplicamos propiedades, de modo de eliminar las funciones exponencial y logarítmica. Deducimos que

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}. \tag{3.11.8}$$

Ahora, deseamos el tiempo t en el cual la cantidad de $C-14$ es $\frac{A_0}{100}$. Debemos resolver la ecuación

$$A(t)=\frac{A_0}{100}.$$

Usando (3.11.8), la ecuación anterior queda como

$$A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}=\frac{A_0}{100},$$

la cual es equivalente a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5600}}=\frac{1}{100}.$$

Aplicando logaritmo natural en ambos miembros, obtenemos

$$\frac{t}{5600}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{100},$$

igualdad equivalente a

$$\frac{t}{5600}\cdot(-\ln(2))=-\ln 100.$$

Por lo tanto,

$$t=5600\cdot\frac{\ln 100}{\ln 2}\approx 55800.$$

Es decir, un fósil que contiene el 1 % de la cantidad de C-14 presente en la atmósfera, tiene una edad aproximada de 55800 años. □

3.12. Ejercicios propuestos.

1. A través de una tabla de valores, obtenga el gráfico de la función definida por

   a) $f(x)=3^x$

   b) $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

   c) $h(x)=-3^x$

   d) $l(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. En base a lo obtenido en el ejercicio anterior, ¿qué simetría existe entre el gráfico de $f(x)=3^x$ y cada uno de los otros tres gráficos?

3. A través de una tabla de valores, obtenga el gráfico de $g(x) = \log_4(x)$.

4. Realizando la simetría del gráfico de $f(x) = 4^x$ con respecto a la recta $y = x$, obtenga el gráfico de $g(x) = \log_4(x)$. Compruebe que el gráfico obtenido coincide con el obtenido en el ejercicio anterior.

5. Realizando la simetría del gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ con respecto a la recta $y = x$, obtenga el gráfico de $\log_{(\frac{1}{4})}$.

6. En virtud de lo obtenido en los ejercicios 4 y 5 ¿qué simetría existe entre el gráfico de $\log_4$ y $\log_{(\frac{1}{4})}$?

7. Determine, sin calculadora, usando sólo las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo, el valor de:

   a) $\log(0{,}01)$
   b) $\log_7 \sqrt[4]{7^3}$
   g) $\log_{\frac{1}{32}} \frac{1}{64}$
   d) $\log_5 \sqrt[3]{25}$
   e) $\log_{\frac{1}{2}} 8$
   f) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{27}\right)$
   g) $\log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{64}$
   h) $\log_{\sqrt{5}} 25$

8. Determine el valor de x si

   a) $\log_4 x = -2$
   b) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$
   c) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$
   d) $\log_x \left(\frac{16}{25}\right) = -2$

9. Sea $a > 0, a \neq 1$ y $x > 0$. En este ejercicio queremos demostrar la propiedad

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x.$$

   Para ello, considere la expresión

$$y = \log_{\frac{1}{a}} x. \tag{3.12.1}$$

   a) ¿A qué expresión corresponde la potencia $\left(\frac{1}{a}\right)^y$?

   b) En base a lo obtenido en *a*), ¿a qué expresión corresponde la potencia a^{-y}?

c) En base a lo obtenido en b), ¿a qué expresión corresponde $\log_a x$?

d) En base a lo obtenido en c) y a (3.12.1), ¿qué relación existe entre $\log_{\frac{1}{a}} x$ y $\log_a x$?

10. Determine el conjunto solución de:

a) $125^x = \frac{1}{25}$

b) $4^{x^2-1} = \frac{1}{2}$

c) $10^{x-2} = 1$

d) $7^{2(x+1)} = 343$

e) $3^{-3x} = \frac{1}{81}$

f) $5^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+1} - 8 = 0$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3^{1-2x} = 3^{1-3x} + \left(\frac{1}{9}\right)^x$

h) $6^x + 9^x = 2^{2x+1}$

i) $\log_3(7-x) - \log_3(1-x) = 1$

j) $\log_6(x-5) + \log_6(x-6) = 1$

k) $2 + \log_2(x-3) = \log_2(2x+4)$

l) $3\left(\log_3(x)\right)^2 - 6\log_{\frac{1}{3}}(x) = 9$

m) $\sqrt{\log_2 x} = \log_2(\sqrt{x})$

n) $2\log(x+1) = \log\left(\frac{12x}{23} - 1\right) + \log(23)$

ñ) $\ln(3x^2 - x) = \ln(x) + \ln(2)$

11. Considere la ecuación $3^x = 4 \cdot 5^x$.

a) Resuélvala aplicando log_3.

b) Resuélvala aplicando log_5.

c) Compruebe que las soluciones obtenidas en el paso a) y en el paso b) coinciden.

12. Determine el conjunto solución de:

a) $16^x > \frac{1}{16} \cdot 4^{1-x^2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 4^{1-2x}$

c) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 8 \leq 0$

d) $\log_3(x+4) < 0$

e) $\log_2(\log_{(\frac{1}{2})}(x+1)) > 1$

13. Considere la función $f : Domf \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

    a) $f(x) = \log_2(4x^2 - 1)$

    b) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

    Determine, en cada caso:

    13.1) Su dominio.

    13.2) Una restricción de modo que la función dada sea biyectiva.

    13.3) La función inversa de la función obtenida en 13.2).

14. Considere la función $f : Domf \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
    $f(x) = \ln x - \ln(1 - x)$.

    a) Determine $Domf$.

    b) Determine, si es que existe, la preimagen de $y = 0$.

    c) ¿Es f sobreyectiva?

15. Considere las funciones $f(x) = \log_2(\sqrt{x^2 - 1})$, $g(x) = 2^{\frac{x}{2}}$.

    a) Determine el dominio de la función $f \circ g$.

    b) Determine $(f \circ g)(x)$, para $x \in Dom(f \circ g)$.

16. La cantidad de habitantes de Chile (en millones de personas) t años después del año 1980 puede describirse mediante la función

    $$H(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

    donde N_0 es la cantidad de habitantes (en millones de personas) en Chile en 1980 y λ es una constante real.

    a) Determine el valor de λ teniendo en cuenta que el número de habitantes en Chile en 2010 era 1,5 veces la cantidad en 1980.

b) Estime, con ayuda de H y del valor obtenido en a), a partir de qué año el número de habitantes en Chile será a lo menos el doble del número de habitantes en 1980. Dato: Utilize $log_{\left(\frac{3}{2}\right)}(2) = \frac{17}{10}$

17. Supongamos que se invierte un capital inicial de $\$P$ a una tasa de interés continua del $j\,\%$. El monto S obtenido a los t años, viene dado por

$$S(t) = Pe^{\frac{j}{100}\cdot t}$$

a) Oscar depositó \$32000 a una tasa de interés continua del 8 % ¿Qué monto obtuvo a los 2 años y medio? Dato: Use $e^{\frac{9}{40}} = \frac{5}{4}$.

b) Daniela desea depositar \$250000 en el banco, y ojalá lograr \$300000 al cabo de 2 años . ¿Cuál debe ser la tasa de interés continua para que se cumpla el deseo de Daniela? Dato: Use $\ln\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{9}{50}$.

18. La magnitud del terremoto de Concepción del 27 de febrero del 2010 fue de 8,8 en la escala de Richter. Por otro lado, el terremoto de Iquique del 1 de abril de 2014 fue de 8,2 en la escala de Ritcher. ¿Cuántas veces mayor fue la amplitud de la onda en el terremoto del 2010 que en el de 2014? Dato: Use $10^{\frac{3}{5}} = 4$.

19. En un trozo de madera quemada o carbón vegetal se determinó que el 85 % de su C-l4 se había desintegrado. Determine la edad aproximada de la madera. Éstos son precisamente los datos que usaron los arqueólogos para determinar la fecha de los murales prehistóricos de una caverna en Lascaux, Francia. Use calculadora.

20. El pH de una sustancia es la medida de su acidez o de su alcalinidad. Este viene dado por

$$pH = -\log(a_{H^+})$$

donde a_{H^+} corresponde a la actividad de los iones hidrógeno. Se puede probar que si el pH es más cercano a 0, entonces la sustancia es más ácida. Por ejemplo, el pH de la leche es de 6,5. La actividad de iones de hidrógeno en el jugo de limón es de aproximadamente 12589 veces la actividad de iones de hidrógeno en la leche,

a) ¿Cuál es el pH del jugo de limón?

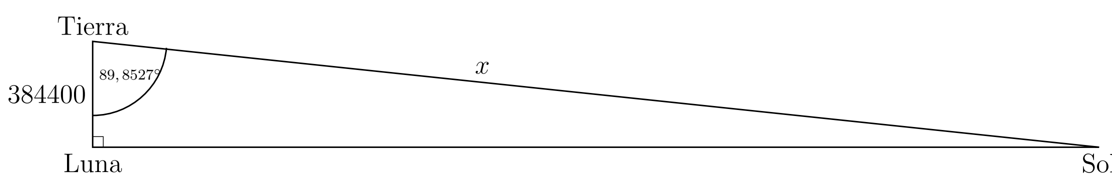
b) ¿Comprueba el valor obtenido que el jugo de limón es más ácido que la leche?

Capítulo 4

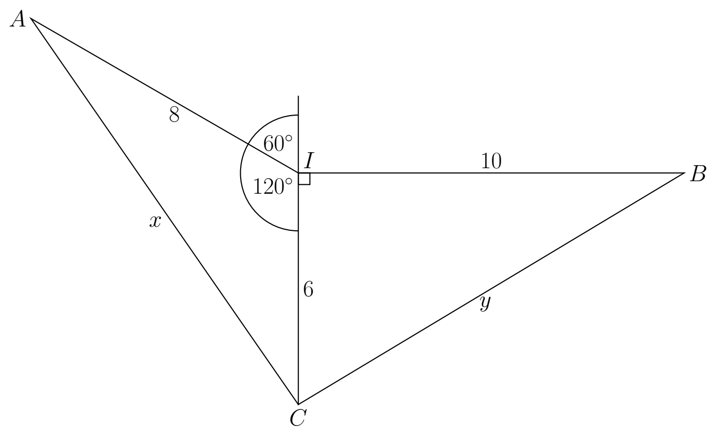
Trigonometría y funciones circulares.

4.1. Introducción.

En este capítulo estudiaremos inicialmente Trigonometría, que corresponde a la rama de la Matemática que estudia la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. La Trigonometría nos permite, entre otras tantas cosas, obtener la distancia entre dos objetos que son observados simultáneamente por una persona, conociendo algunos datos como distancias y ángulos relacionados con el problema. Por ejemplo, podemos calcular la distancia x desde la Tierra al Sol, sabiendo que la distancia desde la Tierra a la Luna es de 384000 kms, que el ángulo entre las líneas Luna-Tierra y Luna-Sol es de 90°, y además, sabiendo que si desde la Tierra observáramos la Luna y el Sol a la vez, lo haríamos con un ángulo de $89,8527°$:



Posteriormente, estudiaremos las funciones circulares, que son una extensión de la Trigonometría, de modo de trabajar con ángulos de medida mayor a 180°. Aquí aparecen problemas vinculados con puntos cardinales. Por ejemplo, la figura muestra una competencia de motos que parte en el punto I y cuyo recorrido va hacia el sur. Un piloto se accidenta en el punto C, y la ambulancia que lo rescató debe acudir a alguna de los campamentos A o B, de modo que su atención sea rápida :



¿A cuál campamento le conviene acudir?

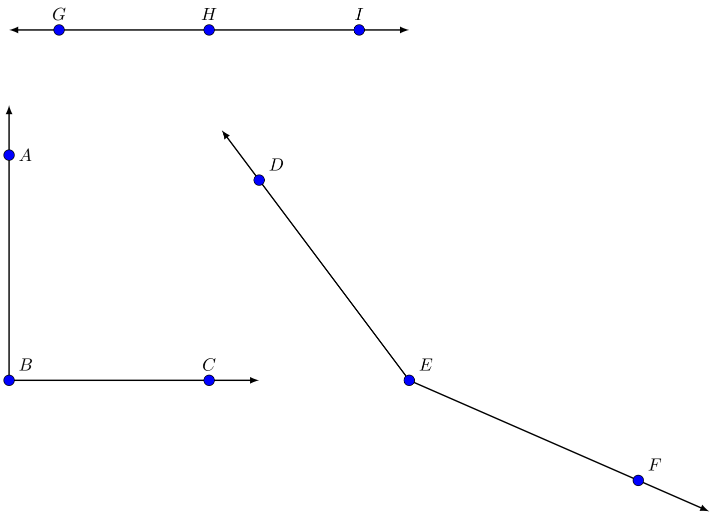
También aparecen las funciones sinusoidales, las cuales modelan fenómenos de naturaleza periódica, tales como el movimiento de un péndulo, el ciclo respiratorio humano, y la altura de un carro en una rueda de la fortuna que gira, entre otros. Por ejemplo, en Chile, las horas de luz diurna en el día t del año 2018 ($t = 0$ es el primer día de Enero), se deberían ajustar a la función sinusoidal

$$D(t) = -\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-79)\right) + 12.$$

Si el gobierno pretende declarar horario de invierno en el período cuando las horas de luz diurna sean menos de 12, entonces graficando esta función podríamos responder a esta interrogante.

4.2. Ángulos.

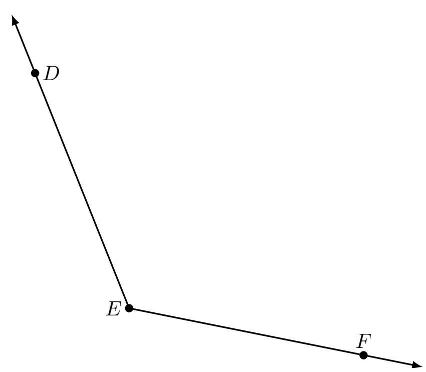
Ejemplos: Tres ejemplos de ángulos son



Definición 4.2.1. *Un **ángulo** es un conjunto de puntos, formado por la unión de dos semirectas que tienen origen común. Las semirectas se denominan **lados** del ángulo y el punto de origen común se denomina **vértice** del ángulo.*

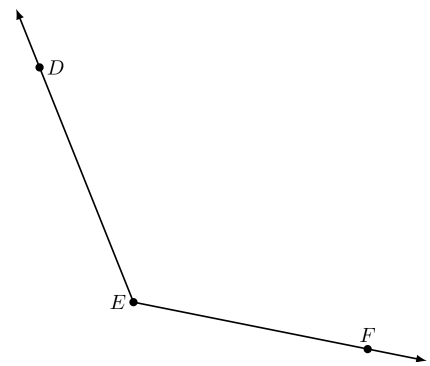
Observación 4.2.1. Para nombrar un ángulo tenemos dos opciones:

- Lo nombramos usando un punto de cada lado y su vértice. Por ejemplo, el ángulo

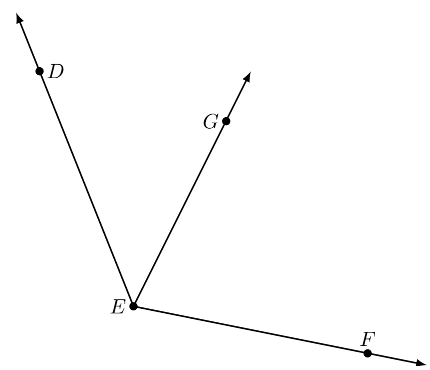


es denominado $\angle DEF$ (la letra del vértice es la que va en el medio).

- Lo nombramos usando sólo su vértice. Por ejemplo, el ángulo

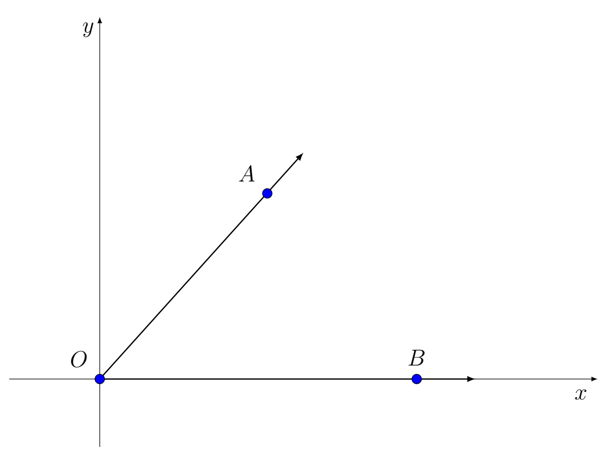
  

  es denominado $\angle E$. Sin embargo, esto no siempre es posible. Si consideramos la figura

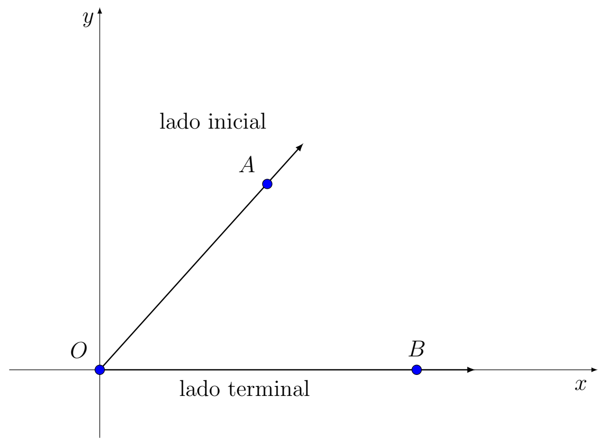
  

  en ella hay tres ángulos con vértice E, por lo habría ambigüedad al nombrar a alguno de estos ángulos como $\angle E$.

4.2.1. Ángulos en posición normal.

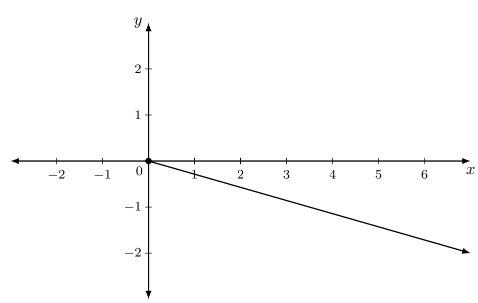


Definición 4.2.2. *Diremos que un ángulo está en* ***posición normal*** *si su vértice coincide con el origen del plano cartesiano y uno de sus lados, que llamaremos* ***lado inicial****, coincide con el semieje positivo de las x. El lado restante, lo llamaremos* ***lado terminal*** *del ángulo.*



El cuadrante al cual pertenece el ángulo corresponde al cuadrante al cual pertenece su lado terminal.

Ejercicio 4.2.1. *¿A qué cuadrante pertenece el ángulo de la imagen?*

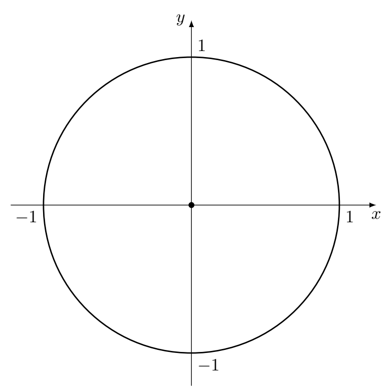


Solución. Al cuarto cuadrante.

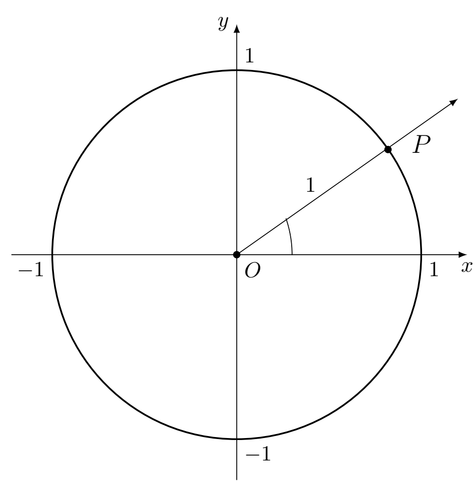
4.3. Medidas de ángulos.

Intuitivamente, la medida de un ángulo cuantifica la abertura que determinan los lados del ángulo. A cada ángulo $\angle POQ$ se asocia un número real $m(\angle POQ)$, llamado **medida del ángulo**, la cual es usualmente denotada con letras tales como α, β, θ, entre otras. Para definir formalmente lo que es la medida de un ángulo, veamos antes las siguientes definiciones, las cuales nos serán útiles en este proceso:

Definición 4.3.1. *En el plano cartesiano, llamamos* ***circunferencia unitaria*** *a la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio 1, es decir, a la circunferencia cuya ecuación es* $x^2 + y^2 = 1$.



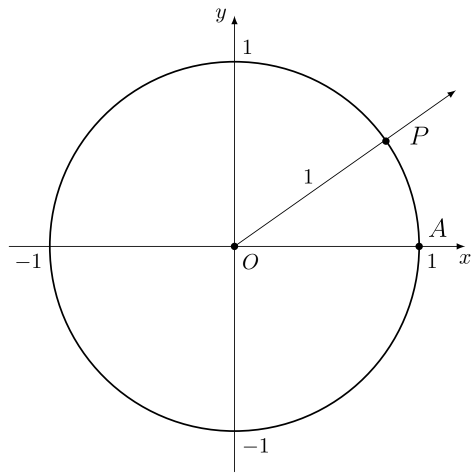
Definición 4.3.2. *Consideremos un ángulo en posición normal. Sea* P *el punto de intersección entre la circunferencia unitaria y el lado terminal del ángulo.*



El punto P *se denomina* ***punto terminal*** *del ángulo.*

De este modo, de manera formal, tenemos:

Definición 4.3.3. *Sea un ángulo $\angle AOP$ en posición normal:*

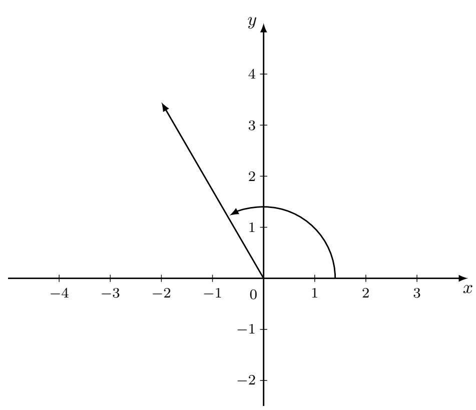


donde P es el punto terminal de este ángulo. La medida de $\angle AOP$, denotada por $m(\angle AOP)$, corresponde a la longitud del arco $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$.

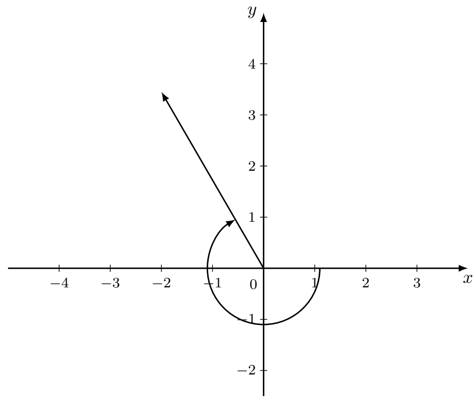
Convengamos además que:

Definición 4.3.4. *Un ángulo en posición normal es medido:*

- *en **sentido positivo**, si éste es medido, a partir de su lado inicial, en sentido antihorario. En este caso, su medida será un número positivo.*

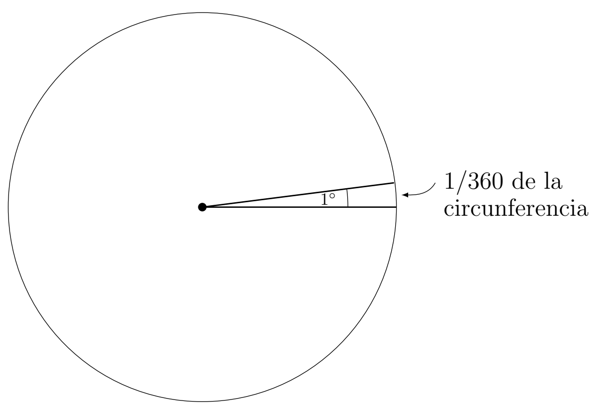


- *en **sentido negativo**, si éste es medido, a partir de su lado inicial, en sentido horario. En este caso, su medida será un número negativo.*



Las unidades de medida más tradicionales para medir ángulos son los grados y los radianes. Las definimos a continuación:

Definición 4.3.5. *Un **grado** es la medida de un ángulo correspondiente a un arco de longitud igual a* $\frac{1}{360}$ *de la longitud de una circunferencia.*

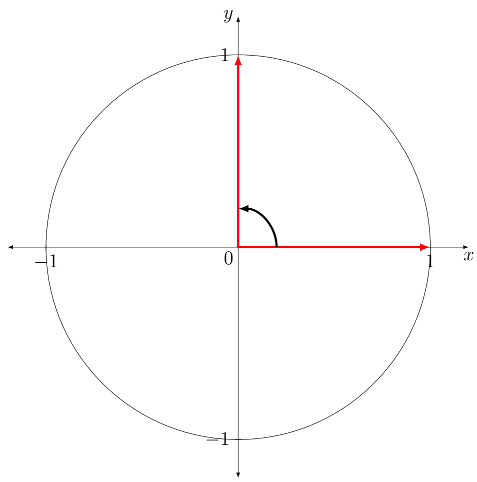


Notación: 1 grado $= 1^\circ$

Ejercicio 4.3.1. *Determine la medida positiva, en grados, de un ángulo en posición normal*

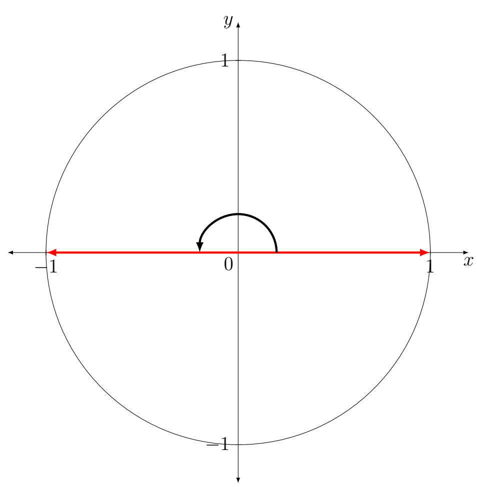
a) *cuyo lado terminal es el semieje y positivo.*

Solución. Dibujamos el ángulo y la circunferencia unitaria, y así en cada caso:



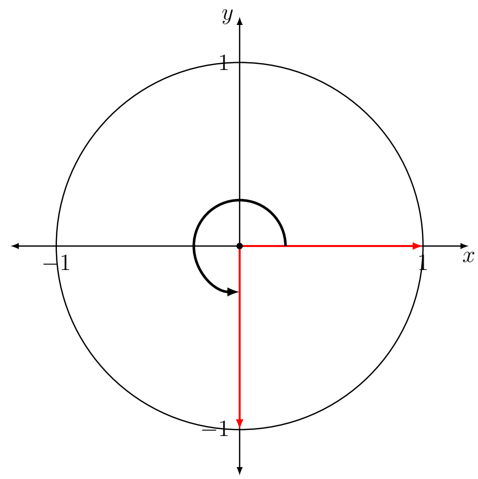
Note que el ángulo abarca un arco correspondiente a $\frac{1}{4}$ de la circunferencia, es decir, a $\frac{90}{360}$ de ésta. De este modo, este ángulo mide 90°.

b) *cuyo lado terminal es el semieje x negativo.*



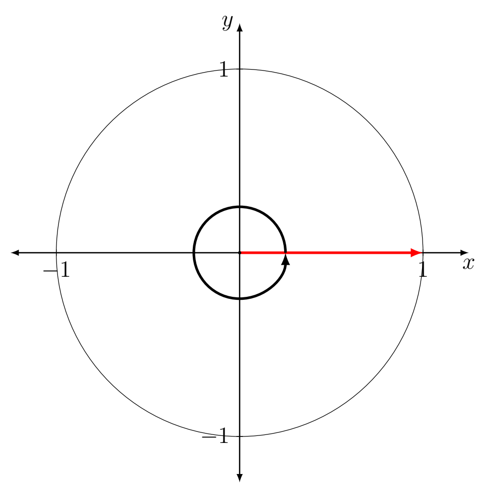
Solución. El ángulo abarca la mitad de la circunferencia, es decir, abarca un arco correspondiente a $\frac{180}{360}$ de la longitud de la circunferencia. Por lo tanto, el ángulo mide 180°.

c) *cuyo lado terminal es el semieje y negativo.*



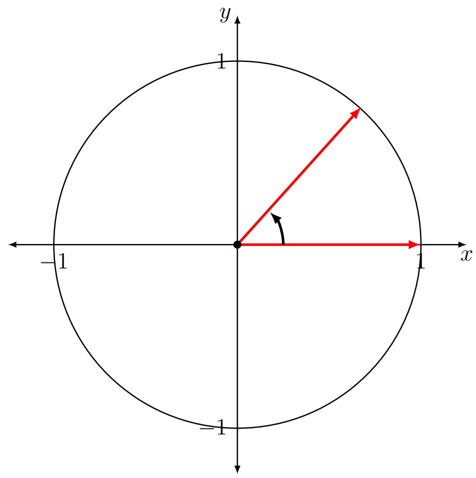
Solución. El ángulo abarca las $\frac{3}{4}$ partes de la circunferencia, es decir, abarca un arco de $\frac{270}{360}$ de la longitud de la circunferencia. Por lo tanto, el ángulo mide 270°.

d) *cuyo lado terminal es el semieje x positivo.*



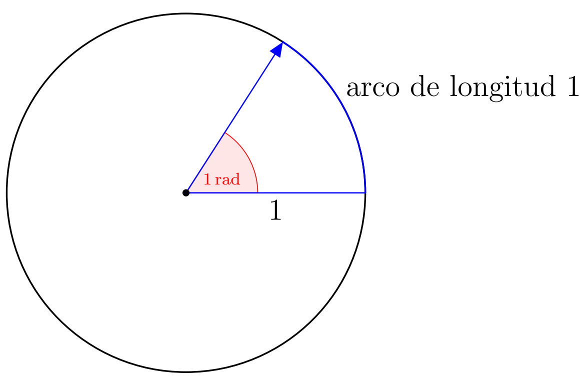
Solución. El ángulo no abarca arco alguno, por lo que mide 0°. Sin embargo, también se puede interpretar como que abarca la circunferencia completa, por lo que también decimos que mide 360°.

e) *cuyo lado terminal es la semirecta* $y = x, x \geq 0$.



Solución. El ángulo abarca la mitad de lo que abarca un ángulo de 90°, por lo que su medida es de 45°. □

Observación 4.3.1. Consideremos un ángulo central de la circunferencia unitaria. Este ángulo medirá 1 radián, cuando el arco que abarque mida 1 unidad:



Como la longitud de la circunferencia unitaria es 2π, entonces la medida de un ángulo central que abarca la circunferencia completa es 2π radianes. En general, la medida de un ángulo en radianes, corresponde númericamente al valor de la longitud del arco de la circunferencia unitaria que abarca.

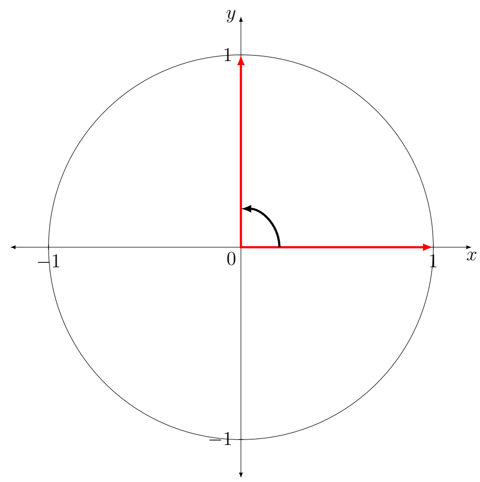
Definimos ahora lo que es un radián.

Definición 4.3.6. *Un **radián** es la medida de un ángulo central de una circunferencia unitaria, el cual abarca un arco de longitud 1. Notación: 1 radián* $= 1$ *rad.*

Ejercicio 4.3.2. *Determine la medida positiva, en radianes, de un ángulo en posición normal*

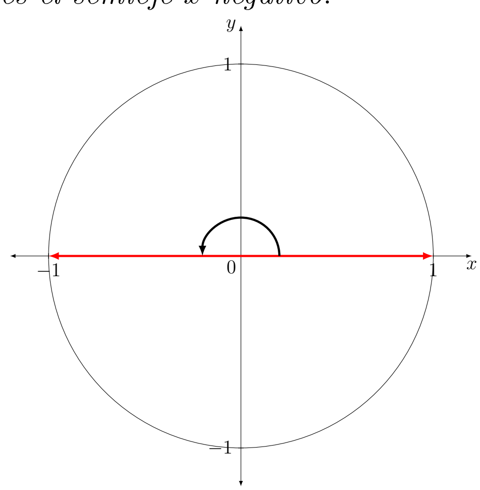
a) *cuyo lado terminal es el semieje y positivo.*

Solución. En cada caso, dibujamos la circunferencia unitaria y el ángulo dado:



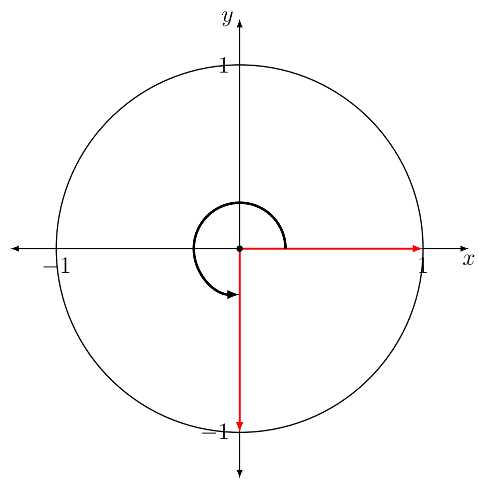
Como el ángulo abarca un arco correspondiente a $\frac{1}{4}$ de la circunferencia, este arco mide $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ unidades, por lo que el ángulo mide $\frac{\pi}{2}$ *rad.*

b) *cuyo lado terminal es el semieje x negativo.*



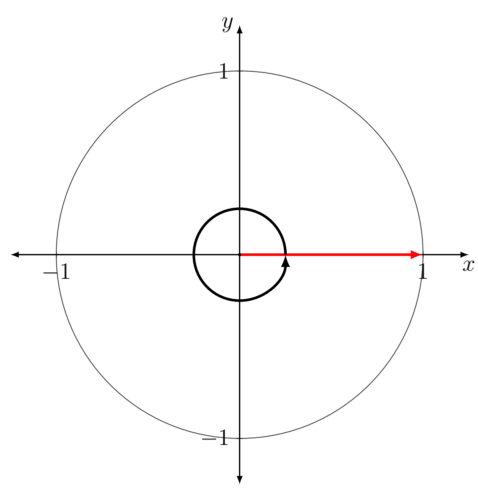
Solución. El ángulo abarca un arco correspondiente a la mitad de la circunferencia, por lo que este arco mide $\frac{2\pi}{2} = \pi$. De este modo, el ángulo mide π *rad.*

c) *cuyo lado terminal es el semieje y negativo.*



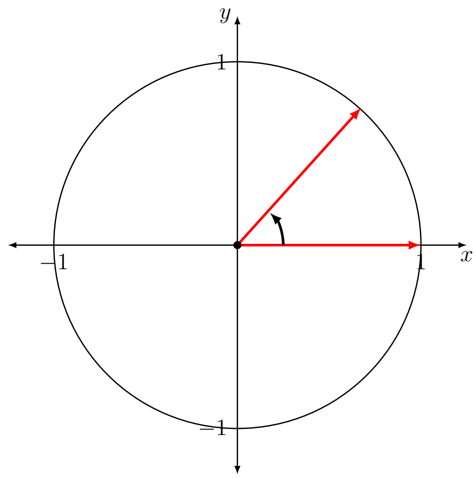
Solución. El ángulo abarca un arco correspondiente a las $\frac{3}{4}$ partes de la circunferencia. Por lo tanto, el ángulo mide $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ rad.

d) *cuyo lado terminal es el semieje x positivo.*



Solución. Se puede interpretar como el ángulo no abarca ningún arco o como que abarca la circunferencia completa, por lo que puede medir 0 rad o 2π rad.

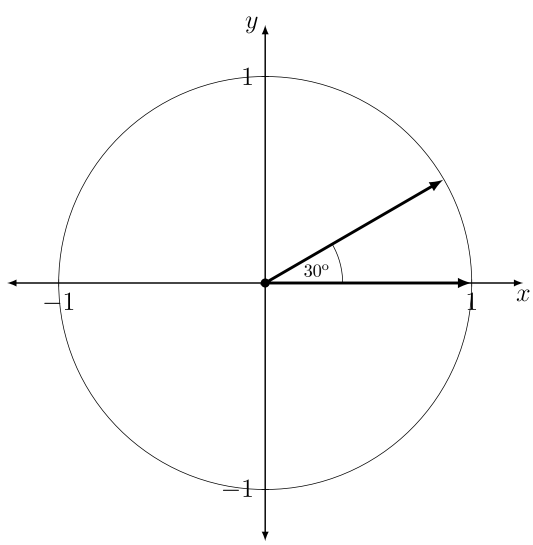
e) *cuyo lado terminal es la semirecta* $y = x, x \geq 0$.



Solución. El ángulo abarca la mitad de lo que abarca el ángulo de $\frac{\pi}{2}$ *rad*, por lo que el ángulo mide $\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ *rad*. $\square$

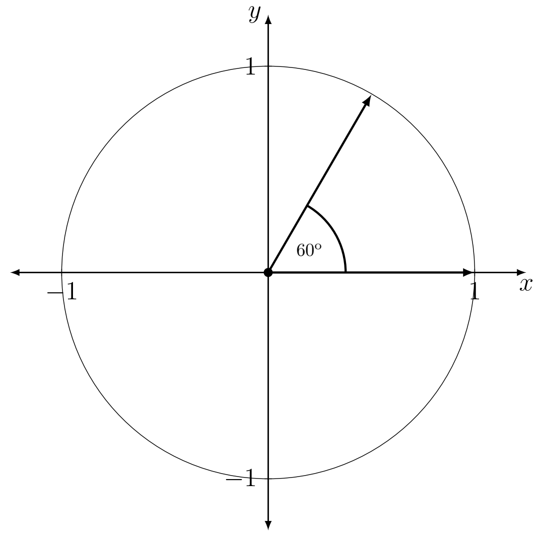
Ejercicio 4.3.3. *Determine la medida en radianes de un ángulo:*

a) *de* 30°.



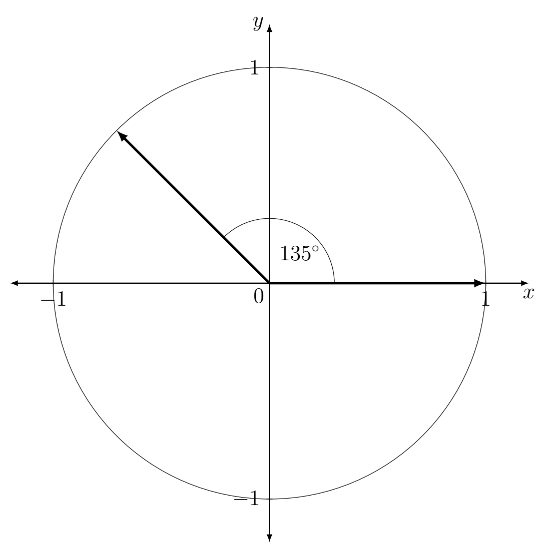
Solución. Un ángulo de 30° mide $\frac{1}{6}$ de un ángulo de 180°, la cual en radianes corresponde a π *rad*. De este modo, un ángulo de 30° mide $\frac{\pi}{6}$ *rad*.

b) *de* $60°$.



Solución. Un ángulo de $60°$ mide $\frac{1}{3}$ de un ángulo de $180°$, cuya medida en radianes es π *rad*. De este modo, un ángulo de $30°$ mide $\frac{\pi}{3}$ *rad*.

c) *de* $135°$.



Solución. Veamos varias formas:

- Primera forma: Note que

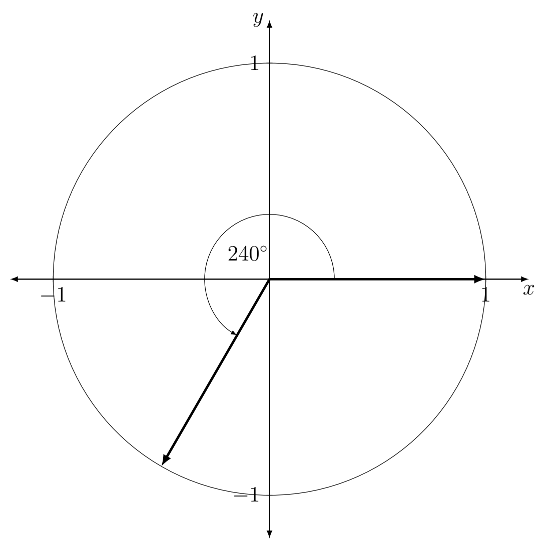
$$135° = 3 \cdot 45° = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}.$$

- Segunda forma: Un ángulo de $135°$ corresponde a las $\frac{3}{4}$ partes de un ángulo de $180°$, por lo que en radianes mide $\frac{3}{4} \cdot \pi = \frac{3\pi}{4}$ rad.

- Tercera forma: Note que

$$\begin{aligned} 135° &= 90° + 45° \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad} \\ &= \left(\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ rad} \\ &= \frac{3\pi}{4} \text{ rad.} \end{aligned}$$

d) *de* $240°$.



Solución. Lo hacemos de dos formas:

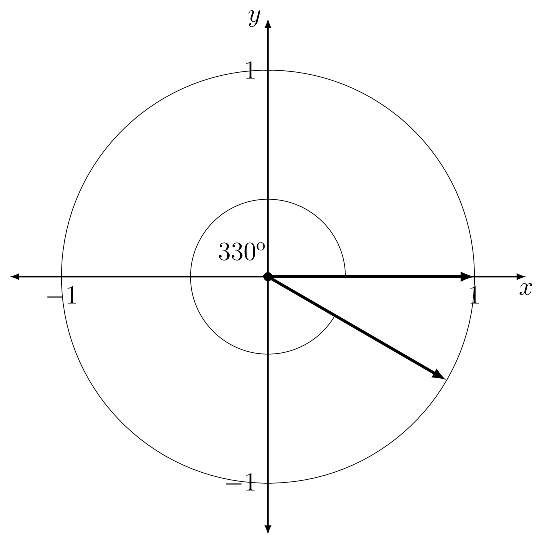
- Primera forma: Se tiene que

$$240° = 4 \cdot 60° = 4 \cdot \frac{\pi}{3}\ rad = \frac{4\pi}{3}\ rad.$$

- Segunda forma: Un ángulo de $240°$ se puede descomponer en un ángulo de $180°$ más un ángulo de $60°$, por lo que mide

$$\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\ rad = \left(\frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\ rad = \frac{4\pi}{3}\ rad.$$

e) *de* $330°$.



Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: Se tiene que

$$330° = 11 \cdot 30° = 11 \cdot \frac{\pi}{6}\ rad = \frac{11\pi}{6}\ rad.$$

- Segunda forma: Un ángulo de $330°$ se puede representar como un ángulo de $360°$ al cual se le quitó un ángulo de $30°$. Es decir, el ángulo pedido mide

$$\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\ rad = \left(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\ rad = \frac{11\pi}{6}\ rad.$$

$\square$

f) *de* $80°$.

Solución. Note que este ángulo no es un múltiplo de ningún ángulo conocido, ni tampoco se puede descomponer en suma o resta de algunos de ellos. En este caso, usamos el hecho que radianes y grados son magnitudes directamente proporcionales, para plantear la proporción

$$\frac{\alpha}{80} = \frac{\pi}{180},$$

donde α es la medida en radianes buscada. Se tiene que $\alpha = \dfrac{80\pi}{180} = \dfrac{4\pi}{9}$.

Ejercicio 4.3.4. *Determine la medida en grados de un ángulo:*

a) *de* $\frac{2\pi}{3}$ *rad.*

Solución. Veamos:

- Primera forma: El ángulo pedido mide $\frac{2}{3}$ de un ángulo de π rad, o sea $\frac{2}{3}$ de un ángulo de 180°, es decir, mide

$$\frac{2}{3} \cdot 180° = 120°.$$

- Segunda forma: Note que

$$\frac{2\pi}{3}\ rad = 2 \cdot \frac{\pi}{3}\ rad = 2 \cdot 60° = 120°.$$

b) *de* $\frac{5\pi}{3}$ *rad.*

Solución. Tenemos que

$$\frac{5\pi}{3}\ rad = 5 \cdot \frac{\pi}{3}\ rad = 5 \cdot 60° = 300°.$$

□

Ejercicio 4.3.5. *Considere un ángulo de medida*

a) $-\frac{\pi}{4}$ *rad.*

b) $-\frac{5\pi}{6}$ *rad.*

Si fuera medido en sentido positivo,

1) ¿cuál sería su medida α *en grados, con* $0 \leq \alpha \leq 360°$*?*

2) ¿cuál sería su medida α *en radianes, con* $0 \leq \alpha \leq 2\pi$*?*

Solución. (De 1) y 2) en simultáneo)

a) El ángulo de $-\frac{\pi}{4}$ *rad*, equivale a uno de $-45°$. De este modo, $\alpha = 315°$, lo que corresponde a un ángulo de $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ *rad.*

b) El ángulo de $-\frac{5\pi}{6}$ *rad* equivale a un ángulo de $-150°$, lo cual en sentido positivo corresponde a $\alpha = 210°$. Por lo tanto, su medida en radianes es $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ *rad*.

$\square$

Ejercicio 4.3.6. *Considere un ángulo de medida*

a) $\dfrac{13\pi}{3}$ *rad*

b) $\dfrac{17\pi}{6}$ *rad*

c) $-\dfrac{9\pi}{4}$ *rad*

Si fuera medido en sentido positivo,

1) ¿cuál sería su medida α *en grados, con* $0 \leq \alpha \leq 360°$*?*

2) ¿cuál sería su medida α *en radianes, con* $0 \leq \alpha \leq 2\pi$*?*

Solución. (De 1) y 2) en simultáneo)

a) Veamos dos formas:

- Primera forma: Primero obtenemos α en grados y luego en radianes. Note que $\frac{13\pi}{3}$ rad equivalen a $\frac{13}{3}$ de 180°, lo cual es

$$\frac{13}{3} \cdot 180° = 780°.$$

Dividiendo 780 entre 360, obtenemos cuociente 2 y resto 60. De este modo, el ángulo de 780° corresponde a 2 vueltas a la circunferencia unitaria en sentido antihorario, más un ángulo de 60°. Así, $\alpha = 60°$, de donde deducimos que $\alpha = \frac{\pi}{6}$ *rad*.

- Segunda forma: Primero obtenemos α en radianes y luego en grados. Escribimos $\frac{13}{3}$ como número mixto, de donde

$$\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3},$$

por lo que

$$\frac{13\pi}{3}\ rad = \left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)\ rad.$$

Es decir, dos vueltas a la circunferencia unitaria en sentido antihorario, más un ángulo de $\frac{\pi}{3}$. De este modo, $\alpha = \frac{\pi}{3}\ rad$. Así, $\alpha = 60°$.

b) Escribiendo $\frac{17}{6}$ como número mixto, obtenemos que

$$\frac{17\pi}{6} = \left(2\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\ rad.$$

Es decir, una vuelta a la circunferencia unitaria en sentido antihorario, más un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$, por lo que $\alpha = \frac{5\pi}{6}\ rad$, luego $\alpha = 150°$.

c) Se tiene que

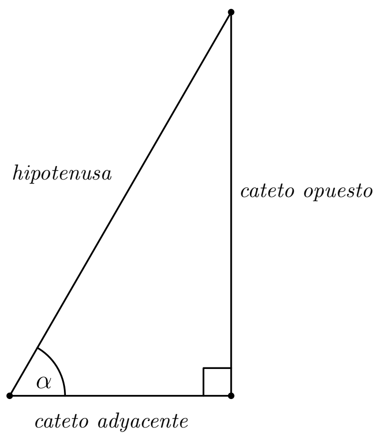
$$-\frac{9\pi}{4}\ rad = -\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\ rad = \left(-2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\ rad.$$

Es decir, el ángulo corresponde una vuelta a la circunferencia en sentido horario, más un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ también en sentido horario. De este modo, en sentido antihorario, el ángulo mide $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ rad, o sea $\alpha = 315°$.

$\square$

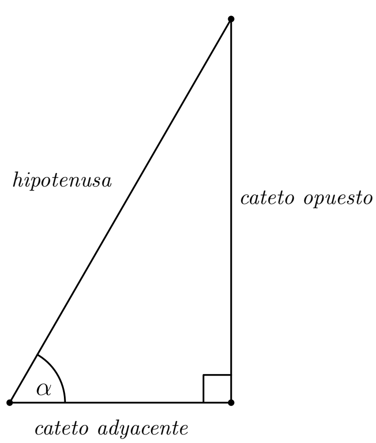
4.4. Razones trigonométricas.

Consideremos un triángulo rectángulo y α uno de sus ángulos agudos. Con respecto a α, obtenemos las siguientes denominaciones de sus lados



Es decir, el cateto opuesto a α es aquel cateto que está enfrente del ángulo α, y el cateto adyacente a α es aquel cateto que forma parte de un lado del ángulo α.

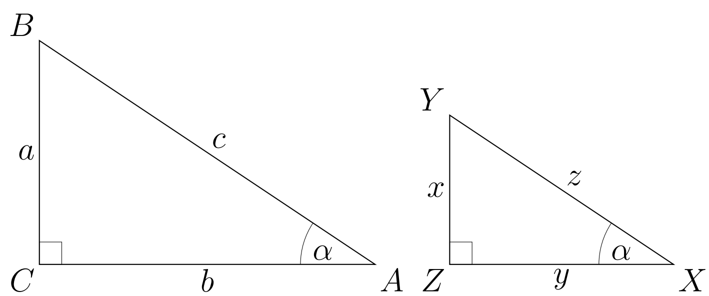
Definición 4.4.1. *Consideremos un triángulo rectángulo, y α uno de sus ángulos agudos, como se aprecia en la figura:*



Definimos las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente del ángulo α, las cuales se denotan respectivamente como $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ $\sec\alpha, \csc\alpha, \cot\alpha$ *como*

- $\sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$.
- $\cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$.
- $\tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$.
- $\cot\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$.
- $\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$.
- $\csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$.

Ejercicio 4.4.1. *Considere los tríangulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ de la figura:*



los cuales tienen lados de medidas a, b, c y x, y, z, respectivamente. Además, ambos triángulos tienen un ángulo agudo α.

a) *Para cada triángulo, determine el valor de* $\sin\alpha, \cos\alpha$ *y* $\tan\alpha$.

   Solución. Se tiene que

   - en el caso de $\triangle ABC$, $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}, \cos\alpha = \dfrac{b}{c},\ \tan\alpha = \dfrac{a}{b}$.
   - en el caso de $\triangle XYZ$, $\sin\alpha = \dfrac{x}{z}, \cos\alpha = \dfrac{y}{z},\ \tan\alpha = \dfrac{x}{y}$.

b) *Dado que estos triángulos tienen dos ángulos de igual medida, entonces son semejantes. Esto quiere decir que tienen igual forma, pero distinto tamaño. Específicamente, sus ángulos respectivos miden lo mismo, y sus lados respectivos son proporcionales. De este modo, ¿qué razón en $\triangle XYZ$ es igual a* b1) $\frac{a}{c}$?

Solución. Se tiene que $\frac{a}{c} = \frac{x}{z}$.

b2) $\frac{b}{c}$?

Solución. En este caso, $\frac{b}{c} = \frac{y}{z}$.

b3) $\frac{a}{b}$?

Solución. Se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

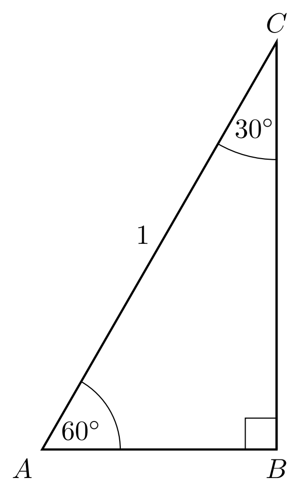
c) *Según lo obtenido en b), ¿que podemos concluir acerca de los valores de* $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ *obtenidos en cada uno de estos triángulos?*

Solución. Son iguales.

Observación 4.4.1. Según lo visto en el último ejercicio, para todos los triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo α, el valor de cada razón trigonométrica $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$, y también de sus recíprocos $\sec\alpha, \csc\alpha, \cot\alpha$ es único. Por ejemplo, para todos los triángulos rectángulos que tengan un ángulo de $60°$, el valor de cada razón trigonométrica $\sin 60°, \cos 60°$ y $\tan 60°$ y de todas las restantes razones trigonométricas, es único.

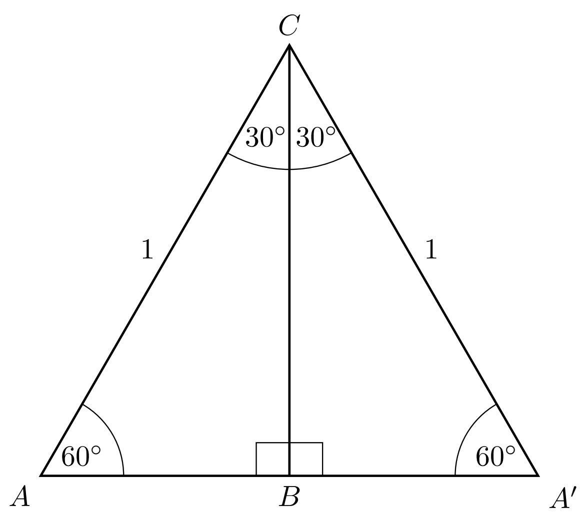
Obtengamos el valor de las razones trigonométricas $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ para $\alpha = 30°$, y también para $\alpha = 60°$.

Ejercicio 4.4.2. *Considere un triángulo rectángulo con ángulo de* $60°$*, y cuya hipotenusa mide 1 unidad:*



a) *Realize la simetría de* $\triangle ABC$ *con respecto al lado* $\overline{BC}$.

Solución. Al realizar la simetría, obtenemos el triángulo:



b) *¿Es* $\triangle ACA'$ *un triángulo equilátero?*

Solución. De a), vemos que los tres ángulos de $\triangle ACA'$ miden $60°$. Así, $\triangle ACA'$ es un triángulo equilátero, y sus lados miden 1 unidad cada uno.

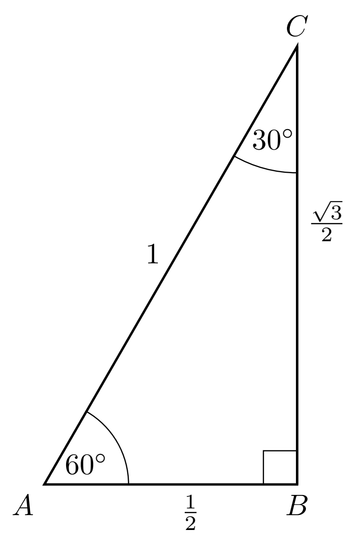
c) *¿Cuánto miden $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$?*

Solución. Como $\triangle ACA'$ un triángulo equilátero, entonces la altura $\overline{CB}$ cae en el punto medio de $\overline{AA'}$. De este modo, $AB = \frac{1}{2}$. Luego, usando el teorema de Pitágoras en $\triangle ABC$, vemos que

$$BC^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2,$$

de donde concluimos que $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) *Observamos nuevamente $\triangle ABC$, ahora conociendo las medidas de sus lados: Obtenga el valor de $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ para $\alpha = 60°$ y para $\alpha = 30°$.*



Solución. En $\triangle ABC$, se tiene que

- para el ángulo de 60°, su cateto opuesto mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y su cateto adyacente mide $\frac{1}{2}$. Como la hipotenusa mide 1, entonces

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \frac{1}{2},\ \tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

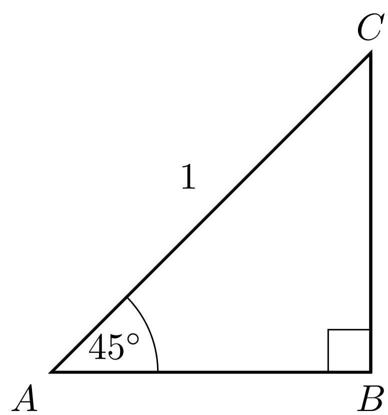
- para el ángulo de 30°, su cateto opuesto mide $\frac{1}{2}$ y su cateto adyacente mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como la hipotenusa mide 1, entonces

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

Obtengamos el valor de $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ para $\alpha = 45°$:

Ejercicio 4.4.3. *Consideremos un triángulo rectángulo, el cual tiene un ángulo de* $45°$, *y cuya hipotenusa mide 1 unidad:*



a) *¿Es* $\triangle ABC$ *un triángulo isósceles?*

Solución. Como $m(\angle A) = 45°$, y los ángulos de $\triangle ABC$ suman $180°$, entonces $m(\angle C) = 45°$. Como $\triangle ABC$ tiene dos ángulos de igual medida, entonces es un triángulo isósceles, con $AB = BC$.

b) *¿Cuánto miden* $\overline{AB}$ *y* $\overline{BC}$*?*

Solución. Suponemos que $AB = BC = x$. Como la hipotenusa mide 1, entonces por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$x^2 + x^2 = 1,$$

de donde concluimos que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Así, $AB = \frac{\sqrt{2}}{2} = BC$.

c) *Ya sabidas las medidas de todos los lados de* $\triangle ABC$, *¿Cuál es el valor* $\sin 45°$, $\cos 45°$ *y* $\tan 45°$*?*

Solución. Como los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden cada uno $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades y la hipotenusa mide 1 unidad, entonces:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan 45^\circ = 1.$$

□

Observación 4.4.2. Los valores de $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$ para $\alpha = 30^\circ,\ \alpha = 45^\circ,\ \alpha = 60^\circ$, obtenidos en los dos últimos ejercicios, se pueden resumir en la siguiente tabla:

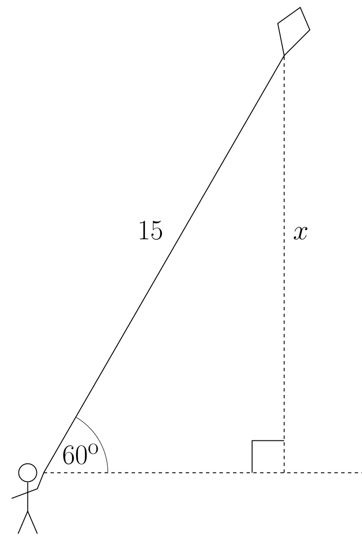
	$\alpha = \frac{\pi}{6}$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$	$\alpha = \frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Veamos como aplicar estos valores obtenidos, a la resolución de algunos problemas:

Ejercicio 4.4.4. *Cristóbal y Diego elevan volantines y compiten por cuál volantín vuela más alto. El hilo del volantín de Cristóbal mide 15 metros y eleva su volantín con un ángulo de elevación de* 60°*. El hilo del volantín de Diego mide 18 metros y eleva su volantín con un ángulo de elevación de* 45°*. Si ambos niños miden lo mismo. ¿cuál de los dos volantines vuela más alto?*
Dato: Use

$$15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13,\ 9\sqrt{2} \approx 12{,}7.$$

Solución. La primera figura retrata la situación de Cristóbal:



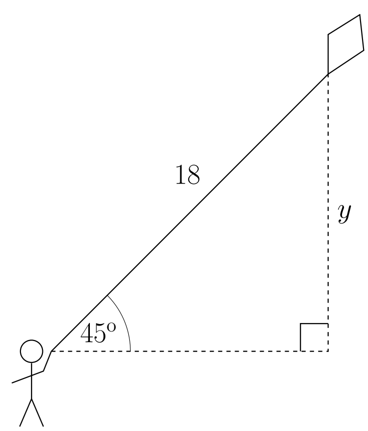
donde x representa la altura de su volantín, a partir de la mano de Cristóbal. De este modo, se tiene que

$$\frac{x}{15} = \sin 60^\circ,$$

por lo que

$$x = 15 \sin 60^\circ = 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ metros.}$$

Análogamente, retratamos la situación de Diego:



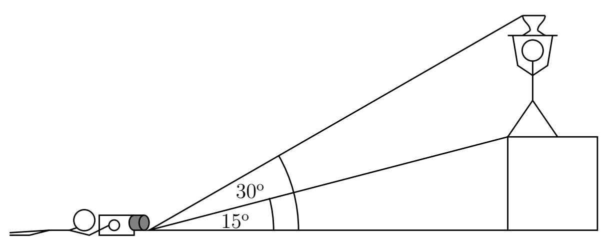
donde y es la altura de su volantín, a partir de la mano de Diego. Como

$$\frac{y}{18} = \sin 45^\circ,$$

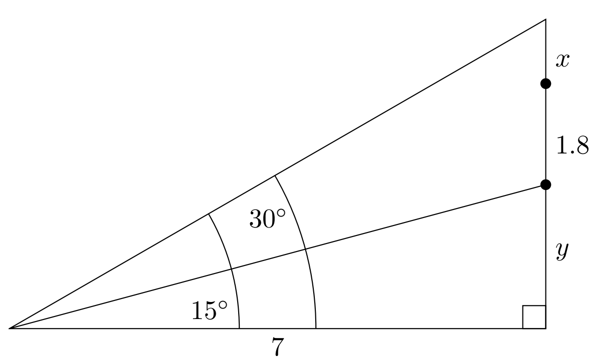
entonces
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 18 = 9\sqrt{2} = 12{,}7 \text{ metros.}$$
De este modo, como ambos niños miden lo mismo, entonces el volantín de Cristobal vuela más alto. □

Ejercicio 4.4.5. *En la final de la Copa América, Arturo Vidal recibió un pequeño trofeo, por ser el mejor jugador del partido. El futbolista está situado sobre una tarima, levantando el trofeo con ambas manos. A 7 m de la tarima, se sitúa un fotógrafo, el cual está recostado sobre el piso. El fotógrafo observa la tarima con un ángulo de elevación de* 15°*, y todo el conjunto (tarima, jugador y trofeo), con un ángulo de elevación de* 30°*. Si el futbolista mide* 1,8 *m ¿Cuánto mide el trofeo?*
Dato: Use el hecho que
$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3},\ 14 - 7\sqrt{3} \approx 1{,}87,\ \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}04$$

Solución. La figura retrata la situación:

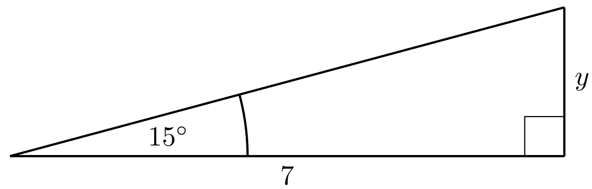


la cual, interpretada de modo más matemático es



donde x es la longitud del trofeo e y es la longitud de la tarima.

Tomando en cuenta sólo el triángulo triángulo rectángulo inferior:



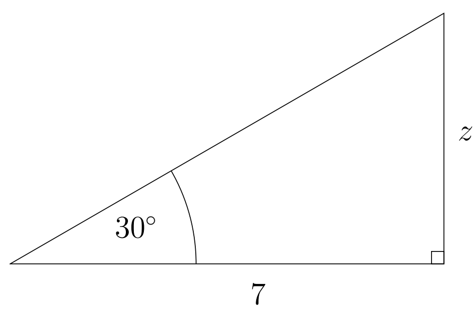
tenemos que

$$\tan 15° = \frac{y}{7} \tag{4.4.1}$$

por lo que

$$y = 7\tan 15° = 7(2-\sqrt{3}) = 14 - 7\sqrt{3} \approx 1{,}87 \text{ metros.}$$

Por otro lado, tomando en cuenta el triángulo rectángulo completo, tenemos la figura:



En este caso

$$\tan 30° = \frac{z}{7} \Leftrightarrow z = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}04 \text{ metros.}$$

De este modo, como en virtud de la primera figura, $z = x + 1{,}8 + y$, entonces

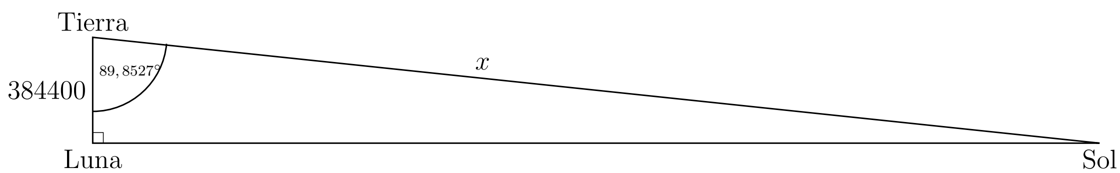
$$x \approx z - 1{,}8 - y = 4{,}04 - 1{,}8 - 1{,}87 \approx 0{,}37.$$

Por lo tanto, el trofeo mide aproximadamente 37 centímetros. □

Veamos un problema donde se aplican las razones trigonométricas, pero en un triángulo rectángulo que no tiene alguno de los ángulos de medida $30°, 45°$ o $60°$:

Ejercicio 4.4.6. *Se puede probar que el ángulo entre las líneas Luna-Tierra y Luna-Sol, es de* $90°$. *Además, si desde la Tierra observáramos la Luna y el Sol a la vez, lo haríamos con un ángulo de* $89,8527°$. *Se calcula que la distancia desde la Tierra hasta la Luna es de 384400 kms, ¿a cuántas veces la distancia de la Tierra a la Luna corresponde la distancia de la Tierra al Sol? Use calculadora.*

Solución. Una representación del problema es



donde x es la distancia desde la Tierra al Sol. Aquí, se puede apreciar que x es solución de la ecuación

$$\cos 89,8527° = \frac{384400}{x},$$

por lo que

$$x = \frac{384400}{\cos 89,8527°} = 149{,}5 \text{ millones de kms.}$$

Como

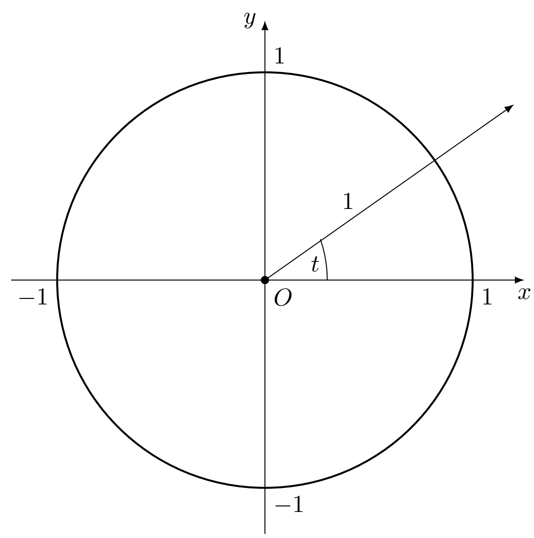
$$\frac{149500000}{384400} \approx 389,$$

concluimos que la distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente 389 veces la distancia de la Tierra a la Luna. $\square$

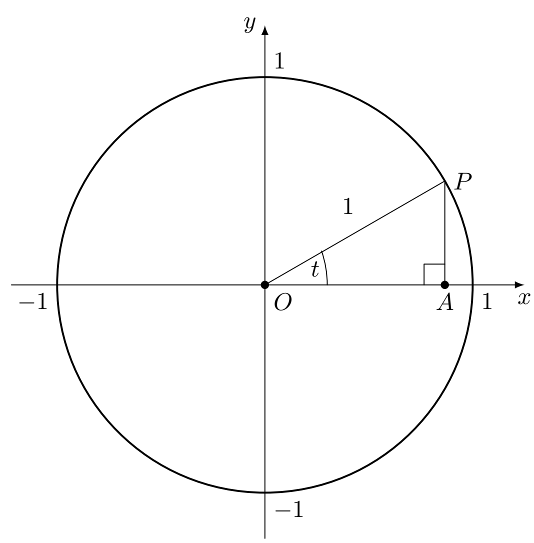
Existen situaciones que involucran triángulos, los cuales no son triángulos rectángulos, y donde además hay ángulos de medida mayor a $90°$. Para resolver este tipo de situaciones, extendemos el concepto de razón trigonométrica al concepto de función circular, donde definimos $\sin\alpha, \cos\alpha$ y $\tan\alpha$ para ángulos de medida mayor a $90°$.

4.5. Funciones circulares.

Ejercicio 4.5.1. *Supongamos que tenemos un ángulo ubicado en posición normal, de medida t radianes, perteneciente al primer cuadrante. Junto con él, dibujamos la circunferencia unitaria:*



Llamamos P a su punto terminal, O al origen, y trazamos un segmento perpendicular desde P hasta el eje x. El otro extremo de este segmento lo denominamos por A.



Note que $\triangle OPA$ es un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 1.

a) *¿Cuánto miden los catetos de $\triangle OPA$?*

Solución. Sea x la longitud del cateto adyacente e y la longitud del cateto opuesto al ángulo t. Se tiene que

$$\cos t = \frac{x}{1} = x, \text{ y } \sin t = \frac{y}{1} = y,$$

por lo que $x = \cos t$ e $y = \sin t$.

b) *¿Cuáles son las coordenadas del punto terminal P?*

Solución. En vista de lo obtenido en a), las coordenadas del punto terminal son

$$P = (x, y) = (\cos t, \sin t).$$

□

Generalizemos lo obtenido en el ejercicio anterior, con la definición de las llamadas **funciones circulares**:

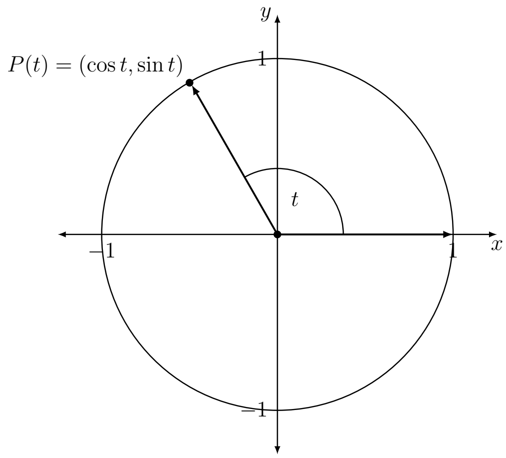
Definición 4.5.1. *Consideremos un ángulo en posición normal y de medida t. Denotamos por $P(t)$ a su punto terminal. Se tiene que*

- *La función **coseno**, es aquella a cada t le asocia la primera coordenada de $P(t)$. Con la notación usual se tiene*

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \cos t. \end{aligned}$$

- *La función **seno**, es aquella que a cada t le asocia la segunda coordenada de $P(t)$. Con la notación usual se tiene*

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sin t. \end{aligned}$$



Ejercicio 4.5.2. *Determine los valores de* $\sin t$ *y* $\cos t$ *para*

a) $t = 0$

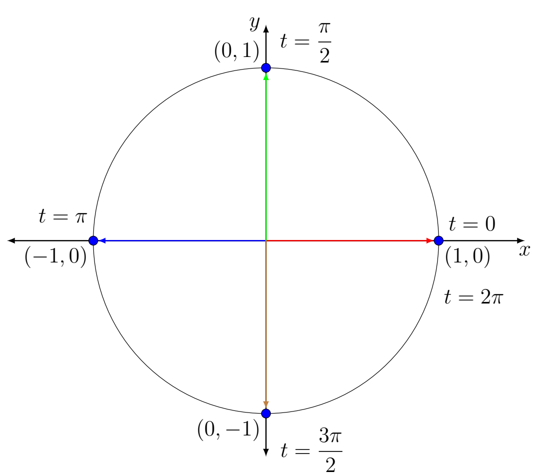
b) $t = \frac{\pi}{2}$

c) $t = \pi$

d) $t = \frac{3\pi}{2}$

e) $t = 2\pi$

Solución. El siguiente gráfico muestra la circunferencia unitaria junto con los ángulos mencionados, y los puntos terminales respectivos:



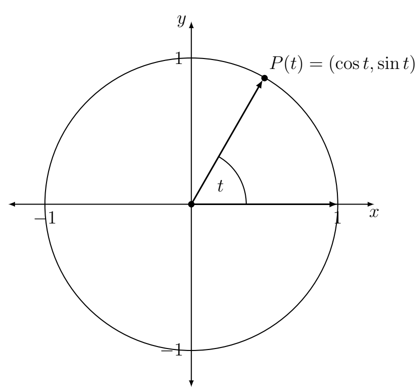
Acá vemos que

- $P(0) = (1, 0)$, por lo que $\cos 0 = 1$ y $\sin 0 = 0$.
- $P(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$, por lo que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.
- $P(\pi) = (-1, 0)$, así tenemos que $\cos \pi = -1$ y $\sin \pi = 0$.
- $P(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$, de modo que $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ y $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.
- $P(2\pi) = (1, 0)$, por lo que $\cos 2\pi = 1$ y $\sin 2\pi = 0$.

□

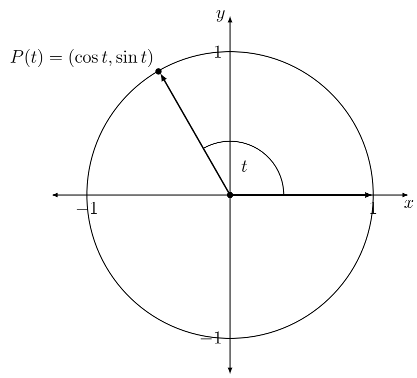
Ejercicio 4.5.3. *Considere un ángulo en posición normal de medida t. Determine si $\sin t$ y $\cos t$ son positivos o negativos, cuando*

a) *el ángulo t pertenece al primer cuadrante.*



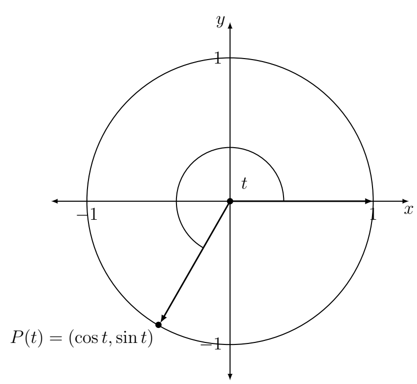
Solución. Si el ángulo t pertenece al primer cuadrante, su punto terminal tiene ambas coordenadas positivas, por lo tanto, en este caso, $\sin t$ y $\cos t$ son positivos.

b) *el ángulo t pertenece al segundo cuadrante.*



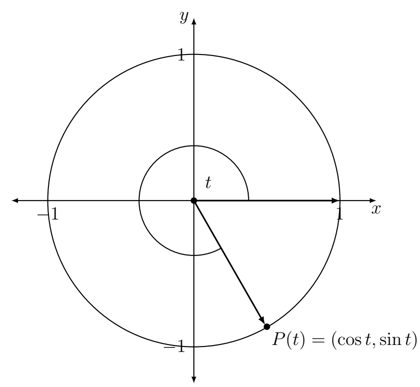
Solución. Si el ángulo pertenece al segundo cuadrante, la primera coordenada de su punto terminal es negativa, y la segunda coordenada es positiva. Por lo tanto, en este caso, $\sin t$ es positivo y $\cos t$ es negativo.

c) *el ángulo t pertenece al tercer cuadrante.*



Solución. Si el ángulo pertenece al tercer cuadrante, su punto terminal tiene ambas coordenadas negativas, por lo que, en este caso, $\sin t$ y $\cos t$ son negativos.

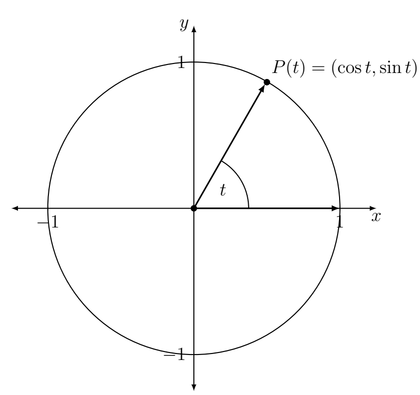
d) *el ángulo t pertenece al cuarto cuadrante.*



Solución. Si el ángulo pertenece al cuarto cuadrante, su punto terminal tiene primera coordenada positiva y segunda coordenada negativa, por lo que, en este caso, $\cos t$ es positivo y $\sin t$ es negativo. □

Ejercicio 4.5.4. *Para un ángulo de medida t en posición normal, ¿cuál es el máximo y mínimo valor que puede tomar $\sin t$?, ¿cuál es el máximo y mínimo valor que puede tomar $\cos t$?*

Solución. Como $(\cos t, \sin t)$ es un punto de la circunferencia unitaria



entonces

$$-1 \leq \cos t \leq 1$$

y

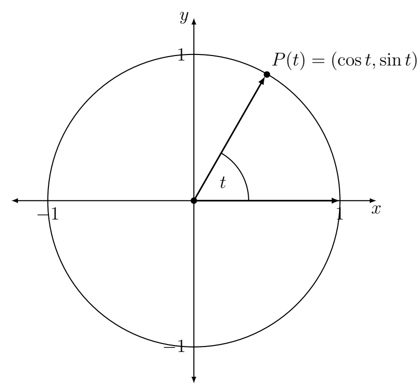
$$-1 \leq \sin t \leq 1.$$

De este modo, ya sea para la función seno o la función coseno, el mínimo valor es -1 y el máximo valor es 1. $\square$

Proposición 4.5.2. *Para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$|\sin t| \leq 1 \ \wedge \ |\cos t| \leq 1.$$

Ejercicio 4.5.5. *Para un ángulo de medida t en posición normal, se tiene que su punto terminal $(\cos t, \sin t)$ es un punto de la circunferencia unitaria*



De este modo, ¿qué podemos concluir de la expresión $\cos^2 t + \sin^2 t$?

Solución. Como la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$, entonces

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

$\square$

Proposición 4.5.3. *Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

4.6. Función tangente.

Ejercicio 4.6.1. *Considere el cuociente* $\frac{\sin t}{\cos t}$*. Determine todos los valores de* t*, con* $0 \leq t \leq 2\pi$*, de modo que este cuociente no está definido.*

Solución. Debemos buscar todos los valores de t, con $0 \leq t \leq 2\pi$, tales que $\cos t = 0$. Los valores de t pedidos corresponden a $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$. □

Observación 4.6.1. En general, el cuociente $\frac{\sin t}{\cos t}$ no está definido para $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ (intuitivamente, un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ más k medias vueltas a la circunferencia, en sentido horario o antihorario).

Definición 4.6.1. *La función* ***tangente****, denotada por tan, corresponde a la función*

$$\tan : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto y = \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Ejercicio 4.6.2. *Sea* t *un ángulo en posición normal. Determine si* $\tan t$ *es positiva o negativa, si* t *pertenece*

a) *al primer cuadrante.*

   Solución. En este caso, $\sin t$ y $\cos t$ son positivos, por lo tanto $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ es positivo.

b) *al segundo cuadrante.*

   Solución. En este caso, $\sin t$ es positivo y $\cos t$ es negativo, por lo tanto $\tan t$ es negativo.

c) *al tercer cuadrante.*

   Solución. En este caso $\sin t$ y $\cos t$ son negativos, por lo tanto $\tan t$ es positivo.

d) *al cuarto cuadrante.*

Solución. En este caso, $\cos t$ es positivo y $\sin t$ es negativo, por lo tanto $\tan t$ es negativo. □

Observación 4.6.2. En resumen, considerando las funciones seno, coseno y tangente se tiene que

- En el primer cuadrante, son todas positivas.
- En el segundo cuadrante, sólo seno es positivo.
- En el tercer cuadrante, sólo tangente es positivo.
- En el cuarto cuadrante, sólo coseno es positivo.

Esto se puede recordar mediante la frase $TODAS - SIN - TA - COS$.

Ejercicio 4.6.3. *Determine que ocurre con la función* $\tan t$ *en* $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Solución. Analizamos caso a caso:

- $t = 0$: En este caso, $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$.
- $t = \frac{\pi}{2}$: En este caso, ya vimos que $\tan \frac{\pi}{2}$ no está definido, dado que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.
- $t = \pi$: Aquí, $\tan \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$.
- $t = \frac{3\pi}{2}$: En este caso, $\tan \frac{3\pi}{2}$ no está definido, dado que $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.
- $t = 2\pi$: Para este ángulo, $\tan 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi} = \frac{0}{1} = 0$.
- $t = \frac{\pi}{6}$: Se tiene que
$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
- $t = \frac{\pi}{4}$: Se tiene que
$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

- $t = \frac{\pi}{3}$: Se tiene que

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$\square$

Observación 4.6.3. Para los ángulos de medida $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, tenemos la tabla resumen:

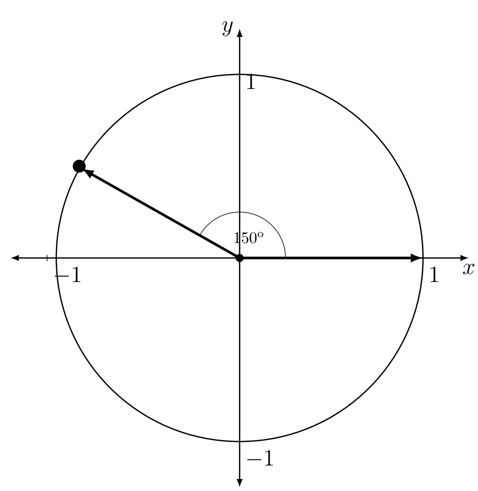
	$t = \frac{\pi}{6}$	$t = \frac{\pi}{4}$	$t = \frac{\pi}{3}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan t$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4.7. Valores de funciones circulares para ángulos que no están en el primer cuadrante.

Ejercicio 4.7.1. *Considere un ángulo en posición normal de medida $t = \frac{5}{6}\pi$ rad. Note que*

$$t = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = 5 \cdot 30° = 150°.$$

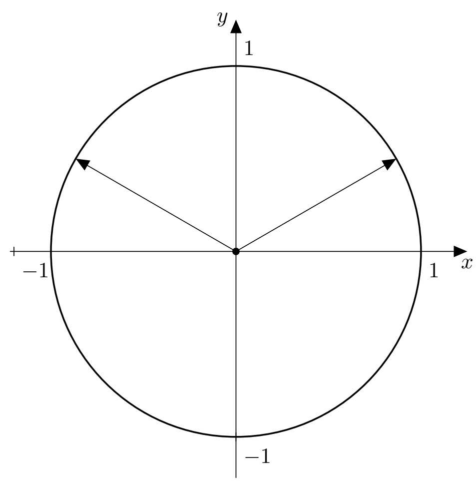
Su gráfico es



Queremos determinar las coordenadas de su punto terminal, y de este modo determinar los valores de $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right), \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ *y* $\tan\left(\frac{5}{6}\pi\right)$. *Para tal efecto:*

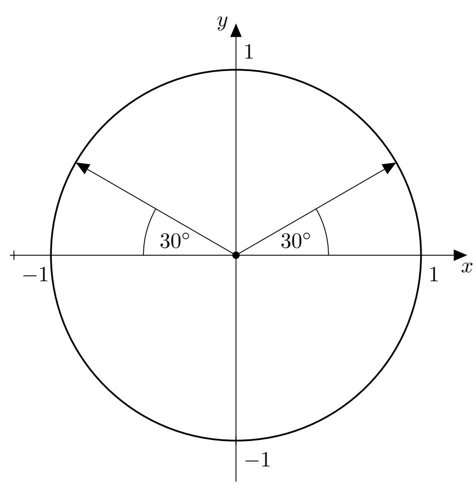
a) *Realice una simetría de su lado terminal, de modo que éste se refleje en el primer cuadrante.*

Solución. Realizamos una simetría de su lado terminal con respecto al eje y, obteniendo



b) *Considere el ángulo del primer cuadrante cuyo lado terminal fue obtenido en a), ¿Cuál es su medida positiva en radianes?*

Solución. Note que



Por lo tanto, el ángulo mencionado mide 30°, o sea $\frac{\pi}{6}$ *rad*.

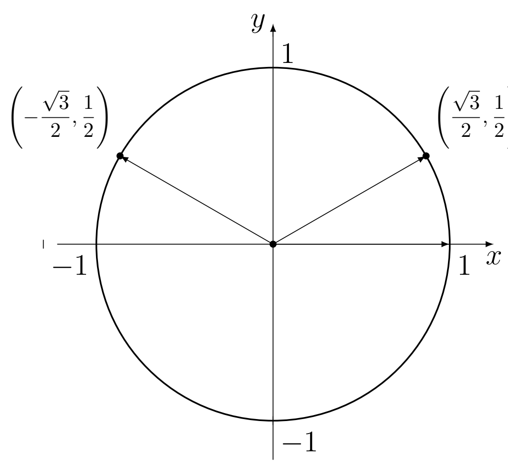
c) *¿Cuáles son las coordenadas del punto terminal del ángulo obtenido en b)?*

Solución. Como el ángulo mide $\frac{\pi}{6}$ *rad*, su punto terminal tiene coordenadas

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

d) *En base a lo obtenido en c), determine las coordenadas del punto terminal del ángulo original.*

Solución. Graficamente obtenemos que



por lo que

$$P\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

e) *En base a lo obtenido en d), obtenga el valor de* $\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}$ *y* $\tan\frac{5\pi}{6}$.

Solución. Note que

$$P\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

De este modo,

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \tan\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

□

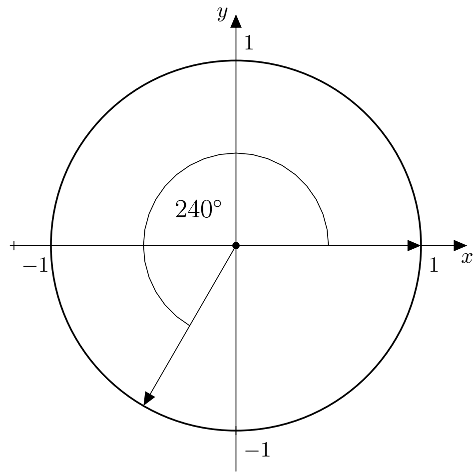
Resumamos lo hecho en el ejercicio anterior en los siguientes dos ejercicios:

Ejercicio 4.7.2. *Para* $t = \frac{4}{3}\pi$ *rad, obtenga el valor de* $\cos t, \sin t, \tan t$.

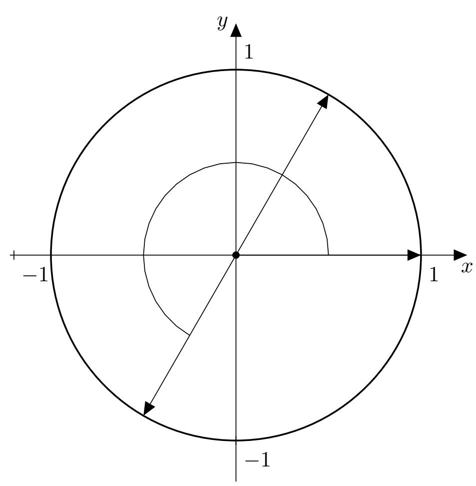
Solución. Note que

$$t = 4 \cdot \frac{\pi}{3} = 4 \cdot 60° = 240°.$$

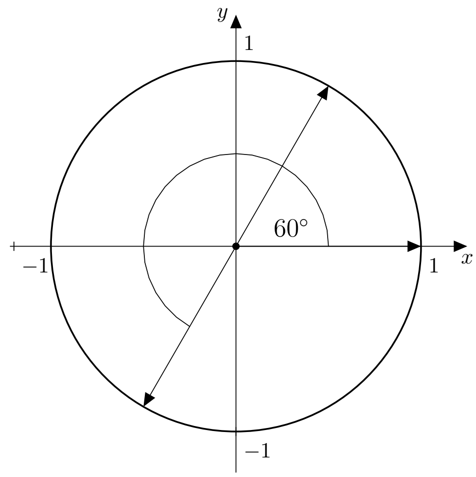
De este modo, este ángulo se ubica en el tercer cuadrante:



Queremos obtener las coordenadas de su punto terminal. Para ello, reflejamos su lado terminal en el primer cuadrante. Realizamos una simetría de éste con respecto al origen:



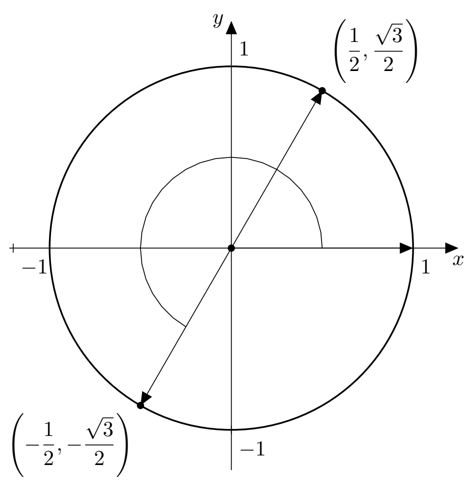
El ángulo cuyo lado terminal es el obtenido mide 60°:



Es decir, $\frac{\pi}{3}$ rad, por lo que su punto terminal tiene coordenadas

$$P\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

De este modo, el punto terminal $P\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ corresponde a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:



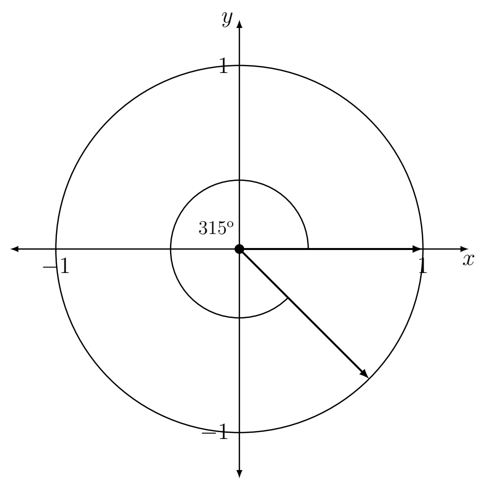
Como por definición, $P\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{4\pi}{3}\right)$, entonces concluimos que

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \ \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

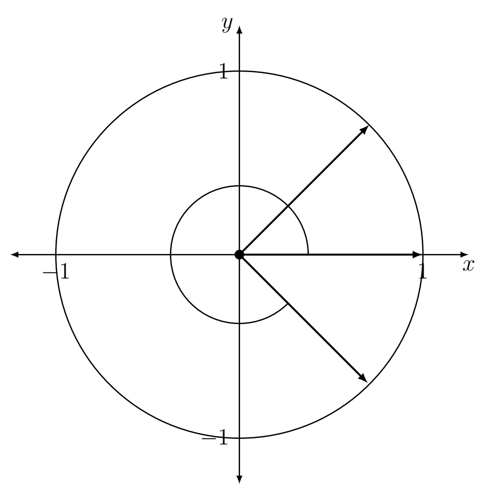
$\square$

Ejercicio 4.7.3. *Para* $t = \frac{7}{4}\pi$ *rad, obtenga el valor de* $\cos t, \sin t, \tan t$.

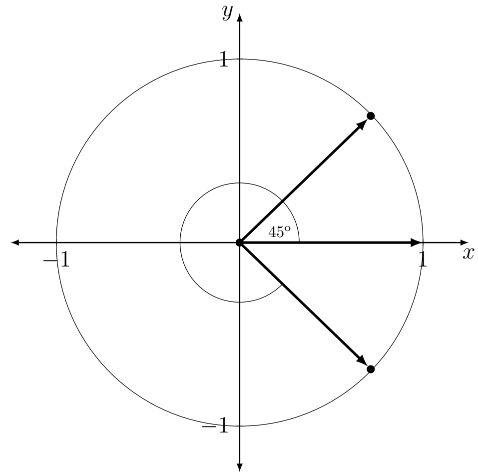
Solución. Note
$$t = 7 \cdot \frac{\pi}{4} = 7 \cdot 45^\circ = 315^\circ,$$
por lo tanto, el ángulo pertenece al cuarto cuadrante. Su gráfico es



Para obtener las coordenadas de su punto terminal, reflejamos su lado terminal en el primer cuadrante, usando como eje de simetría al eje x:



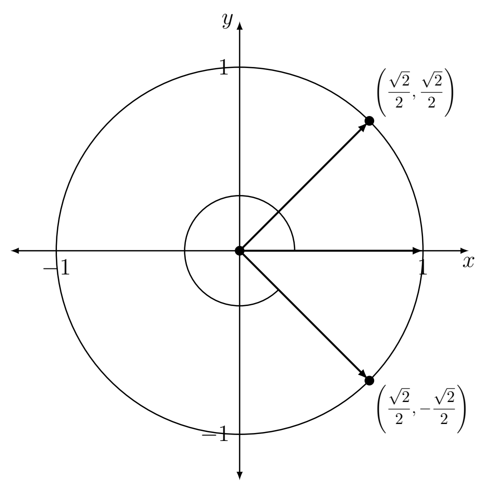
El ángulo del primer cuadrante obtenido es de 45°:



Es decir, $\frac{\pi}{4}$ rad, por lo que su punto terminal es

$$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

De este modo, se tiene que $P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:



Como $P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{7\pi}{4}, \sin\frac{7\pi}{4}\right)$, entonces obtenemos que

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan\frac{7\pi}{4} = -1.$$

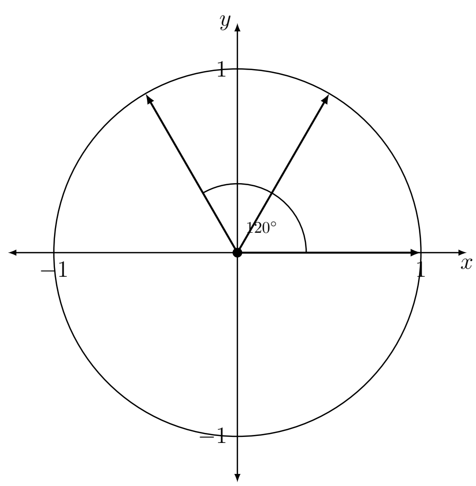
□

Observación 4.7.1. Como hemos visto, para obtener los valores de $\sin t, \cos t$ y $\tan t$ para un ángulo t que no es del primer cuadrante, debemos obtener las coordenadas de su punto terminal. Para tal efecto, graficamos el ángulo, realizamos una simetría de su lado terminal en el primer cuadrante, identificamos el ángulo obtenido en este cuadrante y su punto terminal; y con esto determinamos el punto terminal del ángulo t, para finalmente obtener los valores pedidos.

Ejercicio 4.7.4. *Considere $0 \leq t \leq 2\pi$. Obtenga los valores de t para los cuales*

a) $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solución. Note que $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $t = \frac{\pi}{3}$, ángulo que pertenece al primer cuadrante. Por otro lado, como $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $\sin t > 0$, por lo que buscamos otro ángulo t en el segundo cuadrante, el cual satisfaga la igualdad en cuestión. Realizamos una simetría del lado terminal del ángulo de medida $t = \frac{\pi}{3}$, es decir $t = 60°$, en el segundo cuadrante, obteniendo:

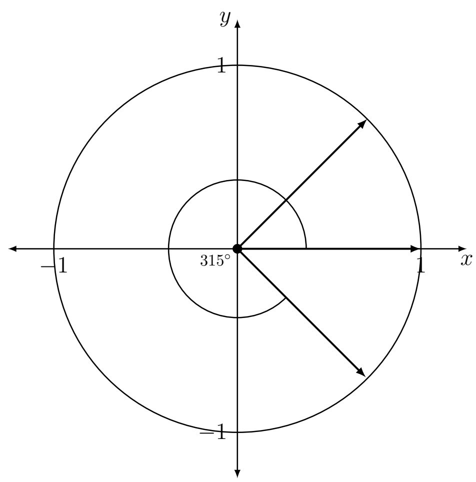


Hemos obtenido un ángulo que mide 120°, es decir $t = \frac{2\pi}{3}$. Dado que los puntos terminales de los ángulos de medida $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$ tienen la misma segunda coordenada, entonces $t = \frac{2\pi}{3}$ también satisface que $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto, las soluciones son

$$t = \frac{\pi}{3} \ \vee \ t = \frac{2\pi}{3}.$$

b) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución. Note que esta igualdad se cumple para el ángulo del primer cuadrante $t = \frac{\pi}{4}$. Como $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\cos t > 0$, por lo que buscamos otro ángulo t que satisfaga nuestra condición, esta vez en el cuarto cuadrante. Si hacemos la simetría del lado terminal del ángulo de medida $t = \frac{\pi}{4}$, o sea de 45°, en el cuarto cuadrante (simetría con respecto al eje x) obtenemos:



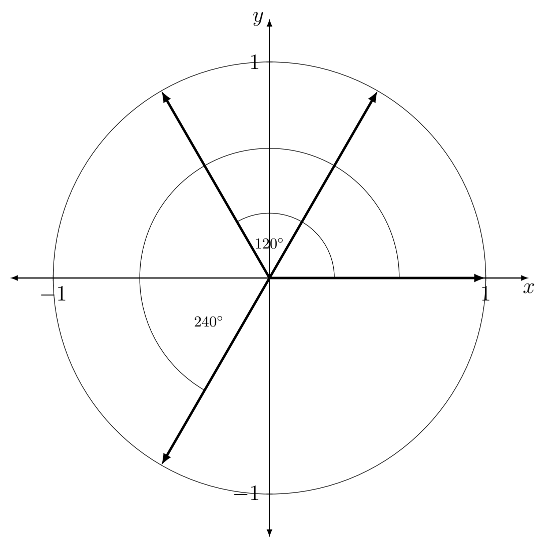
o sea un ángulo de medida 315°, es decir, $t = \frac{7\pi}{4}$. Note que los puntos terminales de los ángulos de medida $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$ tienen la misma primera coordenada, por lo que $t = \frac{7\pi}{4}$ también cumple que $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De este modo, las soluciones son

$$t = \frac{\pi}{4} \ \vee \ t = \frac{7\pi}{4}.$$

c) $\cos t = -\frac{1}{2}$.

Solución. Como $\cos t$ es negativo, entonces buscamos un ángulo t que pertenezca al segundo cuadrante y otro ángulo del tercer cuadrante, de modo que $\cos t = -\frac{1}{2}$.

Buscamos primero un ángulo t del primer cuadrante, que cumpla que $\cos t = \frac{1}{2}$. Este ángulo es $t = \frac{\pi}{3}$. Simetrizando el lado terminal de $t = \frac{\pi}{3}$, o sea de $60°$, en los cuadrantes mencionados:

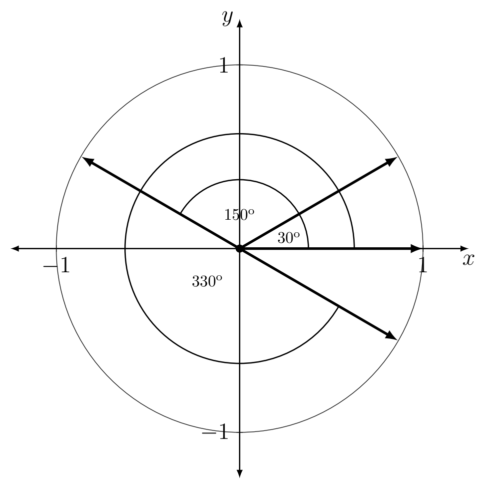


obtenemos los ángulos de $120°$ y $240°$. Note que para estos dos ángulos, la primera coordenada de su punto terminal es la opuesta a la del ángulo de $60°$, por lo que cumplen que $\cos t = -\frac{1}{2}$. Transformando sus medidas a radianes, tenemos que las soluciones son

$$t = \frac{2\pi}{3} \ \vee \ t = \frac{4\pi}{3}.$$

d) $\tan t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solución. Como $\tan t$ es negativo, entonces buscamos un ángulo t en el segundo cuadrante y otro en el cuarto cuadrante. Al igual que en el ejercicio anterior, buscamos un ángulo t del primer cuadrante para el cual $\tan t = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Este es $t = \frac{\pi}{6}$. Simetrizamos el lado terminal de $t = \frac{\pi}{6}$, o sea de $30°$, en los cuadrantes mencionados:



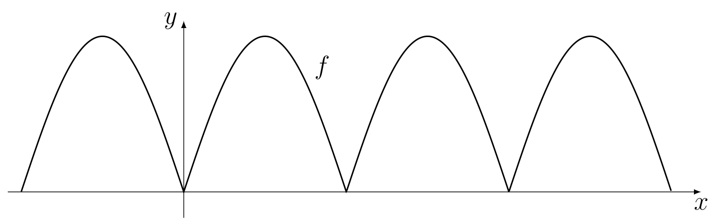
obteniendo los ángulos de $150°$ y $330°$, o sea, $t = \frac{5\pi}{6}$ o $t = \frac{11\pi}{6}$. Note que para cada uno de estos ángulos, las coordenadas de su punto terminal tienen distinto signo entre ellas, pero el mismo valor absoluto que las coordenadas respectivas de $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$, por lo que cumplen la igualdad pedida. Es decir, las soluciones son

$$t = \frac{5\pi}{6} \ \vee \ t = \frac{11\pi}{6}.$$

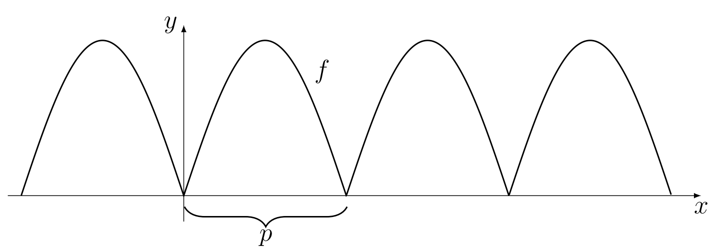
$\square$

4.8. Función periódica.

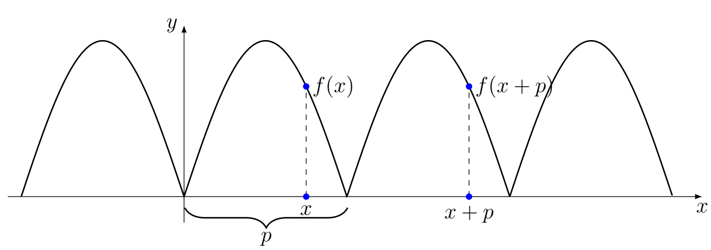
Observemos el gráfico de una función periódica f:



Intuitivamente, este gráfico está determinado por un mínimo trozo de curva que se repite infinitas veces. También en forma intuitiva, la longitud de cada intervalo determinado por el trozo de curva mencionado, se denomina período de f y se denota por p.



Ejercicio 4.8.1. *Considere el gráfico de la función periódica f:*



¿Qué relación existe entre $f(x)$ y $f(x+p)$?

Solución. Se tiene que $f(x) = f(x+p)$. □

Definición 4.8.1. *Una función $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice* ***periódica*** *si*

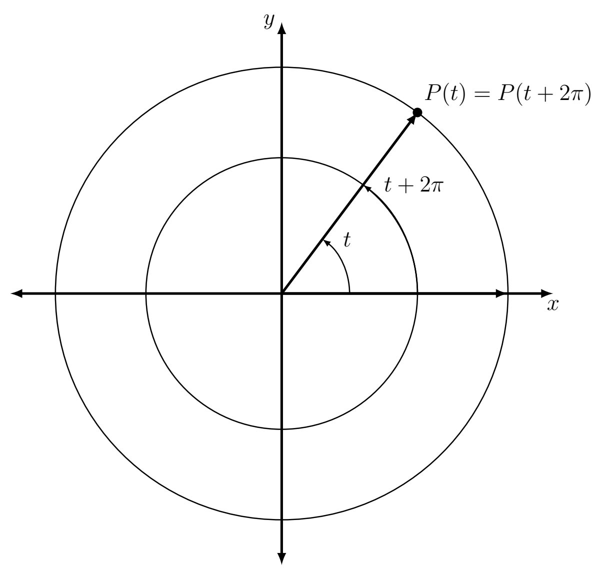
$$\exists p \in \mathbb{R} : \forall x \in Dom(f) \text{ se cumple que}$$

- $x + p \in Dom(f)$.

- $f(x+p) = f(x)$.

El menor número positivo p que verifica esta condición se llama ***período*** *de f.*

Observación 4.8.1. Considere un ángulo de medida t en posición normal. Note que si incrementamos t en 2π radianes (intuitivamente, a partir del ángulo t, damos una vuelta completa a la circunferencia, en sentido antihorario), obtenemos un ángulo en posición normal, de medida $t + 2\pi$, cuyo punto terminal es el mismo que el del ángulo t.



Por lo tanto, tenemos que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sin(t) = \sin(t + 2\pi) \ \wedge \ \cos(t) = \cos(t + 2\pi).$$

También es válido que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sin(t) = \sin(t + 4\pi) \ \wedge \ \cos(t) = \cos(t + 4\pi)$$

(o sea, el ángulo de medida $t + 4\pi$, es el ángulo t más dos vueltas a la circunferencia, en sentido antihorario).

En general, si $t \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sin(t) = \sin(t + 2k\pi) \ \wedge \ \cos(t) = \cos(t + 2k\pi)$$

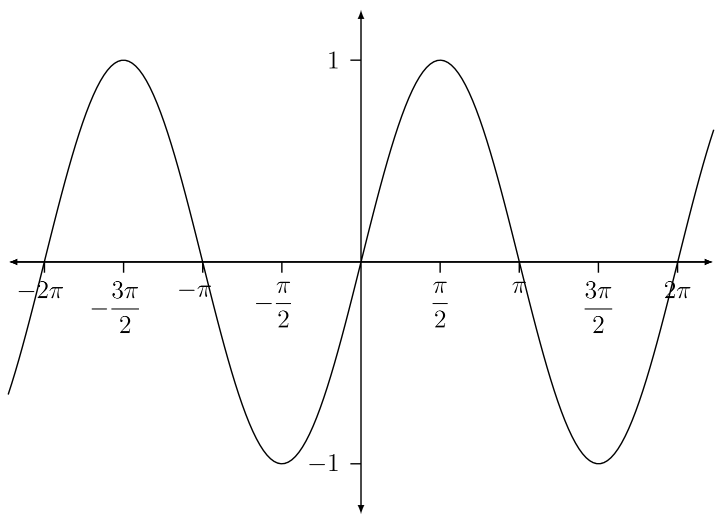
(o sea, el ángulo de medida $t + 2k\pi$, es el ángulo de medida t más k vueltas a la circunferencia, en sentido horario o antihorario, dependiendo del signo de k).

Luego, como $p = 2\pi$ es el menor entero positivo que satisface que

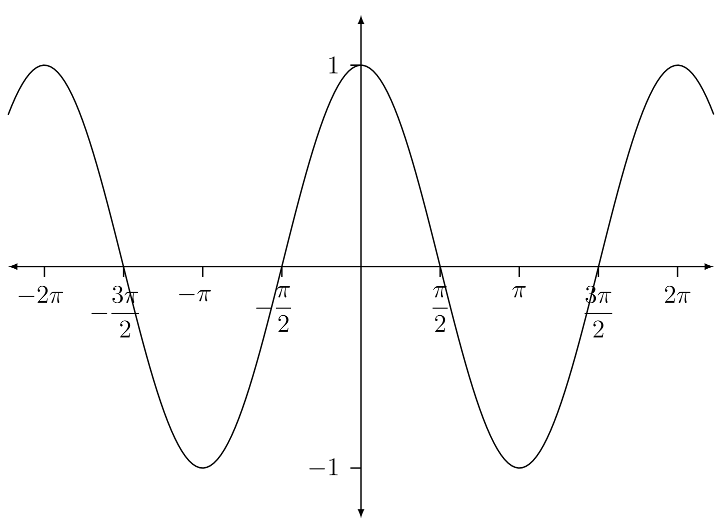
$$\forall t \in \mathbb{R} : \sin(t) = \sin(t + p) \ \wedge \ \cos(t) = \cos(t + p),$$

entonces las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.

Observación 4.8.2. El gráfico de la función seno es:



y el de la función coseno es:



En ellos podemos apreciar:

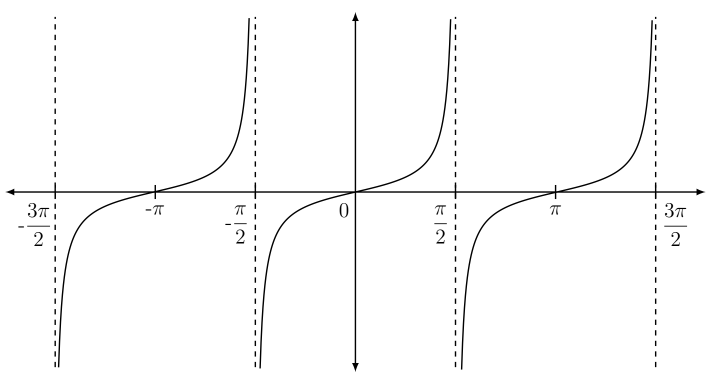
- los valores de $\sin t$ y $\cos t$ para los ángulos de medida $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.
- el signo de $\sin t$ y de $\cos t$ para un ángulo de medida t en cada uno de los cuadrantes.
- que la función seno y coseno son periódicas de periodo 2π,
- que la función seno es impar, por lo que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sin t = -\sin(-t).$$

- que la función coseno es par, por lo que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \cos t = \cos(-t).$$

Observación 4.8.3. El gráfico de la función tangente es



En él se puede apreciar, entre otras cosas que:

- En la medida que t se aproxima a $\frac{\pi}{2}$, a través de valores menores que $\frac{\pi}{2}$, los valores de $\tan t$ crecen ilimitadamente, es decir, se van hacia $+\infty$. Esto es debido a que en este caso, $\sin t$ se va hacia 1, y $\cos t$ se va hacia 0, ambos a través de valores positivos (primer cuadrante).

- En la medida que t se aproxima a $\frac{\pi}{2}$, a través de valores mayores que $\frac{\pi}{2}$, los valores de $\tan t$ decrecen ilimitadamente, es decir, se van hacia $-\infty$. Esto es debido a que en este caso, $\sin t$ se va hacia 1 a traves de valores positivos, y $\cos t$ se va hacia 0, a traves de valores negativos (segundo cuadrante).

- La función *tangente* es periódica de período π, es decir para los valores admisibles de t, se tiene que
$$\tan t = \tan(t + \pi).$$

- La función *tangente* es una función impar, es decir para los valores admisibles de t, se tiene que
$$\tan(-t) = -\tan t.$$

4.9. Función secante, función cosecante y función cotangente.

Ejercicio 4.9.1. *Considere los cuocientes*
$$\frac{1}{\cos t}, \frac{1}{\sin t}, \frac{\cos t}{\sin t}.$$
En cada caso, determine todos los valores de t*, con* $0 \leq t \leq 2\pi$*, de modo que el cuociente dado no esté definido.*

Solución. Se tiene que:

- En el caso de $\frac{1}{\cos t}$, éste no está definido cuando $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$.

- En el caso de $\frac{1}{\sin t}$ y de $\frac{\cos t}{\sin t}$, éste no está definido cuando $t = 0, t = \pi$ o $t = 2\pi$.

$\square$

Observación 4.9.1. En general:

- El cuociente $\frac{1}{\cos t}$ no está definido para $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los cuocientes $\frac{1}{\sin t}$ y $\frac{\cos t}{\sin t}$ no están definidos para $t = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.9.1. *Se definen las funciones secante, cosecante y cotangente respectivamente, de la siguiente manera:*

- *función secante:*

$$\begin{aligned} \sec : A &\to \mathbb{R} - \left]-1, 1\right[\\ t &\mapsto y = \sec t = \frac{1}{\cos t} \end{aligned}$$

con $A = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

- *función cosecante:*

$$\begin{aligned} \csc : B &\to \mathbb{R} - \left]-1, 1\right[\\ t &\mapsto y = \csc t = \frac{1}{\sin t} \end{aligned}$$

con $B = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

- *función cotangente:*

$$\begin{aligned} \cot : C &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y = \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} \end{aligned}$$

con $C = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

4.10. Identidades trigonométricas.

Ejemplos de identidades trigonométricas son

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

y

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}.$$

O sea, una identidad es una igualdad que es cierta para todos los valores admisibles de $t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.10.1. *Considere la identidad*

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

a) *Si dividimos por* $\cos^2 t$ *ambos miembros de esta igualdad, ¿qué identidad obtenemos?*

Solución. Obtenemos que

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

lo que es equivalente a

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t.$$

b) *Si dividimos por* $\sin^2 t$ *ambos miembros de la identidad inicial, ¿qué identidad obtenemos?*

Solución. Obtenemos que

$$\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t},$$

de donde se obtiene que

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t.$$

$\square$

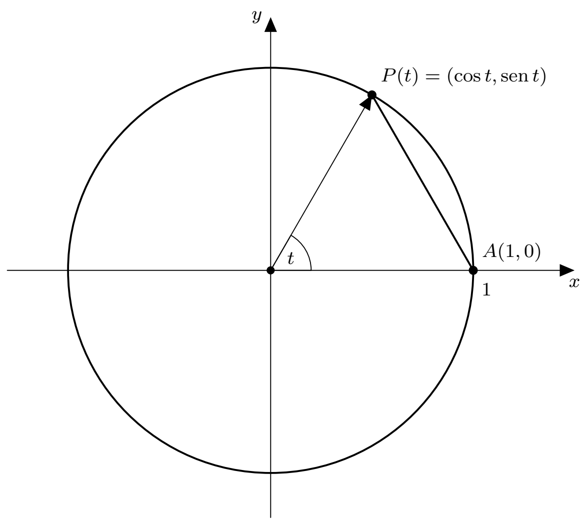
Proposición 4.10.1. *Para todos los valores admisibles de $t \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

y

$$1 + \cot^2 t = \csc^2 t.$$

Ejercicio 4.10.2. *Considere un ángulo t en posición normal, y la cuerda que une a $P(t)$ y $A = (0, 1)$:*



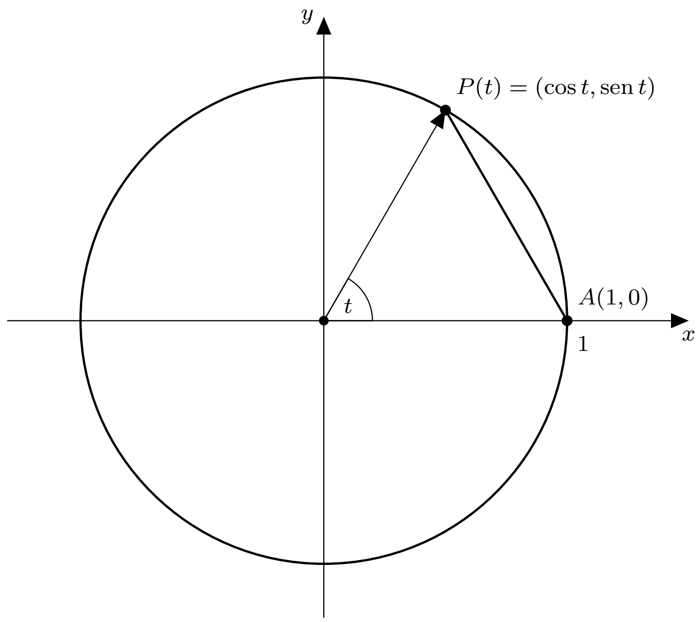
Determine su longitud $l(t)$.

Solución. Para determinar $l(t)$, simplemente calculamos la distancia entre $P(t)$ y A (con la fórmula de distancia entre dos puntos), obteniendo:

$$\begin{aligned} l(t) &= \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos t}. \end{aligned}$$

□

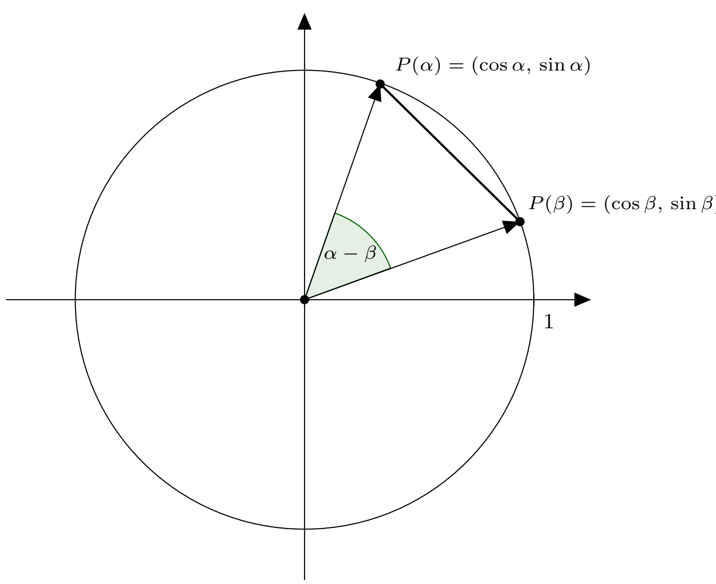
Proposición 4.10.2. *Consideremos un ángulo de medida t, el cual está en posición normal. La longitud $l(t)$ de la cuerda que une $P(t)$ con $(1,0)$,*



viene dada por

$$l(t) = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Ejercicio 4.10.3. *Considere la figura*

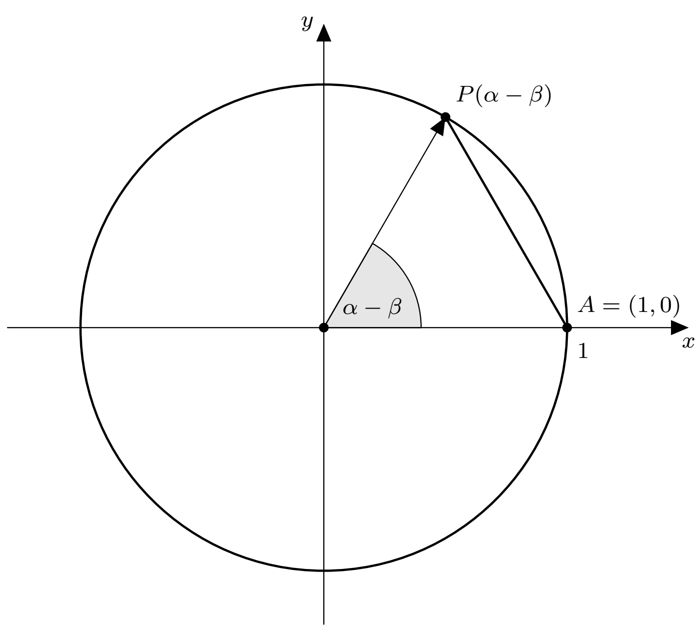


a) *¿Cuál es la longitud de la cuerda dada?*

Solución. Calculando la distancia entre los puntos terminales $P(\alpha)$ y $P(\beta)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} l = d(P(\alpha), P(\beta)) &= \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta}. \end{aligned}$$

b) *Considere ahora la figura*



donde la longitud de la cuerda dada, según la proposición anterior es

$$l(\alpha - \beta) = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)}.$$

Note que esta cuerda tiene la misma longitud que la cuerda de la primera figura. Igualando ambas longitudes, ¿que identidad obtenemos?

Solución. De la igualdad de ambas longitudes, obtenemos que

$$\sqrt{2 - 2\cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta}.$$

Elevando al cuadrado, restando 2 y luego dividiendo por -2 en ambos miembros, obtenemos la identidad

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

□

Proposición 4.10.3. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene que*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Ejercicio 4.10.4. *A partir de la identidad anterior, obtenga una identidad para $\cos(\alpha+\beta)$.*

Solución. Usando la identidad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha-(-\beta))\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta).\end{aligned}$$

Como la función coseno es par y la función seno es impar, de la última igualdad obtenemos que

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

□

Proposición 4.10.4. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene que*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Observación 4.10.1. Las dos últimas identidades propuestas, las podemos recordar mediante la frase coscos sensen. También decimos coloquialmente que el coseno se "porta mal", en el sentido que en el coseno de la suma aparece una resta en el miembro derecho, y en el coseno de la resta aparece una suma.

Ejercicio 4.10.5. *Usando la identidad anterior, obtenga una identidad para* $\cos 2\alpha$.

Solución. Note que

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.\end{aligned}$$

□

Proposición 4.10.5. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *se tiene que*

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Proposición 4.10.6. *(Otras identidades trigonométricas) Para cualquier valor admisible de* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *se tiene que*

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$
- $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$
- $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$

Observación 4.10.2. Las dos primeras identidades de la última proposición, es decir, las correspondientes a $\sin(\alpha+\beta)$ y $\sin(\alpha-\beta)$, se pueden recordar mediante la frase sencos cossen. Aquí decimos coloquialmente que el seno se “porta bien”, en el sentido que en el seno de la suma aparece una suma en el miembro derecho, y en el seno de la resta aparece una resta.

Ejercicio 4.10.6. *Demuestre las siguientes identidades:*

a) $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 1 - 2\sin^2\alpha.$

Solución. Para demostrar una identidad, tenemos tres caminos:

- Partimos del miembro izquierdo para, mediante identidades o transformaciones, llegar al miembro derecho.
- Partimos del miembro derecho para, mediante identidades o transformaciones, llegar al miembro izquierdo.
- Trabajamos ambos miembros en forma simultánea, hasta obtener expresiones que son evidentemente iguales.

En nuestro caso, partiremos del miembro izquierdo. La razón es que el miembro izquierdo tiene una expresión más "grande" que el miembro derecho. Dada la expresión del miembro derecho, entonces conviene transformar ésta en función de senos y cosenos. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} &= \frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \\
&= \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Como el denominador de la última fracción es 1, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\
&= (1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha \\
&= 1-2\sin^2\alpha,
\end{aligned}$$

de donde queda demostrada nuestra identidad.

b) $\csc\alpha = \cot\alpha + \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Solución. Partimos del miembro derecho para llegar al miembro izquierdo. Para hacer más sencilla la resolución, transformamos todo a senos y cosenos. Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\cot\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\
&= \frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}\\
&= \frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}\\
&= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}\\
&= \frac{1}{\sin\alpha}\\
&= \csc\alpha.
\end{aligned}$$

c) $\sec^4\alpha - \sec^2\alpha = \tan^4\alpha + \tan^2\alpha$.

Solución. Trabajamos ambos miembros en forma simultánea. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sec^4\alpha - \sec^2\alpha = \tan^4\alpha + \tan^2\alpha\\
\Leftrightarrow\ &\sec^2\alpha(\sec^2\alpha - 1) = \tan^2\alpha(\tan^2\alpha + 1)\\
\Leftrightarrow\ &\sec^2\alpha\cdot\tan^2\alpha = \tan^2\alpha\cdot\sec^2\alpha.
\end{aligned}$$

Como la última igualdad es evidente, entonces nuestra identidad queda demostrada. □

Ahora resolvamos algunas ecuaciones:

Ejercicio 4.10.7. *Determine todos los valores de t, con*

1) $t \in [0, 2\pi]$.

2) $t \in \mathbb{R}$.

de modo que:

a) $2\cos^2 t - 1 = 0$.

Solución. 1) Intentamos despejar $\cos t$. Se tiene que

$$2\cos^2 t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Note que

- La igualdad $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es válido para $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{7\pi}{4}$.
- La igualdad $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ se cumple para $t = \frac{3\pi}{4}$ o $t = \frac{5\pi}{4}$.

En definitiva, luego de comprobar cada una de las posibles soluciones, obtenemos que el conjunto solución es

$$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}. \tag{4.10.1}$$

2) En virtud de las soluciones obtenidas en a), el conjunto solución corresponde a múltiplos impares de $\frac{\pi}{4}$, es decir,

$$S = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $2\sin^2 t - \sin t = 0$.

Solución. 1) Note que

$$2\sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t \cdot (2\sin t - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \ \vee \ \sin t = \frac{1}{2}.$$

Se tiene que:

- $\sin t = 0$, si sólo si, $t = 0, t = \pi$ o $t = 2\pi$.
- $\sin t = \frac{1}{2}$ es válido para $t = \frac{\pi}{6}$ o $t = \frac{5\pi}{6}$.

De este modo, luego de comprobar, determinamos que el conjunto solución es

$$S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

2) Note que

- Las soluciones $t = 0, \pi, 2\pi$ nos inducen a la solución general $t = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- Las soluciones $t = \frac{\pi}{6}$ y $t = \frac{5\pi}{6}$ juntas no responden a un patrón específico, por lo que ellas nos llevan a las soluciones generales $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, respectivamente, con $k \in \mathbb{Z}$.

De este modo, la solución general es

$$S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) $2\sin^2 t + \cos t - 1 = 0$.

Solución. 1) En esta ecuación intervienen senos y cosenos. Intentaremos dejar sólo una de ellas. Como el seno que aparece en la ecuación está al cuadrado, entonces transformamos éste a coseno (usando la identidad $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, de la cual despejamos $\sin^2 t$), y de este modo, dejamos todos los términos en función de $\cos t$. Se tiene que

$$\begin{aligned} 2\sin^2 t + \cos t - 1 = 0 &\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 t) + \cos t - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0. \end{aligned}$$

En la última igualdad, hacemos la sustitución $u = \cos t$ y obtenemos la ecuación cuadrática

$$2u^2 - u - 1 = 0,$$

cuyas soluciones son $u = 1$ o $u = -\frac{1}{2}$. Deshaciendo la sustitución, tenemos que

$$\cos t = 1 \ \vee \ \cos t = -\frac{1}{2}.$$

Note que

- $\cos t = 1$, si y sólo si $t = 0$ o $t = 2\pi$.
- $\cos t = -\frac{1}{2}$ si y sólo si $t = \frac{2\pi}{3}$ o $t = \frac{4\pi}{3}$.

En definitiva, luego de comprobar, tenemos que $S = \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$.

2) Se tiene que

- De las soluciones $t = 0, 2\pi$, se deduce la solución general $t = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- De las soluciones $t = \frac{2\pi}{3}$ y $t = \frac{4\pi}{3}$, se desprenden las soluciones generales $t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ y $t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

De este modo, $S = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\sin t + \cos t = 1$.

Solución. 1) Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación dada, obteniendo

$$(\cos t + \sin t)^2 = 1.$$

Desarrollando el cuadrado del binomio que está la izquierda, obtenemos la ecuación equivalente

$$\cos^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t = 1.$$

Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, entonces nuestra ecuación queda como

$$1 + 2 \sin t \cos t = 1.$$

Cancelando los 1, y dividiendo por 2, obtenemos que

$$\sin t \cos t = 0,$$

de donde

$$\sin t = 0 \ \vee \ \cos t = 0.$$

Note que

- $\sin t = 0$, si y sólo si, $t = 0,\ t = \pi$ o $t = 2\pi$.
- $\cos t = 0$, si y sólo si, $t = \frac{\pi}{2}$ o $t = \frac{3\pi}{2}$.

En definitiva, las posibles soluciones son

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

Veamos si efectivamente lo son.

- En el caso de $t = 0$, su punto terminal es $(1, 0) = (\cos 0, \sin 0)$, por lo $\sin t + \cos t = 0 + 1 = 1$. Así, $t = 0$ es solución de nuestra ecuación.
- En el caso de $t = \frac{\pi}{2}$, su punto terminal es $(0, 1) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$, por lo $\sin t + \cos t = 1 + 0 = 1$. Así, $t = \frac{\pi}{2}$ es solución de nuestra ecuación.
- En cuanto a $t = \pi$, su punto terminal es $(-1, 0) = (\cos \pi, \sin \pi)$, por lo $\sin t + \cos t = -1 + 0 = -1 \neq 1$. Así, $t = \pi$ no es solución de nuestra ecuación.
- Para $t = \frac{3\pi}{2}$, su punto terminal es $(0, -1) = \left(\cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}\right)$, por lo $\sin t + cost = 0 - 1 = -1 \neq 1$. Así, $t = \frac{3\pi}{2}$ no es solución de nuestra ecuación.
- Para $t = 2\pi$, su punto terminal es $(1, 0) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi)$, por lo que $t = 2\pi$ es solución.

Por lo tanto, $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$.

2) En forma análoga a los ejercicios anteriores, la solución general es

$$S = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

e) $\cos 2t = \frac{1}{2}$.

Solución. Lo planteamos de dos formas:

- Primera forma:

  1) Transformamos el ángulo $2t$ a t:

$$\cos 2t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 t - \sin^2 t = \frac{1}{2}.$$

En la igualdad de la derecha, dejamos todos los términos en función de $\cos t$, obteniendo

$$\cos^2 t - \sin^2 t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 t - 1 = \frac{1}{2}.$$

De la última igualdad de la derecha, despejamos $\cos t$, obteniendo que

$$\cos t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De este modo, luego de comprobar, tenemos que las soluciones en $[0, 2\pi]$ son

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

2) Notamos que

- $t = \frac{\pi}{6}$ y $t = \frac{7\pi}{6}$ nos inducen a la solución general $t = \frac{\pi}{6} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $t = \frac{5\pi}{6}$ y $t = \frac{11\pi}{6}$ nos inducen a la solución general $t = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

De este modo,

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

- Segunda forma:

2) Obtenemos primero la solución general. Hacemos el cambio de variable $u = 2t$, donde nuestra ecuación queda como

$$\cos u = \frac{1}{2}. \tag{4.10.2}$$

Luego, para $u \in [0, 2\pi]$, las soluciones de (4.10.2) son

$$u = \frac{\pi}{3} \ \vee \ u = \frac{5\pi}{3}.$$

De este modo, la solución general de (4.10.2), es

$$u = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ u = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Reemplazando $u = 2t$ en esta última expresión, se obtiene que

$$2t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ 2t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$$

de donde despejando obtenemos que

$$t = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ t = \frac{5\pi}{6} + k\pi,$$

la cual es la solución general de nuestra ecuación. O sea,

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

1) Le damos valores a k en la solución general obtenida, rescatando las soluciones que están en $[0, 2\pi]$. En efecto,

   - Reemplazando $k = 0$ y luego $k = 1$ en $t = \frac{\pi}{6} + k\pi$, obtenemos las soluciones $t = \frac{\pi}{6}$ o $t = \frac{7\pi}{6}$.
   - Reemplazando $k = 0$ y luego $k = 1$ en $t = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, obtenemos las soluciones $t = \frac{5\pi}{6}$ o $t = \frac{11\pi}{6}$.

   En definitiva,

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

e) $\cos t = 2$.

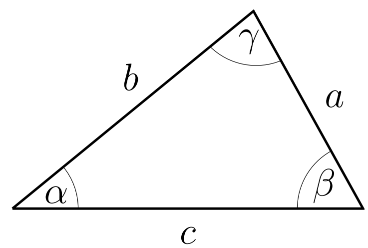
Solución. Como

$$\forall t \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos t \leq 1,$$

entonces esta ecuación no tiene solución, por lo que $S = \emptyset$, lo cual responde a) y b). $\square$

4.11. Teorema de los senos y teorema de los cosenos.

Teorema 4.11.1. *(Teorema de los senos) En un triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ respectivamente,*

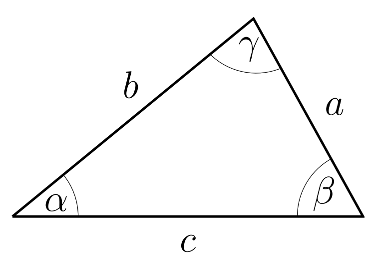


se tiene que

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Observación 4.11.1. El teorema de los senos nos afirma que un triángulo cualquiera, el seno de cada ángulo y la longitud del lado que se opone a ese ángulo, son cantidades directamente proporcionales.

Teorema 4.11.2. *(Teorema de los cosenos) En un triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ respectivamente*

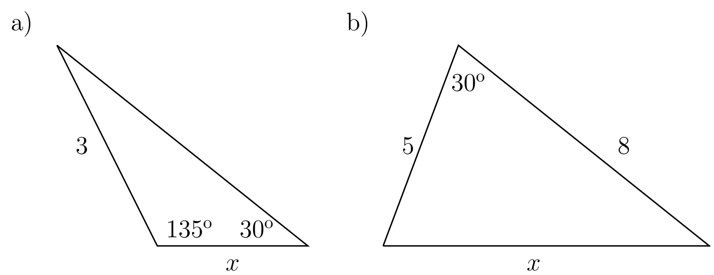


se tiene que

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$.

Observación 4.11.2. El teorema de los cosenos nos afirma que el cuadrado de cada lado, corresponde a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble del producto entre los lados restantes y el coseno del ángulo entre estos lados.

Ejercicio 4.11.1. *Obtenga el valor de x, usando el teorema de los senos o de los cosenos, según corresponda.*



Dato: Use las aproximaciones

$$\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} \approx 1{,}55, \quad \sqrt{89-40\sqrt{3}} \approx 4{,}4$$

Solución. Solución de a): El ángulo faltante del triángulo mide 15°. Como sabemos las medidas de los 3 ángulos, pero de sólo un lado, o sea, como sabemos la medida de más ángulos que lados, entonces, para determinar x, usamos el teorema de los senos. En efecto,

$$\frac{\sin 30^\circ}{3} = \frac{\sin 15^\circ}{x} \Leftrightarrow x = 6\sin 15^\circ. \tag{4.11.1}$$

Para calcular $\sin 15^\circ$, usamos la identidad

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Reemplazando el valor obtenido en (4.11.1), obtenemos que

$$x = \frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2} \approx 1{,}55.$$

Solución de b):

En este caso, sabemos las medidas de más lados que de ángulos, y el ángulo conocido está entre los lados conocidos. Por lo tanto, para determinar x, usamos el teorema de los cosenos. En efecto,

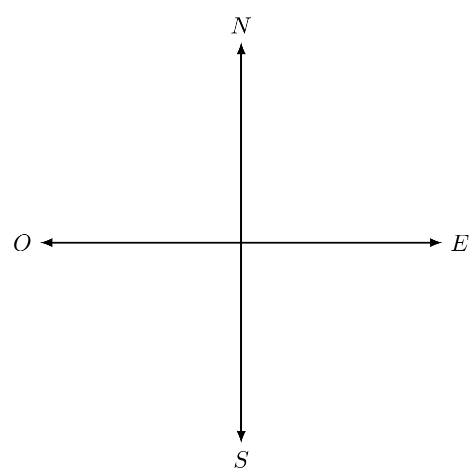
$$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 30°,$$

por lo que

$$x = \sqrt{89 - 40\sqrt{3}} \approx 4{,}4.$$

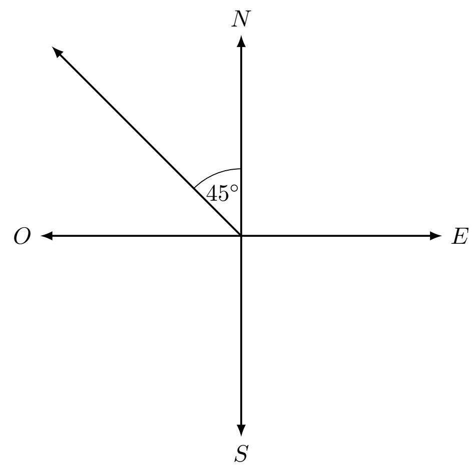
□

Observación 4.11.3. En algunas aplicaciones, usaremos los puntos cardinales (norte, sur, este y oeste) y un ángulo para indicar una cierta dirección. Recordemos que los puntos cardinales están ubicados del siguiente modo:

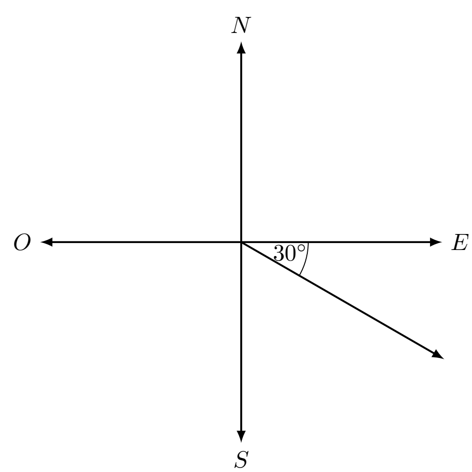


Ubiquemos la dirección $N45°O$. Para obtenerla gráficamente, consideramos un ángulo cuyo lado inicial es el norte N y a partir de este medimos 45° en dirección oeste O:

El lado terminal de este ángulo, nos indica la dirección pedida.



Veamos otro ejemplo. Consideremos ahora la dirección $E30°S$. Para indicarla graficamente, consideramos un ángulo cuyo lado inicial es el este E y a partir de este medimos $30°$ en dirección sur S:



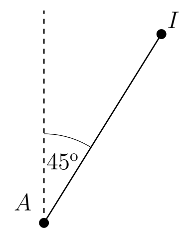
El lado terminal de este ángulo, nos indica la dirección pedida. En general, el primer punto cardinal mencionado en la dirección, nos indica cuál es el lado inicial, del cual medimos un ángulo de la medida dada, en dirección del segundo punto cardinal dado.

Ejercicio 4.11.2. *Un barco navega hacia el sur con una rapidez de* $600\frac{km}{h}$. *A las 11 A.M. se observa una isla en la dirección* $N45°E$. *A las 1 P.M. se observa la misma isla en dirección* $N15°E$. *¿Cuál es la distancia desde la isla a cada uno de los puntos de observación?*

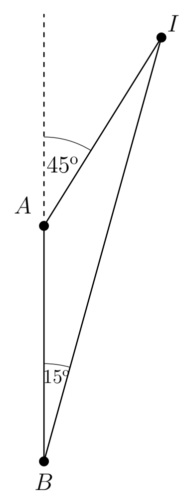
Dato: Use las aproximaciones

$$600\sqrt{6} - 600\sqrt{2} \approx 880, \; 1200\sqrt{2} \approx 1697$$

Solución. A las 11 $A.M.$ esta es la situación:

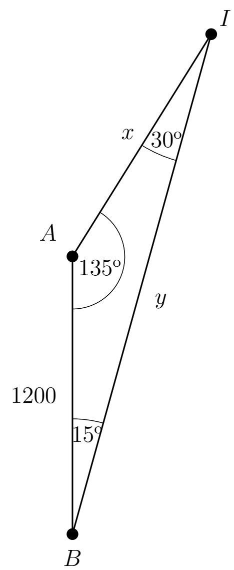


donde A representa la posición del barco, e I la posición de la isla. A las 1 $P.M.$ esta es la situación:



donde B representa la posición del barco a esa hora.

Consideramos $\triangle ABI$. Como la rapidez del barco es de $600\frac{km}{h}$, entonces $AB = 1200$. Por otro lado, el ángulo A del triángulo mide $135°$, por lo que el ángulo I mide $30°$. Denotamos por x e y a AI y BI respectivamente. De este modo, $\triangle ABI$ queda como



Calculamos el valor de x y de y. Como conocemos las medidas de todos los ángulos y de un sólo lado, usamos el teorema de los senos. De este modo

$$\frac{\sin 15^\circ}{x} = \frac{\sin 30^\circ}{1200}. \tag{4.11.2}$$

Como del ejercicio anterior a), se tiene que $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, entonces de (4.11.2) obtenemos que

$$x = 1200 \cdot \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 600\sqrt{6} - 600\sqrt{2} \approx 880.$$

Por otro lado,

$$\frac{\sin 135^\circ}{y} = \frac{\sin 30^\circ}{1200}. \tag{4.11.3}$$

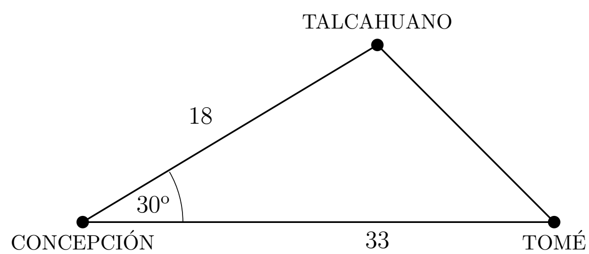
Note que $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces de (4.11.3), obtenemos que

$$y = 1200\frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = 1200\sqrt{2} \approx 1697.$$

Es decir, a las 11 A.M. el barco está aproximadamente a 880 kms de la isla y a las 1 P.M. está a 1697 kms. □

Ejercicio 4.11.3. *Para viajar en automóvil desde Talcahuano hacia Tomé se deben recorrer 18 km desde Talcahuano a Concepción y enseguida 33 km desde Concepción a Tomé. Suponga que estos dos caminos son rectos y que el ángulo comprendido entre ellos mide* $30°$*. Si se construyera un puente a través de la bahía que permitiera viajar en línea recta desde Talcahuano a Tomé. ¿En cuántos kms disminuirá el trayecto? Use calculadora.*

Solución. Este problema lo podemos representar con el siguiente triángulo:



donde el lado TALCAHUANO-TOMÉ representa el puente que pudiera ser construido. Si determinamos su longitud, la cual llamamos x, entonces podremos responder a nuestra interrogante. Como en la figura, conocemos más lados que ángulos, y el ángulo que conocemos es el que está entre los lados que conocemos, entonces usamos el teorema de los cosenos. Tenemos que

$$x^2 = 18^2 + 33^2 - 2 \cdot 33 \cdot 18 \cos 30°,$$

por lo que

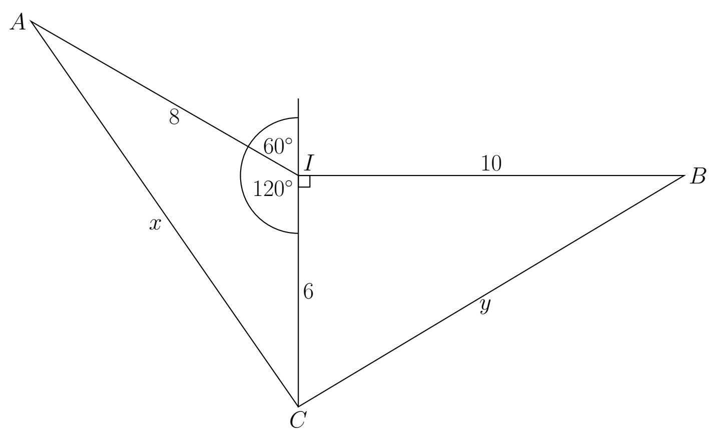
$$x = \sqrt{18^2 + 33^2 - 594\sqrt{3}} \approx 19{,}5.$$

Así, el puente tendría aproximadamente 19 *kms* y medio de largo. Como el trayecto original era de 51 kms, entonces el trayecto disminuiría en 31 *kms* y medio. $\square$

Ejercicio 4.11.4. *Hoy se inició la competencia de motos del Rally Dakar 2017. En caso de accidente, se recomienda ir a algunos de los campamentos A o B, en donde hay una enfermería. Según el mapa, el campamento A está a* 8 *km en dirección* $N60°O$ *del inicio. Además, el campamento B se encuentra a* 10 *km del inicio, en dirección este.*

El deportista chileno Ignacio Casale tuvo un accidente, luego de llevar un recorrido de 6 km hacia el sur. Luego de arribada la ambulancia al lugar del accidente, ¿a qué campamento le conviene acudir con el accidentado? Use calculadora.

Solución. Si I representa el inicio, y C el punto en el cual el deportista tuvo el accidente, entonces una representación del problema es



Para determinar a cuál campamento le conviene acudir a la ambulancia, calculamos los valores de x e y. Para calcular x usamos el teorema de los cosenos en $\triangle ICA$. Se tiene que

$$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 120°.$$

O sea,

$$x = \sqrt{148} \approx 12{,}16 \text{ kms.}$$

Por otro lado, para calcular y, simplemente usamos el teorema de Pitágoras en $\triangle ICB$. Note que

$$y^2 = 6^2 + 10^2,$$

por lo que $y = \sqrt{136} \approx 11{,}6$ kms. De este modo, a la ambulancia le es más conveniente ir al campamento B, dado que está más cercano. □

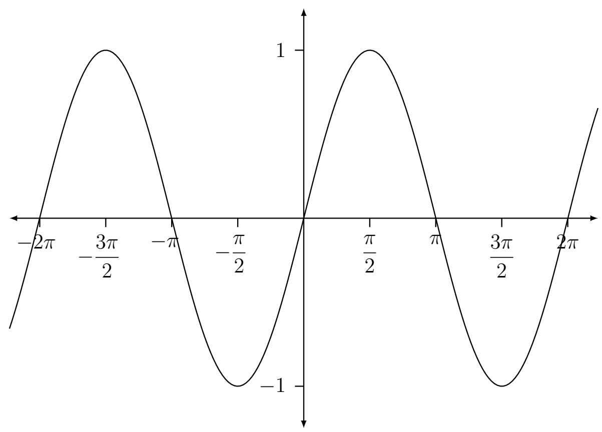
4.12. Funciones circulares inversas.

4.12.1. Función arcoseno.

Consideremos el gráfico de la función seno, más específicamente de la función

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sin x, \end{aligned}$$

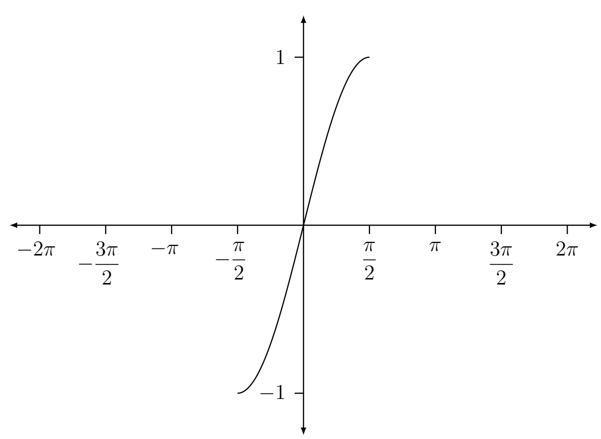
el cual es



Escogemos la restricción biyectiva de la función seno

$$\begin{aligned} \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto y = \sin x \end{aligned}$$

cuyo gráfico es



La función inversa del seno biyectivo escogido es denominada función **arcoseno**, y está definida como

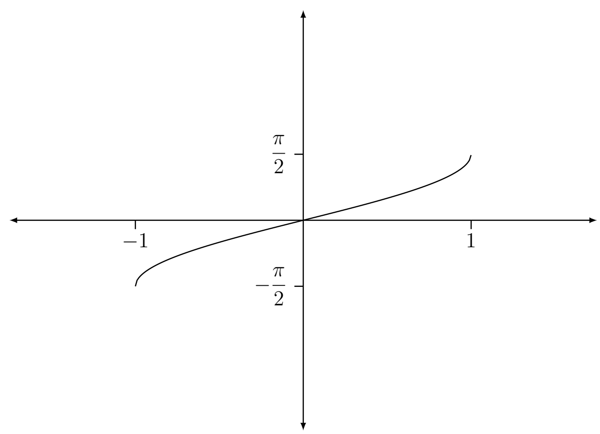
$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto y = \arcsin x, \end{aligned}$$

donde

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x.$$

De este modo, el valor de $\arcsin x$ es y, si y es el ángulo que pertenece al cuarto o al primer cuadrante, considerando a los ejes, que cumple que $\sin y = x$.

Realizando la simetría del gráfico anterior con respecto a la recta $y = x$, obtenemos que el gráfico de la función arcoseno es



Ejercicio 4.12.1. *Determine el valor de*

a) $\arcsin 0$.

Solución. Note que

$$\alpha = \arcsin 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = 0, -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Es decir, α es un ángulo para el cual $\sin \alpha = 0$. Además α debe estar situado entre el cuarto y primer cuadrante, considerando a los ejes. De este modo, $\alpha = 0$ y así

$$\arcsin 0 = 0.$$

b) $\arcsin 1$.

Solución. El valor pedido corresponde a un ángulo α tal que $\sin\alpha = 1$. También α debe estar situado en el cuarto o primer cuadrante, considerando los ejes. Se tiene que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, por lo que

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

c) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solución. Se tiene que

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

d) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución. Buscamos un ángulo α tal que

$$\sin\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Como $\sin\alpha < 0$, entonces α debe ser un ángulo del cuarto cuadrante, medido en sentido horario. El ángulo es $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. De este modo,

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

□

Ejercicio 4.12.2. *Obtenga el conjunto solución de la ecuación*

$$\arcsin x + \arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2}.$$

Solución. Hacemos el cambio de variable

$$\arcsin x = \alpha,\ \arcsin(1-x) = \beta. \tag{4.12.1}$$

De este modo, nuestra ecuación queda como

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Despejamos α de la última ecuación (también puede ser β). De este modo,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta. \tag{4.12.2}$$

Aplicamos la función cos en ambos lados de (4.12.2) (también puede ser sin), obteniendo que

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\ \Leftrightarrow \cos\alpha &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta \end{aligned}$$

Reemplazando los valores conocidos de la última igualdad, llegamos a que

$$\cos\alpha = \sin\beta \tag{4.12.3}$$

Pretendemos dejar la ecuación (4.12.3) en función de x, y luego resolverla. Note que, en virtud de (4.12.1), α y β cumplen que

$$\sin\alpha = x,\ \sin\beta = 1 - x. \tag{4.12.4}$$

con

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Por otro lado, usando (4.12.4), obtenemos el valor $\cos\alpha$ en función de x. En efecto,

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - x^2,$$

por lo que, a priori,

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - x^2}. \tag{4.12.5}$$

Como α pertenece al cuadrante 4 o al cuadrante 1 considerando los ejes, entonces $\cos\alpha$ es no negativo, por lo que

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - x^2}.$$

De este modo, de (4.12.4) y (4.12.5), se tiene que (4.12.3) queda como

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - x, \tag{4.12.6}$$

logrando que nuestra ecuación (4.12.3) quede en función de x.

Resolvemos (4.12.6), deduciendo que sus soluciones son

$$x = 0 \ \vee \ x = 1.$$

Comprobemos, si efectivamente, los valores obtenidos de x son soluciones de la ecuación en cuestión:

- Si $x = 0$, entonces

$$\arcsin x + \arcsin(1 - x) = \arcsin(0) + \arcsin(1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

  por lo que queda comprobado que $x = 1$ es solución de nuestra ecuación.

- Si $x = 1$, entonces

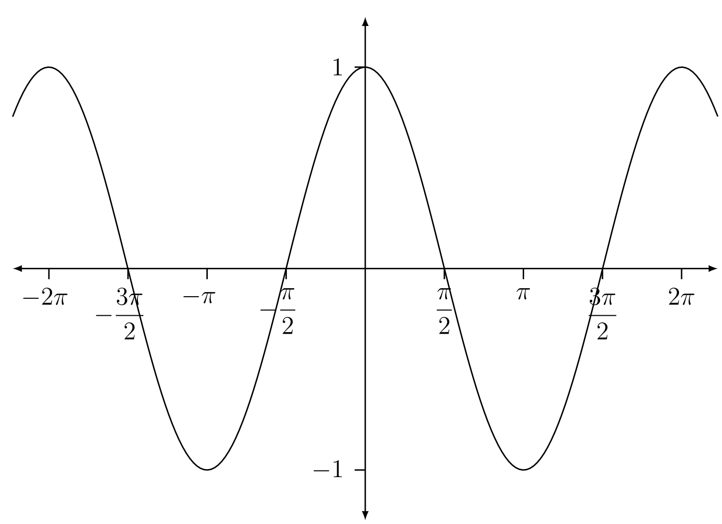
$$\arcsin x + \arcsin(1 - x) = \arcsin(1) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

  por lo que queda comprobado que $x = 1$ es solución de la ecuación.

Así, $S = \{0, 1\}$. □

4.12.2. Función arcocoseno.

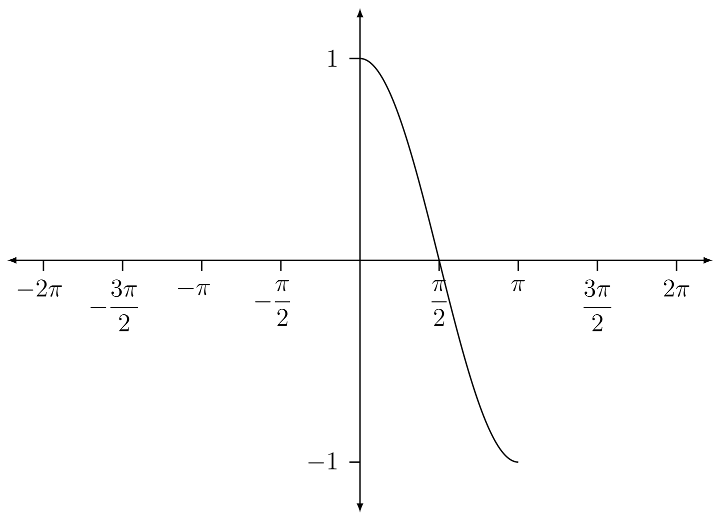
Recordemos que, el gráfico de la función coseno es



cuya restricción biyectiva escogida será

$$\begin{aligned} \cos : [0,\pi] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto y = \cos x \end{aligned}$$

y su gráfico es



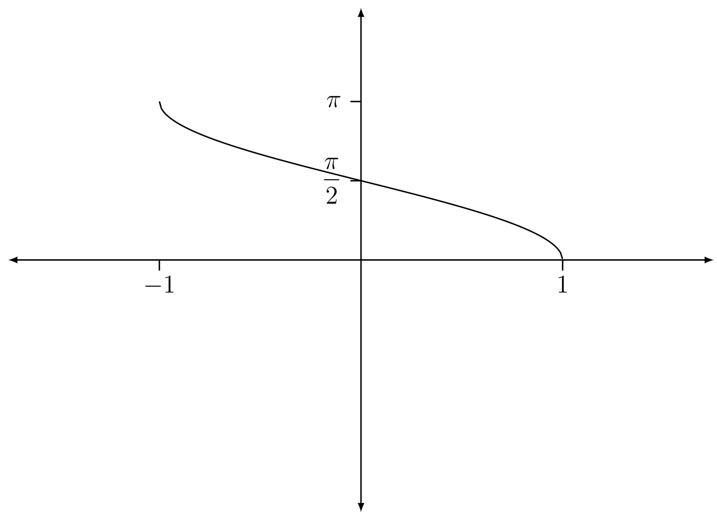
La función inversa del coseno biyectivo escogido, es denominada función **arcocoseno**, y está definida como

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto y = \arccos x, \end{aligned}$$

donde

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x.$$

De este modo, el valor de $\arccos x$ es y, siempre y cuando y sea un ángulo que está en el primer o segundo cuadrante, considerando a los ejes, que cumpla que $\cos y = x$. Su gráfico, el cual se obtiene de realizar la simetría del gráfico anterior con respecto a la recta $y = x$, es



Ejercicio 4.12.3. *Obtenga el valor de*

a) $\arccos(-1) + \arccos(1)$.

Solución. Para calcular $\arccos(-1)$, buscamos un ángulo α de modo que $\cos\alpha = -1$, con α en el primer o segundo cuadrante, considerando a los ejes. Se tiene que $\alpha = \pi$, por lo que

$$\arccos(-1) = \pi.$$

Por otro lado, con un razonamiento análogo, se tiene que

$$\arccos(1) = 0.$$

De este modo,

$$\arccos(-1) + \arccos(1) = \pi.$$

b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución. Si $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \alpha$, entonces α debe cumplir que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, con α en el rango mencionado. Como $\cos\alpha$ es negativo, entonces α pertenece al segundo cuadrante. Se tiene que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, por lo que

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

□

Ejercicio 4.12.4. *Resuelva la ecuación*

$$\arcsin x + \arccos(2x) = \frac{\pi}{6}.$$

Solución. Hacemos el cambio de variable

$$\alpha = \arcsin x, \;\; \beta = \arccos(2x), \tag{4.12.7}$$

obteniendo la ecuación

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}. \tag{4.12.8}$$

Análogamente al ejercicio 4.12.2, despejamos α de la última ecuación, de modo que

$$\alpha = \frac{\pi}{6} - \beta. \tag{4.12.9}$$

Aplicamos la función sin en ambos miembros de (4.12.9)(también puede ser cos, aunque en este caso queda mucho más complicado), de modo que

$$\begin{aligned} &\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right) \\ \Leftrightarrow\ &\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{6}\cos\beta - \cos\frac{\pi}{6}\sin\beta \end{aligned}$$

Así,

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\beta - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta \tag{4.12.10}$$

Intentamos dejar la última igualdad sólo con x. De (4.12.7), deducimos que

$$\sin\alpha = x, \;\; \cos\beta = 2x. \tag{4.12.11}$$

con

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \;\; 0 \leq \beta \leq \pi,$$

Observando (4.12.11), vemos que en (4.12.10) nos falta sólo obtener $\sin\beta$. Como $\cos\beta = 2x$, entonces

$$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - 4x^2.$$

O sea,

$$\sin\beta = \pm\sqrt{1 - 4x^2}.$$

Como β está en el primer o segundo cuadrante, incluyendo a los ejes, se tiene que $\sin\beta$ no puede ser negativo, por lo que

$$\sin\beta = \sqrt{1-4x^2}. \tag{4.12.12}$$

Así, de (4.12.11) y (4.12.12), se obtiene que (4.12.10) queda como

$$x = \frac{1}{2}\cdot 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

de donde

$$x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = -\frac{1}{2}.$$

Comprobemos cada posible solución. Se tiene que

- si $x = \frac{1}{2}$, entonces

  $$\arcsin x + \arccos 2x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos(1) = \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6},$$

  por lo que $x = \frac{1}{2}$ es solución de la ecuación.

- si $x = -\frac{1}{2}$, entonces

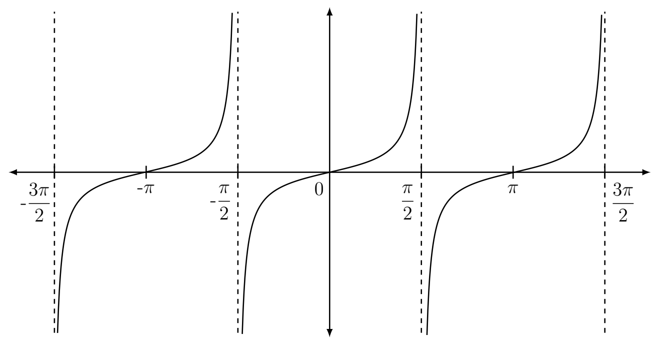
  $$\arcsin x + \arccos 2x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \neq \frac{\pi}{6},$$

  por lo que $x = -\frac{1}{2}$ no es solución de la ecuación dada.

De este modo, $S = \{\frac{1}{2}\}$. $\square$

4.12.3. Otras funciones circulares inversas.

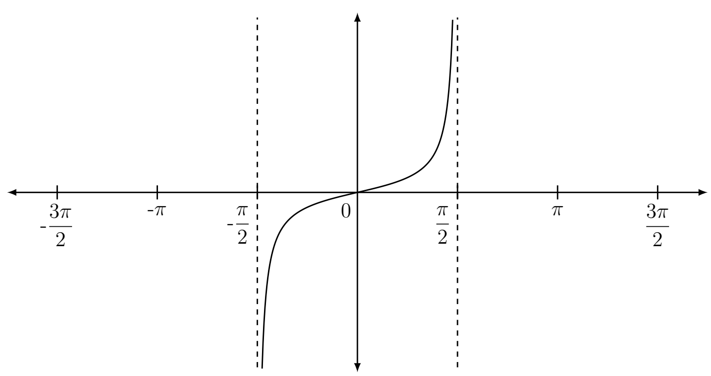
En tercer lugar, recordemos que el gráfico de la función tangente es:



Escogemos la restricción biyectiva de la función tangente como

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \tan x$$

cuyo gráfico es



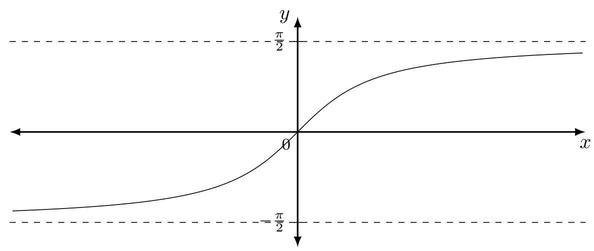
La función inversa de la tangente biyectiva escogida, es denominada función **arcotangente**, y está definida como

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto y = \arctan x,$$

donde

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x.$$

Su gráfico es



También definimos las funciones inversas de las funciones *secante*, *cosecante* y *cotangente* como las respectivas funciones **Arcosecante,Arcocosecante y Arcocotangente**, las cuales son denotadas por *arcsec*, *arccsc* y *arcctan*, del siguiente modo

- $$\begin{aligned} \operatorname{arcsec} : \mathbb{R} -]-1, 1[&\to [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ x &\mapsto y = \operatorname{arcsec}\, x, \end{aligned}$$

  donde

  $$y = \operatorname{arcsec}\, x \Leftrightarrow x = \sec y.$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{arccsc} : \mathbb{R} -]-1, 1[&\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \\ x &\mapsto y = \operatorname{arccsc}\, x, \end{aligned}$$

  donde

  $$y = \operatorname{arccsc}\, x \Leftrightarrow x = \csc y.$$

- $$\begin{aligned} \operatorname{arcctan} : \mathbb{R} &\to]0, \pi[\\ x &\mapsto y = \operatorname{arcctan}\, x, \end{aligned}$$

  donde

  $$y = \operatorname{arcctan}\, x \Leftrightarrow x = \tan y.$$

4.13. Función sinusoidal.

Intuitivamente, una función sinusoidal corresponde a una función cuyo gráfico es un “estiramiento”, “encogimiento”, desplazamiento horizontal o vertical, y/o simetría con respecto a un eje coordenado, del gráfico de la función seno, de la función coseno o de alguna otra función sinusoidal dada.

Definición 4.13.1. *Sean a, b, c, d números reales. La función*

$$f(x) = a\sin(bx + c) + d \tag{4.13.1}$$

o

$$g(x) = a\cos(bx + c) + d \tag{4.13.2}$$

se denomina función sinusoidal.

Observación 4.13.1. En cualquiera de los casos (4.13.1) o (4.13.2):

- la amplitud corresponde a $|a|$. La amplitud está vinculada con un “estiramiento” o “encogimiento” vertical del gráfico de alguna de las funciones mencionadas al inicio.

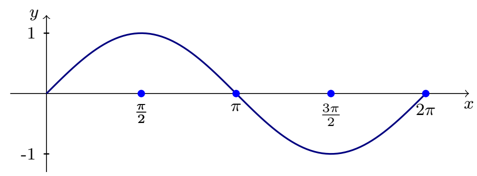
- el período p corresponde a
$$p = \frac{2\pi}{|b|}.$$
El período está vinculado con un “estiramiento” o “encogimiento” horizontal del gráfico de alguna de las funciones mencionadas al inicio.

- el desplazamiento horizontal viene dado por $\frac{c}{b}$ unidades hacia la derecha, si $\frac{c}{b} < 0$, y $\frac{c}{b}$ unidades hacia la izquierda, si $\frac{c}{b} > 0$, con respecto al gráfico de alguna de las funciones mencionadas al inicio.

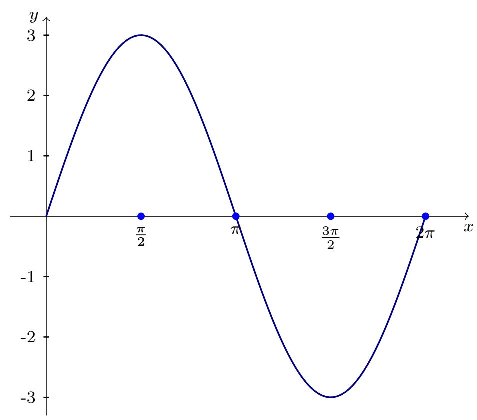
- desplazamiento vertical viene dado por d unidades hacia arriba, si $d > 0$, y d unidades hacia abajo, si $d < 0$, con respecto al gráfico de alguna de las funciones mencionadas al inicio.

Ejercicio 4.13.1. *Obtenga el gráfico de* $f(x) = 3\sin x$.

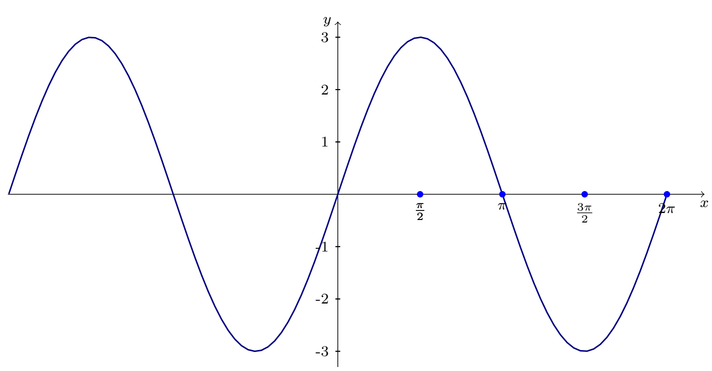
Solución. Recordemos que el gráfico de la función $\sin x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$ corresponde a



Como la amplitud de f es 3, entonces para obtener su gráfico, primero "estiramos" verticalmente el gráfico anterior, de modo que su punto máximo ocurra en $y = 3$ y su punto mínimo ocurra en $y = -3$:



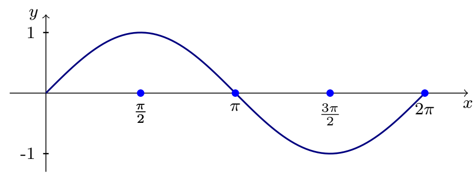
De este modo, el gráfico de f es:



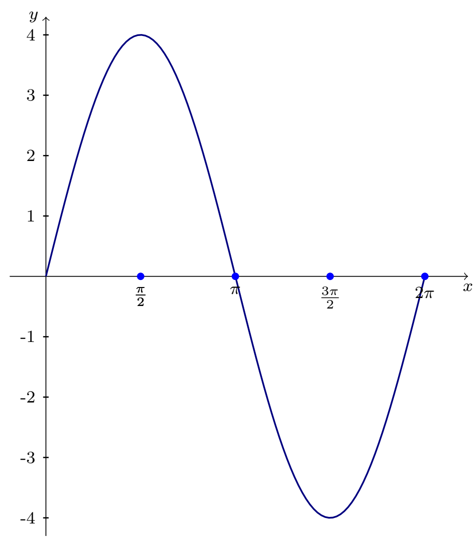
$\square$

Ejercicio 4.13.2. *Obtenga el gráfico de* $f(x) = 4\sin(2x)$.

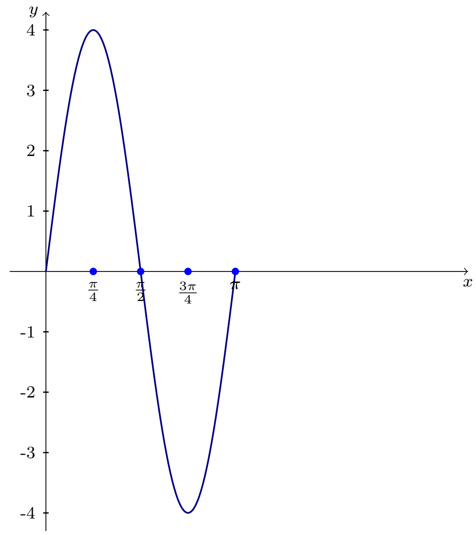
Solución. Tomamos nuevamente como referencia el gráfico de la función $\sin x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$:



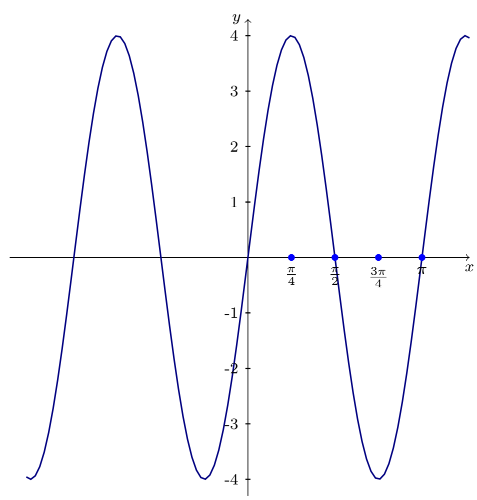
Como la amplitud de f es 4, entonces "estiramos" el gráfico anterior verticalmente hasta $y = 4$ e $y = -4$, obteniendo



Note que el período de f es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Esto quiere decir que, para obtener el gráfico de f, "encogemos" horizontalmente el último gráfico, de modo que x queda entre 0 y π. Al "encoger" el gráfico anterior, los valores de x que determinan la gráfica, ya no serán $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Para obtener los nuevos valores de x que determinan la gráfica, dividimos el intervalo $[0, \pi]$ en 4 subintervalos iguales, obteniendo que cada uno mide $\frac{\pi}{4}$ unidades de longitud. De este modo, los valores son $0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{4\pi}{4} = \pi$. Así, el gráfico de f, para $0 \leq x \leq \pi$ es



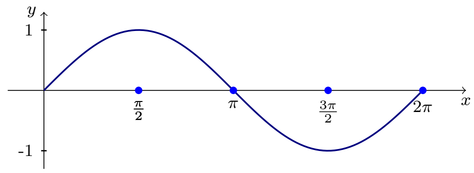
por lo que gráfico de f es:



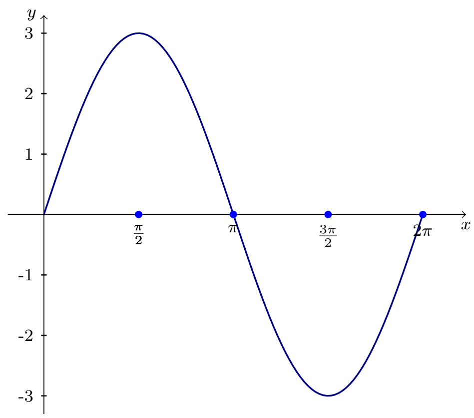
$\square$

Ejercicio 4.13.3. *Obtenga el gráfico de* $f(x) = 3\sin(4x + \pi)$.

Solución. Tomamos como referencia el gráfico de $\sin x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$:



Como la amplitud es $|a| = 3$, entonces en una primera etapa obtenemos el gráfico:



Como $b = 4$, el período de f es $p = \dfrac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Así, "encogemos" el último gráfico, de modo que x varíe entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Para determinar, en un primera etapa, los valores de x que determinan la gráfica, análogamente al ejercicio anterior, dividimos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en 4 subintervalos iguales, cada uno será de longitud $\dfrac{\frac{\pi}{2}}{4} = \dfrac{\pi}{8}$. De este modo, los valores en cuestión son

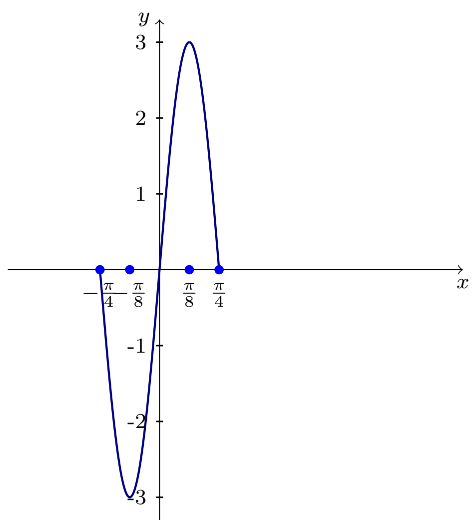
$$x = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}. \tag{4.13.3}$$

Además, como $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{4} > 0$, esto supone un desplazamiento horizontal del gráfico obtenido luego de considerado el período, de $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda. De este modo, restándole $\frac{\pi}{4}$ a cada uno de los valores en (4.13.3), vemos que los valores de x que finalmente determinan la gráfica son

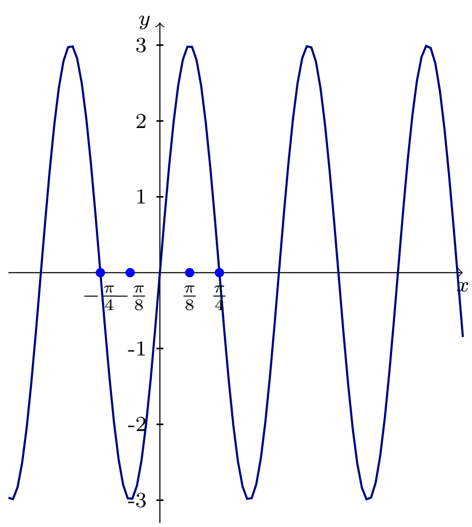
- $x = 0 - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$.

- $x = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{2\pi}{8} = -\dfrac{\pi}{8}$.
- $x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 0$.
- $x = \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{8}$.
- $x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

El nuevo gráfico es



De este modo, el gráfico de f es

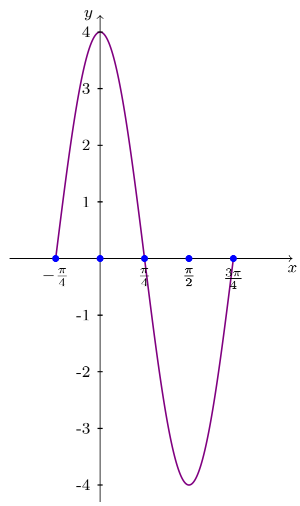


$\square$

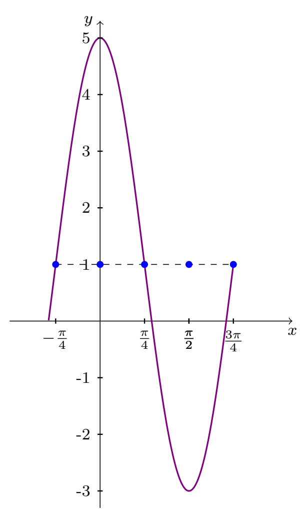
Ejercicio 4.13.4. *Obtenga el gráfico de*

$$f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

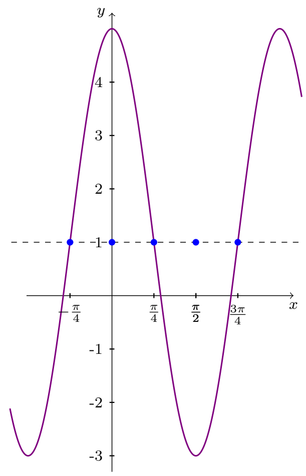
Solución. Note que la amplitud es $|a| = 4$, el período es $p = \pi$, y el desplazamiento horizontal es $\frac{c}{b} = \frac{\pi}{4}$ unidades hacia la izquierda. Razonamos, en una primera etapa, análogamente al ejercicio anterior. A partir del gráfico de $\sin x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$, consideramos amplitud, período y desplazamiento horizontal, obteniendo que



Ahora para obtener el gráfico de f, como $d = 1$, entonces desplazamos el gráfico anterior, 1 unidad hacia arriba, obteniendo:



De este modo, el gráfico de f es



□

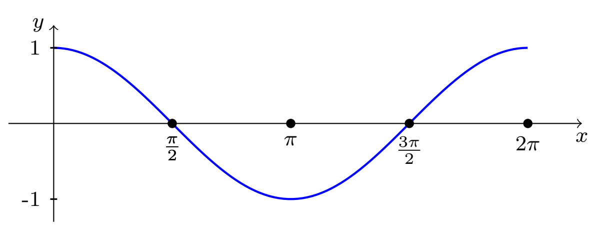
Observación 4.13.2. Sean a, b, c, d números reales. Para obtener el gráfico de una función sinuisoidal de la forma

$$g(x) = a\cos(bx + c) + d,$$

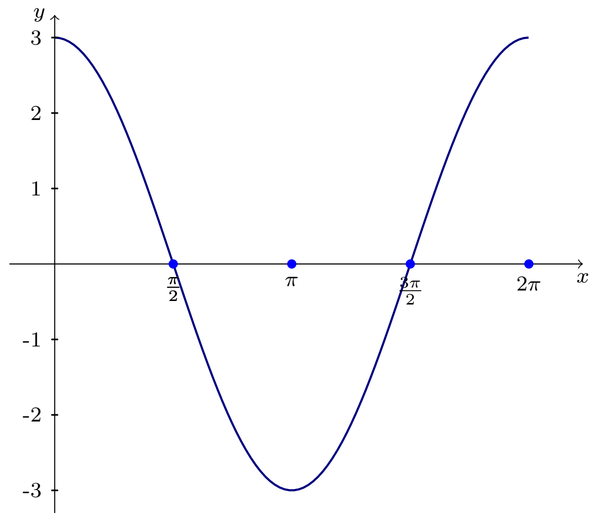
podemos proceder de forma similar al caso de la función de la forma $f(x) = a\sin(bx + c) + d$. En este caso, partimos del gráfico de la función coseno, para $0 \leq x \leq 2\pi$, y luego vamos graficando sucesivamente las funciones correspondientes a ir cambiando su amplitud, su período, y desplazamiento horizontal y vertical, según sea el caso, hasta obtener el gráfico de la función dada.

Ejercicio 4.13.5. *Obtenga el gráfico de la función* $f(x) = -3\cos(2x)$.

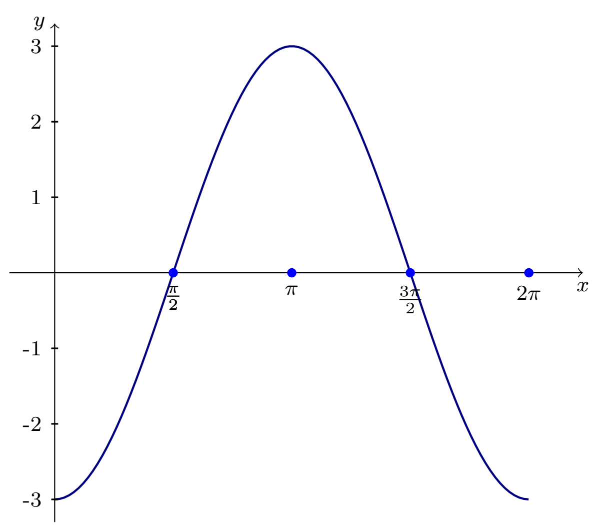
Solución. Tal como dijimos en la observación, partimos del gráfico de la función $\cos x$, para $0 \leq x \leq 2\pi$:



La amplitud es $|a| = 3$, por lo que varíando ésta en el gráfico anterior, obtenemos:

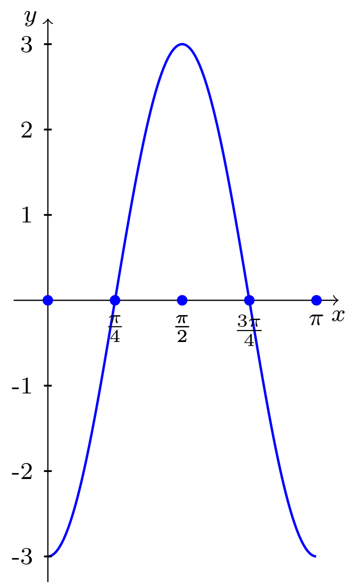


Como $a = -3 < 0$, esto hace que los valores de y cambien de signo, quedando la parte positiva del gráfico anterior bajo el eje x, y la parte negativa sobre el eje x:

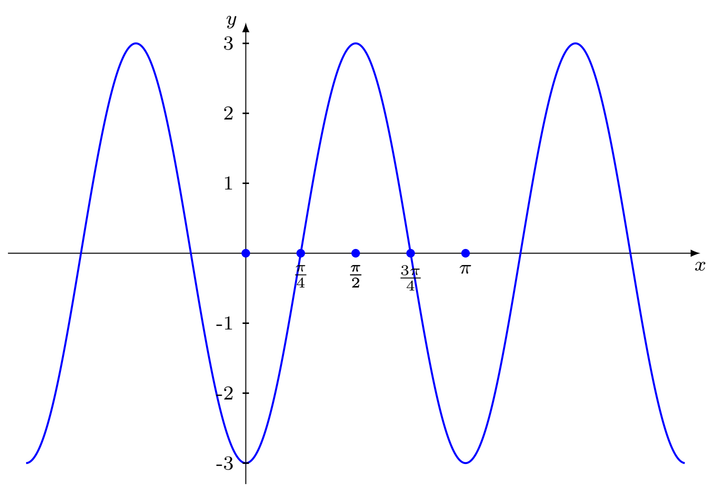


Es decir, el nuevo gráfico corresponde a una simetría con respecto al eje x del gráfico anterior.

Finalmente, para obtener el gráfico de f, notemos en primer lugar que su período es π. Dividiendo $[0, \pi]$ en 4 partes, vemos que los valores de x que determinan la gráfica son $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. De este modo, el gráfico de f está determinado por la curva:



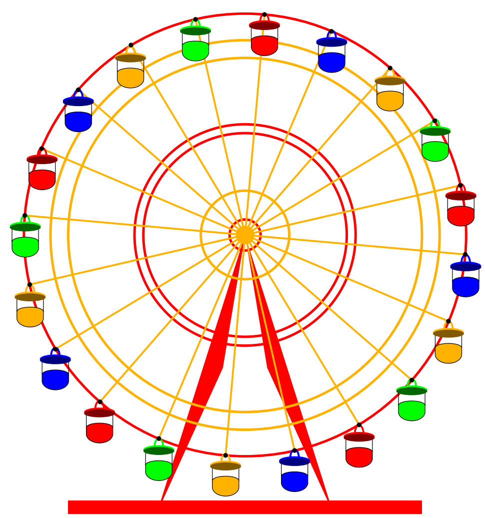
Así, el gráfico de f es



$\square$

Veamos una aplicación de las funciones sinusoidales:

Ejercicio 4.13.6. *En Fantasilandia, existe una rueda de la fortuna como la del dibujo*

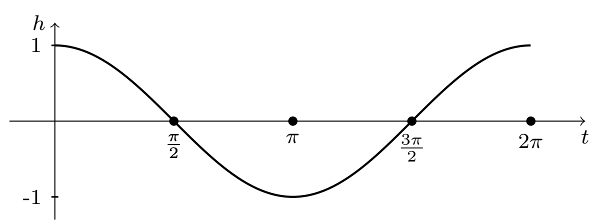


Un pasajero aborda un carro. La función que nos permite calcular la altura $h(t)$ del carro a los t segundos de partir, viene dada por

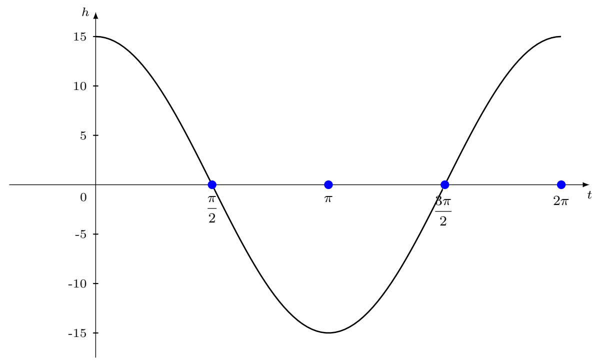
$$h(t) = -15\cos\left(\frac{\pi t}{60}\right) + 16.$$

a) *Grafique la función h, para $0 \leq t \leq 120$.*

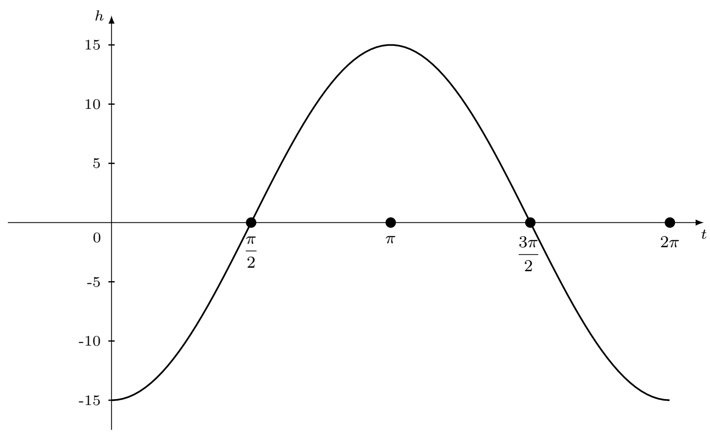
Solución. Partimos del gráfico de la función $\cos t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$:



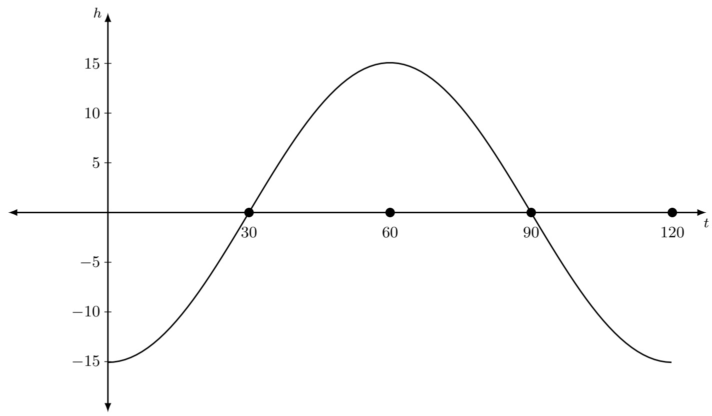
Como la amplitud de h es $|a| = 15$, del gráfico anterior obtenemos:



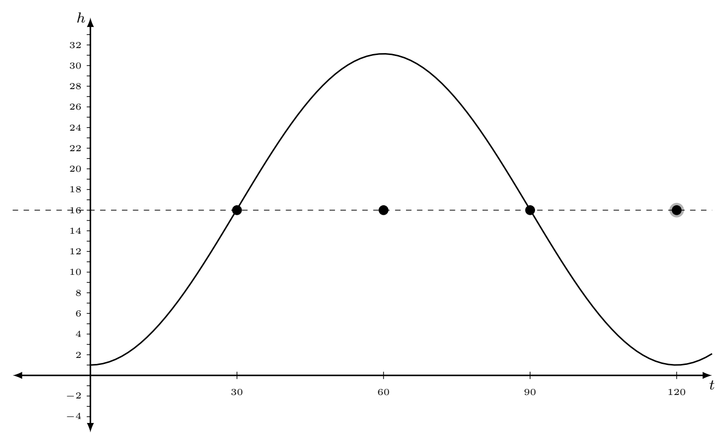
Dado que $a = -15 < 0$, entonces realizamos una simetría del gráfico anterior con respecto al eje t, obteniendo:



Note que el período de nuestra función h es $p = 120$. Como $120 > 2\pi$, esto supone un "estiramiento" horizontal del gráfico anterior. Dividiendo $[0, 120]$ en 4 partes, vemos qque los valores de t que determinan la gráfica son $t = 0, 30, 60, 90, 120$. Así el nuevo gráfico, con $0 \leq t \leq 120$, es



Por lo tanto, como $d = 16$, para obtener el gráfico de $h(t)$, basta trasladar el gráfico anterior 16 unidades hacia arriba, obteniendo



b) *En base al gráfico obtenido, responde: ¿A qué altura del suelo parte el carro? ¿Cuál es la mayor altura que alcanza la rueda, y al cuánto tiempo la alcanza? ¿Cuánto tiempo se demora la rueda en completar una vuelta completa?*

Solución. El gráfico de h, cuyos puntos tienen la forma $(t, h(t))$:

- pasa por el punto $(0, 1)$. Esto quiere decir que la rueda parte a 1 metro de la superficie.
- pasa por el punto $(60, 31)$, el cual es el punto más alto de la gráfica. Esto quiere decir que transcurrido 1 minuto, el carro alcanza su mayor altura, la cual corresponde a 31 metros (note que como la rueda parte a 1 metro de

altura, entonces de la altura máxima obtenida, deducimos que el diámetro de la rueda es de 30 metros).

- pasa por el punto $(120, 1)$. Esto quiere decir que la rueda vuelve al punto de partida a los 2 minutos, el cual es el tiempo que demora en dar una vuelta completa.

$\square$

4.14. Ejercicios propuestos.

1. Determine la medida en grados, $0° \leq \alpha \leq 360°$, y grafique el ángulo en posición normal de medida:

   a) $\alpha = \frac{3}{4}\pi \ rad$
   b) $\alpha = \frac{11}{6}\pi \ rad$
   c) $\alpha = -\frac{3}{4}\pi \ rad$
   d) $\alpha = \frac{5}{3}\pi \ rad$
   e) $\alpha = \frac{7}{2}\pi \ rad$
   f) $\alpha = -\frac{7}{2}\pi \ rad$
   g) $\alpha = \frac{16}{3}\pi \ rad$
   h) $\alpha = -\frac{16}{3}\pi \ rad$
   i) $\alpha = -\frac{31}{6}\pi \ rad$

2. Determine la medida en radianes, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, y grafique el ángulo en posición normal de medida:

   a) $\alpha = 150°$
   b) $\alpha = 210°$
   c) $\alpha = 315°$
   d) $\alpha = 15°$
   e) $\alpha = 105°$
   f) $\alpha = -120°$
   g) $\alpha = -300°$
   h) $\alpha = -75°$
   i) $\alpha = 765°$
   j) $\alpha = -570°$

3. Determine el valor de $\cos\alpha, \sin\alpha$ y $\tan\alpha$ para un ángulo en posición normal de medida:

   a) $\alpha = \frac{2}{3}\pi\ rad$
   b) $\alpha = \frac{7}{6}\pi\ rad$
   c) $\alpha = \frac{7}{4}\pi\ rad$
   d) $\alpha = \frac{5}{6}\pi\ rad$
   e) $\alpha = \frac{5}{4}\pi\ rad$
   f) $\alpha = -3\pi$
   g) $\alpha = \frac{11}{2}\pi\ rad$
   h) $\alpha = \frac{11}{6}\pi\ rad$
   i) $\alpha = \frac{2}{3}\pi\ rad$
   j) $\alpha = \frac{9}{2}\pi rad$
   k) $\alpha = \frac{4}{3}\pi\ rad$
   l) $\alpha = \frac{5}{3}\pi\ rad$

4. Usando identidades trigonométricas, obtenga el valor de

   a) $\sin 15°$
   b) $\cos 75°$
   c) $\tan 105°$
   d) $\sin 195°$

5. Obtenga todos los valores de t, $0 \leq t \leq 2\pi$, para los cuales

   a) $\sin t = -1$
   b) $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   c) $\sin t = \dfrac{1}{2}$
   d) $\cos t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   e) $\tan t = 0$
   f) $\tan t = \sqrt{3}$
   g) $\tan t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
   h) $\sec t = 2$
   i) $\csc t = -2$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones

   6.1) para $t \in [0, 2\pi]$

   6.2) para $t \in \mathbb{R}$

   a) $\sin^2 t - \frac{1}{4} = 0$
   b) $\sin t \cos t - \sin t = 0$
   c) $\cos^2 t - \cos t = 0$
   d) $\sin t - \cos t = 0$

e) $\sin t + \cos t = 1$

f) $\cos^2 t - 3\sin^2 t = 0$

g) $3\cot t + 3\csc t = 2\sin t$

h) $\cos^2 t - 3\sin^2 t = 0$

i) $2\sin^2 t + \cos t - 1 = 0$

j) $2\cos t = \tan t$

k) $\sin t = \sin(2t)$

l) $2\cos t = \frac{1+\sin t}{\cos t}$

m) $\sec t - \cos t = \frac{1}{2}\tan t$

n) $\cos^4 t - \sin^4 t = \frac{1}{2}$

7. Demuestre las siguientes identidades.

   a) $\dfrac{1}{1-\sin t} + \dfrac{1}{1+\sin t} = 2\sec^2 t$

   b) $\dfrac{\tan t + \cot t}{\sec t \cdot \csc t} = 1$

   c) $\cot^2 t = \cos^2 t + \cot^2 t \cdot \cos^2 t$

   d) $\sec^2 t + \csc^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}$

   e) $\frac{\sin t}{1+\cos t} + \frac{1+\cos t}{\sin t} = 2\csc t$

   f) $\dfrac{1}{\sec^2 t} = \sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 t$

   g) $\csc t + \cot t + \frac{\sin t}{1+\cos t} = 2\csc t$

8. Usando identidades demuestre que

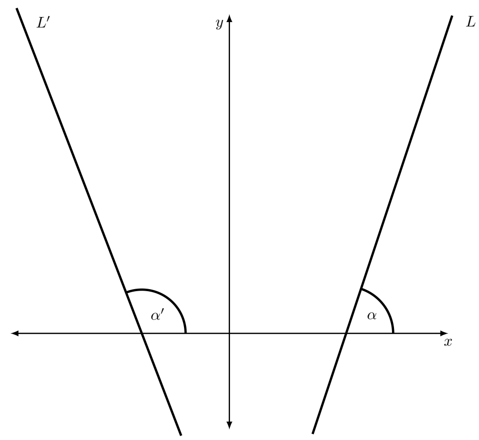
   a) $\cos(t+\pi) = -\cos t$

   b) $\sin(t+\pi) = -\sin t$

   c) $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t$

   d) $\tan(\pi - t) = -\tan t$

9. El *ángulo de inclinación* de una recta, se define como el ángulo formado entre la recta y el eje x, cuando la recta se considera dirigida hacia arriba



Se puede probar que la pendiente m de una recta, viene dada por

$$m = \tan \alpha, \tag{4.14.1}$$

donde α es el ángulo de inclinación de la recta dada.

a) Determine la ecuación y gráfico de una recta que pasa por $(0, 0)$ y cuyo ángulo de inclinación es $\frac{\pi}{3}$.

b) Determine la ecuación y gráfico de una recta que pasa por $(0, 1)$ y cuyo ángulo de inclinación es $\frac{3\pi}{4}$.

10. Considere la recta L que pasa por $(0, 0)$ y ángulo de inclinación $\frac{\pi}{6}$. Use (4.14.1) para responder:

a) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por $(0, 0)$ y cuya pendiente es el doble de la pendiente de L.

b) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por $(0, 0)$ y cuyo ángulo de inclinación es el doble del ángulo de inclinación de L.

c) ¿Se obtiene la misma recta en a) y en b)?

11. Considere la función f definida por

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \cos^2 x.$$

Obtenga, si es que existe, la función inversa de f. En caso contrario, haga las restricciones necesarias para que sea invertible y defina su inversa.

12. Determine el valor de

    a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

    b) $\arcsin(1) + \arccos(-1)$

    c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

    d) $\arctan(1) - \arctan(-\sqrt{3})$

    e) $\operatorname{arcsec}(2) + \operatorname{arccsc}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

    f) $\operatorname{arcsec}(-1) + \operatorname{arcctan}(-1) + \operatorname{arccsc}(-2)$

13. Demuestre que si $x \in \,]-1, 1[$, entonces

    a) $\arcsin x = \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right)$

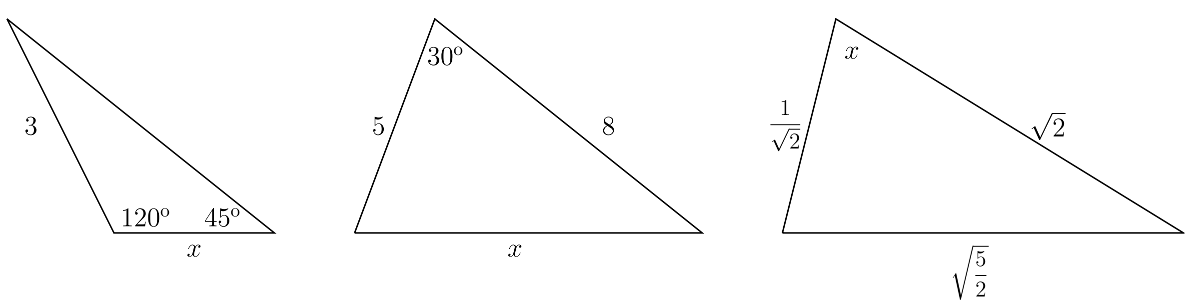
    b) $\arccos x = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1}{x}\right)$

14. Resuelva en $\mathbb{R}$, la ecuación

    a) $\arccos x + \arccos(1-x) = \frac{\pi}{2}$

    b) $\arccos x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{6}$

15. En cada caso, obtenga el valor de x



16. La rapidez angular de un cuerpo que gira alrededor de un eje, se define como la medida del ángulo girado por unidad de tiempo ¿Cuál es la rapidez angular de la Tierra en su rotación alrededor de su eje, en $\frac{grados}{hr}$?

17. Un alien está parado en la cima del edificio Costanera Center, buscando destruir Santiago entero. Un cazador de aliens está parado a 18 metros de la entrada del edificio y pretender aniquilar al alien con un disparo. ¿Cuál debe ser el ángulo aproximado de disparo, sabiendo que el Costanera Center tiene una altura de 300 metros? Use calculadora. Dato: Considere despreciable la altura del cazador.

18. La famosa Torre de Pisa, actualmente tiene una altura de 55,8 metros y está inclinida 4° con respecto a la vertical. ¿Cuál era la altura de la Torre de Pisa cuando no estaba inclinada? Use calculadora.

19. Marcelo está elevando un volantín, cuya cuerda mide 100 m. Además, la cuerda mide 5 veces la distancia entre el individuo y la proyeccion del volantín en el suelo. ¿Cuál es la altura del volantín? Use calculadora.

20. Al situarse a cierta distancia de la base de un árbol, se ve la cima de éste con un ángulo de elevación de 60°. Si nos situamos a una distancia igual al triple de la distancia inicial, ¿cuánto mide el nuevo ángulo de inclinación?

21. Considere el problema: Una escalera con forma de tijera está apoyada sobre el piso. Cada brazo de la escalera mide 2 metros y además forma un ángulo de 75° con el piso. Bajo estas condiciones, ¿Cuál es la distancia entre los extremos inferiores de cada brazo?

    a) Resuelva este problema, si es posible, usando el teorema de los senos.

    b) Resuelva este problema, si es posible, usando el teorema de los cosenos.

    c) Resuelva este problema, si es posible, sin usar el teorema de los senos ni el de los cosenos.

22. Una estatua está situada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo situado a 3 m del pedestal, este se ve bajo un ángulo de 15°, y todo el conjunto (pedestal más estatua) bajo un ángulo de 40°. ¿Cuánto mide el pedestal, y cuánto mide la estatua? Use calculadora.

23. Marcelo observa un globo aerostático que está ascendiendo, donde ángulo de elevación de su visual es de $25°$. Pasados 2 minutos, el ángulo de elevación es de $60°$. Si Marcelo está a 300 metros del lugar donde partió el globo, ¿cual es la rapidez del globo, en $\frac{m}{s}$?

24. La fuerza F con la que cae una bola por un plano inclinado, viene dada por

$$F = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

donde m es la masa de la bola, g es la aceleración de gravedad, la cual corresponde a $9{,}8\frac{m}{s^2}$, y θ es el ángulo de inclinación del plano.

a) Si el plano está inclinado con un ángulo de $30°$, ¿cuál es la fuerza, medida en Newtons, con la que cae una bola de masa m?. Use la aproximación $g = -10\frac{m}{s^2}$.

b) Si el plano está inclinado con un ángulo de $60°$, ¿cuál es la fuerza, medida en Newtons, con la que cae una bola de masa m?, ¿es la fuerza obtenida el doble de la fuerza obtenida cuando $\theta = 30°$? Use la aproximación $g = -10\frac{m}{s^2}$.

c) Si la fuerza equivale a 7 veces la masa de la pelota ¿Cuál es la inclinación del plano?

d) ¿qué ocurre con la fuerza en la medida que el plano va tendiendo a ser vertical?

25. Un explorador se aleja de su campamento C hasta un punto M, situado a 10 km al norte de C, cuando recibe un mensaje por celular que le indica que debe ir a comprar un medicamento a uno de los dos pueblos P o Q y regresar lo antes posible al campo C. El pueblo P se encuentra a 8 km en dirección $N45°E$ de M y el pueblo Q a 6 km en dirección $N60°O$ de M. Si debe regresar en línea recta de cualquiera de estos pueblos al campamento, ¿a cuál pueblo le conviene acudir? Use calculadora.

26. Popeye se encuentra en el mar próximo a dos islas A y B. La isla A tiene un volcán de 560 metros y según sus cálculos, él observa la cima del volcán con un ángulo de elevación de 8°. Las islas están a 7 kms de distancia entre sí, y el ángulo entre las visuales de Popeye a cada una de las islas es de 35°. El combustible de su embarcación se le empieza a acabar, por lo que debe ir rapidamente a alguna de las dos islas. ¿A qué isla la conviene acudir? Use calculadora.

27. Karla sobrevuela la ciudad de Concepción en un globo aerostático. Ella observa su casa con un ángulo de depresión de 30°. El globo sube 5 metros, y ella ahora observa su casa con un ángulo de depresión de 35°. Use calculadora para responder:

    a) ¿A qué distancia está Karla de su casa, en cada una de las dos observaciones?

    b) ¿A qué altura vuela el globo, la segunda vez que observa la casa?

28. La sombra de un edificio disminuye en 10 metros cuando el ángulo de elevación que determinan los rayos de sol aumenta de 60° a 70° ¿Cuál es la altura del edificio? Use calculadora.

29. César y Tomás observan un globo aerostático, y se encuentran a una distancia de 8 km entre sí. César observa el globo con un ángulo de elevación de 25° y Tomás con un ángulo de elevación de 47°. Si el globo se encuentra entre ellos, ¿a qué altura vuela el globo? Use calculadora.

30. Un poste vertical de 10 metros de altura está en una cuesta que forma un ángulo de 20° con la horizontal. Un cable se ata desde la parte superior del poste hasta un punto ubicado a 25 metros cuesta abajo, medido desde la base del poste. ¿Cuál es la longitud del cable?

31. Obtenga el gráfico de

    a) $f(x) = \sin(2x + \pi)$

    b) $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(x) = 5 + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

32. En un día de invierno en Puerto Varas, la temperatura $T(t)$ a las t horas viene dada por

$$T(t) = -10\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right),\ 0 \leq t \leq 24$$

a) Obtenga el gráfico de T.

b) ¿A qué hora ocurre la temperatura más baja y cuál es el valor de esta?

c) Pasado mediodía, ¿a qué hora la temperatura empieza a descender?

33. El ciclo respiratorio de un ser humano, se ajusta al modelo

$$v(t) = \frac{3}{5}\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

donde $v(t)$ es la velocidad del aire que ingresa a los pulmones, en $\frac{lts}{seg}$, a los t segundos de iniciado el proceso.

a) Grafique v

b) Según el gráfico obtenido, ¿cuánto tiempo dura una inhalación? ¿cuánto tiempo dura una exhalación? ¿cuánto tiempo dura un ciclo respiratorio?

34. En Chile, la cantidad de horas de luz diurna en el día t del año 2018 ($t = 0$ es el día de Enero), se ajusta aproximadamente al modelo

$$h(t) = -\frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right) + 12$$

a) Obtenga el gráfico de h, para $0 \leq t \leq 365$. Use calculadora donde sea necesario.

b) El gobierno de Chile decide decretar el horario de invierno en el período en el que las horas de luz diurna sean menos de 12. ¿Entre que días será el horario de invierno?

Capítulo 5

Números complejos.

5.1. Introducción.

El conjunto de los números complejos corresponde a una extensión de los números reales, en el cual cualquier número real negativo tiene raíz cuadrada. El número complejo base es el número i, llamado unidad imaginaria, y el cual cumple que $i^2 = -1$. Todo número complejo se puede escribir de la forma

$$a + bi$$

con a y b números reales. Ejemplos de números complejos son $1 + 3i, \frac{3}{2} - 2i, 5i$ entre otros. Como dijimos al comienzo, los números reales también son números complejos, por ejemplo el 3 se puede escribir en notación compleja como $3+0i$. Como $i^2 = -1$, esto origina que -1 tenga dos raíces cuadradas que son números complejos, los cuales son i y $-i$. De forma similar, podemos obtener las raíces cuadradas complejas de cualquier número negativo. Por ejemplo, las raíces cuadradas complejas de -4 son $2i$ y $-2i$.

En este capítulo estudiaremos todo lo concerniente a números complejos: sus representaciones, como operar con ellos (suma, resta, multiplicación, división, potencias, raíces), y como resolver ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones son este tipo de números. Por ejemplo, la ecuación cuadrática

$$x^2 + 2x + 17 = 0$$

tiene discriminante $b^2 - 4ac = -64$, el cual es un número negativo, por lo que no tiene soluciones reales. Sin embargo, tiene dos soluciones complejas, las cuales son los números $1 + 4i$ y $1 - 4i$.

5.2. Concepto de número complejo.

Definición 5.2.1. *Sean a y b números reales. El conjunto de los **números complejos**, denotado por $\mathbb{C}$, consiste en todos los números de la forma $a + bi$, donde i, el cual es llamado **unidad imaginaria**, cumple que $i^2 = -1$.*

Observación 5.2.1. Ejemplos de números complejos son: $1 + 2i$, $3 - \frac{1}{5}i$, $4i$, y 3.

Definición 5.2.2. *Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces*

- *El número a es llamado **parte real** de z, y es denotado por $Re(z)$. Es decir,*

$$Re(z) = a.$$

- *El número b es llamado **parte imaginaria** de z, y es denotado por $Im(z)$. Es decir,*

$$Im(z) = b.$$

Ejercicio 5.2.1. *Para $z = 2 - 3i$, determine $Re(z)$ e $Im(z)$.*

Solución. En este caso, $Re(z) = 2$ y $Im(z) = -3$. □

Observación 5.2.2. Sea $z \in \mathbb{C}$. Se tiene que:

- Si $Im(z) = 0$, entonces z se denomina número **complejo real**. Es decir, z es un número complejo real, sólo si, $z = a + 0i = a$, por lo que vemos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

- Si $Re(z) = 0$, entonces z se denomina número **imaginario puro**. De este modo, z es un número imaginario puro, si y sólo si, $z = 0 + bi = bi$.

Definición 5.2.3. *Sea $z = a + bi$ un número complejo. Se llama **conjugado** de z, el cual es denotado por $\overline{z}$, al número complejo*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Observación 5.2.3. Es decir, para obtener el conjugado de un número complejo, mantenemos su parte real, y le cambiamos el signo a su parte imaginaria.

Ejercicio 5.2.2. *Obtenga el conjugado de $z = 1 + 2i$ y de $w = 3 - i$*

Solución. Se tiene que

$$\overline{z} = 1 - 2i \text{ y } \overline{w} = 3 + i.$$

$\square$

Ejercicio 5.2.3. *Sea $z = a + bi$ un número complejo. ¿Cuál es el conjugado de su conjugado?*

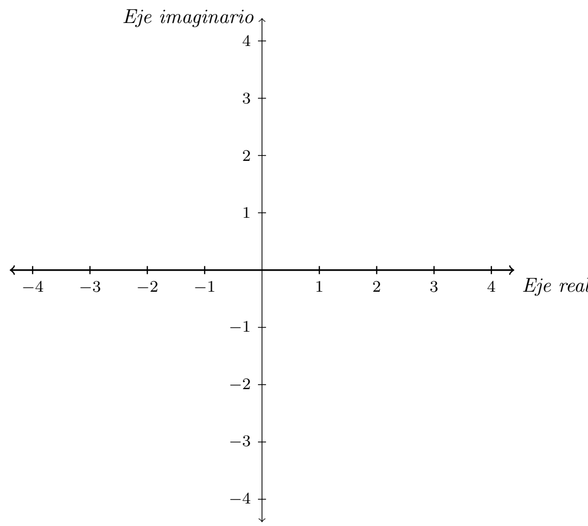
Solución. Note que $\overline{z} = a - bi$. De este modo, el conjugado del conjugado de z, es

$$\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z.$$

Así, el conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número. $\square$

5.3. Representación de un número complejo como par ordenado.

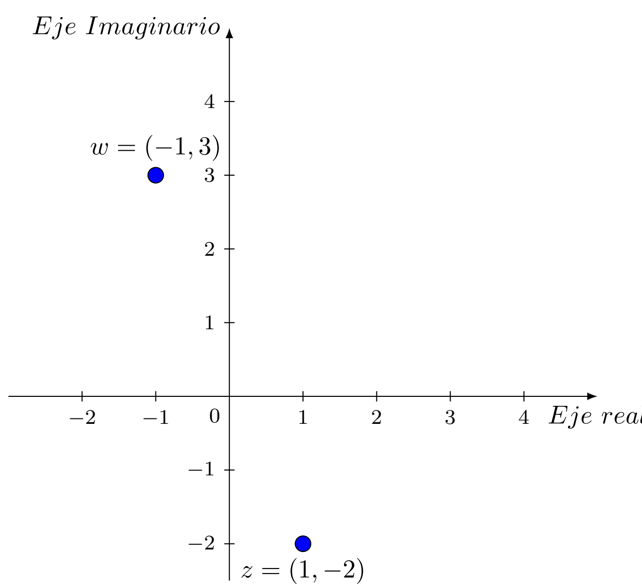
Todo número complejo $z = x + yi$, lo podemos representar en el plano cartesiano por el par ordenado (x, y) y viceversa. Desde este punto de vista, el plano cartesiano se denomina **plano complejo**, el eje x se denomina **eje real**, y el eje y se denomina **eje imaginario**.



Ejercicio 5.3.1. *Represente en el plano cartesiano los números complejos* $z = 1 - 2i$ *y* $w = -1 + 3i$.

Solución. El número complejo $z = 1 - 2i$ corresponde al par ordenado $(1, -2)$ y $w = -1 + 3i$ corresponde a $(-1, 3)$. Graficamente esto es:

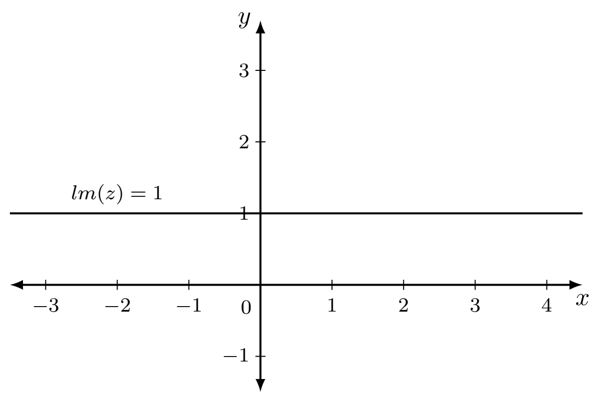
□



Ejercicio 5.3.2. *Grafique el conjunto de todos los números complejos z tales que*

a) $Im(z) = 1$.

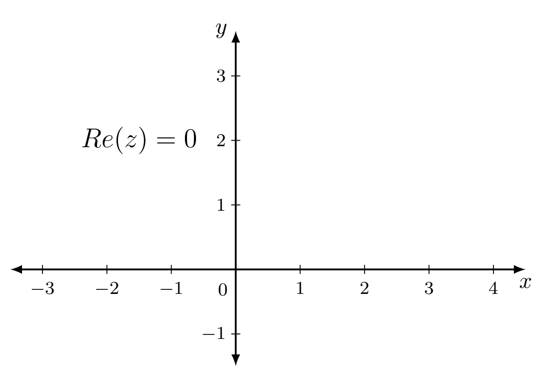
Solución. Sea $z = x + yi$ un número complejo cualquiera. Note que, $Im(z) = 1$, es equivalente a decir que $y = 1$, ecuación que corresponde a la recta paralela al eje x de la figura:



Es decir, los números complejos que satisfacen que $Im(z) = 1$, forman esta recta en el plano.

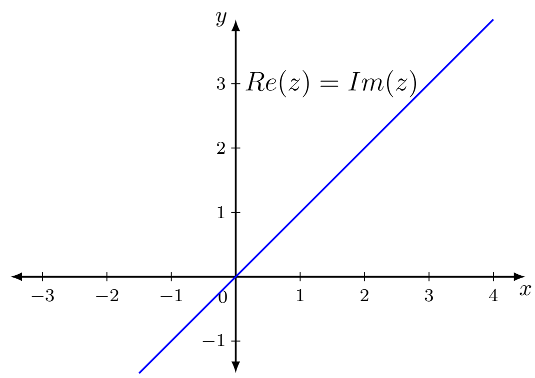
b) $Re(z) = 0$.

Solución. Sea $z = x + yi$ un número complejo cualquiera. Note que $Re(z) = 0$, si y sólo si, $x = 0$. La ecuación $x = 0$ corresponde al eje y del plano cartesiano, es decir, al eje imaginario, por lo que el conjunto corresponde a este eje:



c) $Re(z) = Im(z)$.

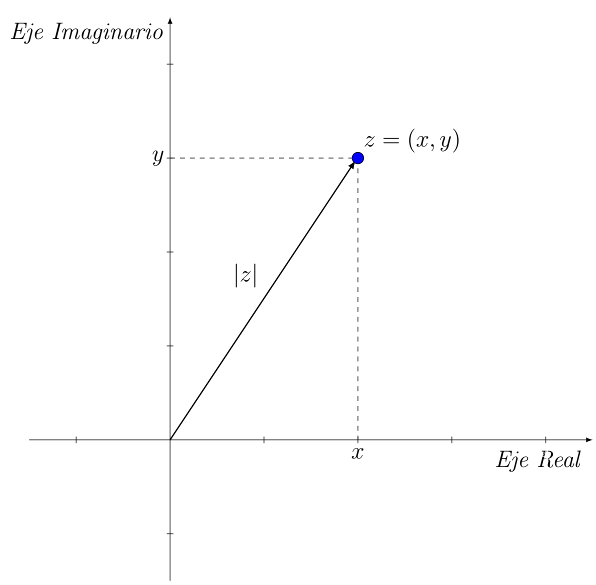
Solución. Sea $z = x + yi$ un número complejo cualquiera. Note que $Re(z) = Im(z)$ es equivalente a decir que $x = y$, por lo que el conjunto corresponde a la recta que tiene ecuación $y = x$:



□

5.4. Módulo de un número complejo.

En el plano complejo, se puede interpretar un número complejo $z = x + yi$, como un vector dirigido desde el origen hasta el punto (x, y):



La longitud de este vector se denomina **módulo** de z, y se denota por $|z|$.

Ejercicio 5.4.1. *Dado un número complejo $z = x + yi$, ¿a qué expresión de x e y corresponde $|z|$?*

Solución. Para determinar $|z|$, calculamos la distancia entre $(0,0)$ e (x,y), deduciendo que

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

□

Definición 5.4.1. *Sea $z = x + yi$ un número complejo. El* ***módulo*** *de z, el cual es denotado por $|z|$, viene dado por*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ejercicio 5.4.2. *Grafique el conjunto de todos los números complejos z, tales que $|z| = 1$.*

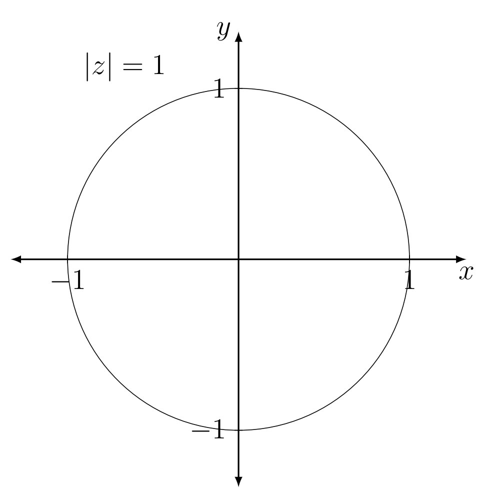
Solución. Sea $z = x + yi$ un número complejo. La igualdad $|z| = 1$ es equivalente a

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Elevando al cuadrado esta última expresión, obtenemos la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1,$$

la cual corresponde a la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1:



Es decir, todos los números complejos cuyo módulo es 1, forman esta circunferencia.

□

Ejercicio 5.4.3. *Resuelva en* $\mathbb{C}$*, la ecuación*

$$|z|^2 - z = 1 + i.$$

Solución. Sea $z = x + yi$ un número complejo. De este modo, la ecuación dada puede ser expresada como

$$x^2 + y^2 - (x + yi) = 1 + i.$$

En el miembro izquierdo, formamos un número complejo en su forma binómica, obteniendo

$$(x^2 + y^2 - x) - yi = 1 + i.$$

Igualamos parte real e imaginaria de ambos miembros, de modo que

$$x^2 + y^2 - x = 1, \tag{5.4.1}$$

$$-y = 1. \tag{5.4.2}$$

Así, $y = -1$. Reemplazando este valor en la primera ecuación, se deduce que $x^2 - x = 0$, de donde $x = 1$ o $x = 0$. Así, los números complejos z que satisfacen la ecuación inicial son

$$z = 1 - i \text{ o } z = -i.$$

□

5.5. Operaciones con números complejos.

5.5.1. Suma de números complejos.

Informalmente, para sumar dos números complejos, y obtener un número complejo en su forma binómica, sumamos sus partes reales por un lado, y por otro lado sus partes imaginarias.

Ejercicio 5.5.1. *Sean* $z = 3 + 2i$ *y* $w = (1 + \frac{1}{2}i)$ *dos números complejos. Obtenga, en su forma binómica, el número complejo suma, denotado por* $z + w$.

Solución. Sumando las partes reales, y por otro lado, las partes imaginarias, obtenemos que

$$\begin{aligned} z + w &= (3 + 2i) + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) \\ &= (3 + 1) + \left(2 + \frac{1}{2}\right) i \\ &= 2 + \frac{5}{2}i. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 5.5.1. *Sean* $z = a + bi$ *y* $w = x + yi$ *dos números complejos. Se define la* ***suma*** *de los números complejos* z *y* w*, la cual es denotada por* $z + w$*, como el número complejo*

$$z + w = (a + bi) + (x + yi) := (a + x) + (b + y)i.$$

Definición 5.5.2. *Sea* $z = a + bi$ *un número complejo, El* ***opuesto aditivo*** *de* z*, es un número complejo* w*, el cual satisface que*

$$z + w = w + z = 0$$

El opuesto aditivo w *es denotado por* $-z$.

Observación 5.5.1. El opuesto aditivo de un número complejo z es único.

Ejercicio 5.5.2. *Considere el número complejo $z = 1 + 2i$. Obtenga su opuesto aditivo w.*

Solución. Supongamos que $w = x + yi$. Se debe cumplir que

$$z + w = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$(1 + 2i) + (x + yi) = 0.$$

Sumando los números complejos de la izquierda y expresando 0 en su forma binómica, obtenemos que

$$(1 + x) + (2 + y)i = 0 + 0i.$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias de cada uno de los miembros, se deduce que

$$1 + x = 0 \text{ y } 2 + y = 0.$$

Es decir, $x = -1$ y $y = -2$, por lo que el opuesto aditivo es $w = -1 - 2i$. O sea, con la notación usual, $-z = -1 - 2i$.

Observación 5.5.2. En general, si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces

$$-z = -a - bi.$$

Es decir, para obtener el opuesto de un número complejo, simplemente cambiamos el signo de su parte real, y también de su parte imaginaria.

Ejercicio 5.5.3. *Determine el opuesto aditivo de*

a) $z = (2 - i) + (3 - 3i)$.

   Solución. Note que $z = (2 - i) + (3 - 3i) = 5 - 4i$, por lo que $-z = -5 + 4i$.

b) *el conjugado de $z = a + bi$.*

   Solución. El conjugado de z es $\overline{z} = a - bi$, por lo que su opuesto aditivo es $-\overline{z} = -a + bi$. □

5.5.2. Sustracción de números complejos.

Informalmente, para restar dos números complejos, y obtener un número complejo en su forma binómica, cambiamos los signos de la parte real y de la parte imaginaria del número complejo que se está restando, y luego operamos con lo obtenido.

Ejercicio 5.5.4. *Sean los números complejos $z = 2 - i$ y $w = 2 + 2i$. Obtenga, en su forma binómica, el número complejo resta, denotado por $z - w$. ¿Qué tipo de número complejo es?*

Solución. Se tiene que

$$z - w = (2 - i) - (2 + 2i).$$

Eliminamos los paréntesis, cambiando los signos de $2 + 2i$. De este modo,

$$\begin{aligned} z - w &= (2 - i) - (2 + 2i) \\ &= 2 - i - 2 - 2i \\ &= 0 - 3i \\ &= -3i, \end{aligned}$$

de donde el número obtenido es un complejo imaginario puro. □

Definición 5.5.3. *Sean $z = a + bi$ y $w = x + yi$ dos números complejos. La diferencia $z - w$, corresponde a $z + (-w)$, el cual es*

$$z - w := (a + bi) - (x + yi) = (a - x) + (b - y)i.$$

5.5.3. Multiplicación de números complejos.

Informalmente, para multiplicar dos números complejos, y luego obtener un número complejo en su forma binómica, multiplicamos término a término sus formas binómicas.

Ejercicio 5.5.5. *Sean $z = 2 - i$ y $w = 1 - 3i$ dos números complejos. Obtenga, en su forma binómica, el número complejo producto, denotado por $z \cdot w$.*

Solución. Multiplicando término a término, obtenemos que

$$z \cdot w = (2-i)(1-3i) = 2 - 6i - i + 3i^2.$$

Como $i^2 = -1$, entonces de la igualdad anterior, obtenemos que

$$z \cdot w = 2 - 7i - 3 = -1 - 7i.$$

□

Observación 5.5.3. En general, si $z = a + bi$ y $w = x + yi$ son dos números complejos, entonces, multiplicando término a término sus formas binómicas, obtenemos que $z \cdot w$ corresponde a

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+bi)\cdot(x+yi) \\ &= ax + ayi + bxi + byi^2 \\ &= ax + ayi + bxi - by \\ &= (ax - by) + (ay + bx)i. \end{aligned}$$

Definición 5.5.4. *Sean $z = a + bi$ y $w = x + yi$ dos números complejos. Se define la **multiplicación** de los números complejos z y w, la cual es denotada por $z \cdot w$, como el número complejo*

$$z \cdot w = (a+bi)(x+yi) =: (ax - by) + (ay + bx)i.$$

Ejercicio 5.5.6. *Dado un número complejo $z = a + bi$, realice la multiplicación $z \cdot \overline{z}$. ¿Qué número obtenemos?*

Solución. Se tiene que

$$z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi).$$

Es decir, este producto corresponde a una suma por su diferencia, por lo que

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

Así, el producto entre un número complejo y su conjugado, es un número real, el cual corresponde a su módulo al cuadrado. $\square$

Definición 5.5.5. *Sea $z = a + bi$ un número complejo, con $z \neq 0$. El **inverso multiplicativo** de z, es un número complejo w, el cual satisface que*

$$z \cdot w = w \cdot z = 1.$$

El inverso multiplicativo w es denotado por z^{-1}, o $\frac{1}{z}$.

Observación 5.5.4. El inverso multiplicativo de un número complejo z es único.

Ejercicio 5.5.7. *Obtenga, en su forma binómica, el inverso multiplicativo de*

a) $z = 2 - i$.

Solución. El inverso multiplicativo de z es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2-i}.$$

Queremos expresar $\frac{1}{z}$ en su forma binómica. Para tal efecto, haremos que $2 - i$ "desaparezca " del denominador de la última igualdad. Para ello, multiplicamos la fracción $\frac{1}{2-i}$ por $\frac{2+i}{2+i}$, es decir por 1, obteniendo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \\ &= \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2+i}{4-i^2} \\ &= \frac{2+i}{5} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

Podemos comprobar que efectivamente el número obtenido es el inverso multiplicativo de z, en efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= (2-i) \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \right) \\ &= \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}i^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se deja de ejercicio comprobar que $z^{-1} \cdot z = 1$. $\square$

b) $z = a + bi$, *con* $z \neq 0$.

Solución. Note que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}.$$

Intentamos eliminar $a+bi$ del denominador de la última igualdad y de este modo obtener $\frac{1}{z}$ en su forma binómica. Multiplicamos la fracción en cuestión por $\frac{a-bi}{a-bi}$, obteniendo que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} \\ &= \frac{a-bi}{a^2-(bi)^2} \\ &= \frac{a-bi}{a^2-b^2i^2} \\ &= \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.\end{aligned}$$

$\square$

Observación 5.5.5. Sea $z = a + bi$ un número complejo. Para que el inverso multiplicativo de z, el cual viene dado por

$$\frac{1}{a+bi} \tag{5.5.1}$$

quede expresado en su forma binómica, multiplicamos y dividimos (5.5.1) por el conjugado de z, es decir, por $a - bi$. Note que se obtiene una diferencia de cuadrados en el denominador, lo cual nos facilita los cálculos para obtener la expresión deseada.

5.5.4. División de números complejos.

Definición 5.5.6. *Sean $z = a + bi$ y $w = x + yi$ dos números complejos, con $w \neq 0$. La división $\dfrac{z}{w}$, o $z \div w$, corresponde al número complejo $z \cdot w^{-1}$.*

Ejercicio 5.5.8. *Obtenga en su forma binómica, el número complejo*

a) $z = \dfrac{3+i}{1-i}$.

Solución. Tal como en la obtención del inverso multiplicativo de un número complejo, intentamos eliminar el número complejo del denominador. Para tal efecto, multiplicamos z por $\frac{1+i}{1+i}$, obteniendo que

$$\begin{aligned} z &= \frac{3+i}{1-i} \\ &= \frac{3+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \\ &= \frac{2+4i}{2} \\ &= 1+2i. \end{aligned}$$

b) $z = \dfrac{a+bi}{c+di}$, *con* $c + di \neq 0$.

Solución. Multiplicamos z por $\frac{c-di}{c-di}$, obteniendo

$$\begin{aligned} z &= \frac{a+bi}{c+di} \\ &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i. \end{aligned}$$

□

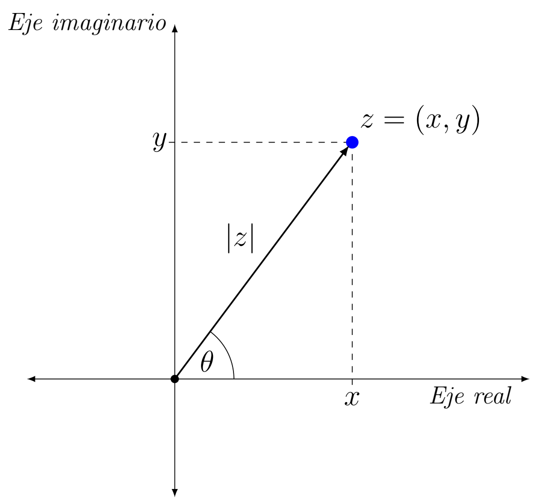
Observación 5.5.6. Sean $z = a+bi$ y $w = c+di$ dos números complejos, con $c+di \neq 0$. Para obtener el número complejo $\dfrac{z}{w}$, o sea

$$\frac{a+bi}{c+di} \tag{5.5.2}$$

en su forma binómica, multiplicamos y dividimos (5.5.2) por el conjugado del número complejo del denominador, es decir, por $c - di$. Acá también queda una diferencia de cuadrados en el denominador, lo cual nos facilita los cálculos para llegar a la expresión deseada.

5.6. Argumento de un número complejo.

Definición 5.6.1. *Sea $z = x + iy$ un número complejo. Consideremos el ángulo θ cuyo lado inicial es el semieje real positivo, y cuyo lado terminal es el vector determinado por z:*

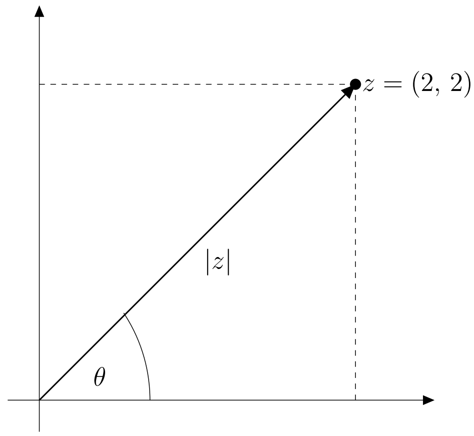


*La medida de θ, en radianes, con $0 \leq \theta < 2\pi$, se denomina **argumento** de z y se denota como*

$$\theta = arg(z).$$

Ejercicio 5.6.1. *Obtenga el módulo y el argumento de $z = 2 + 2i$.*

Solución. Graficamos z en el plano complejo, esto es, representándolo como $z = (2, 2)$:



Se tiene que

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Por otro lado, tomando en cuenta el triángulo rectángulo determinado por θ, obtenemos que

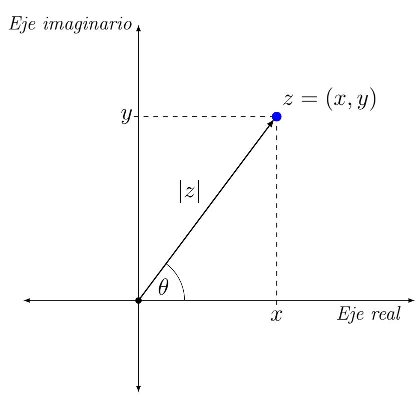
$$\tan\theta = \frac{2}{2} = 1.$$

Note que existen dos valores de θ, con $0 \leq \theta < 2\pi$, que satisfacen la última igualdad, a saber

$$\theta = \frac{\pi}{4} \;\vee\; \theta = \frac{5\pi}{4}.$$

Sin embargo, como vimos al comienzo, z pertenece al primer cuadrante, así también θ, por lo que $arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$. $\square$

Observación 5.6.1. En general, si $z = x + yi$ es un número complejo cualquiera,



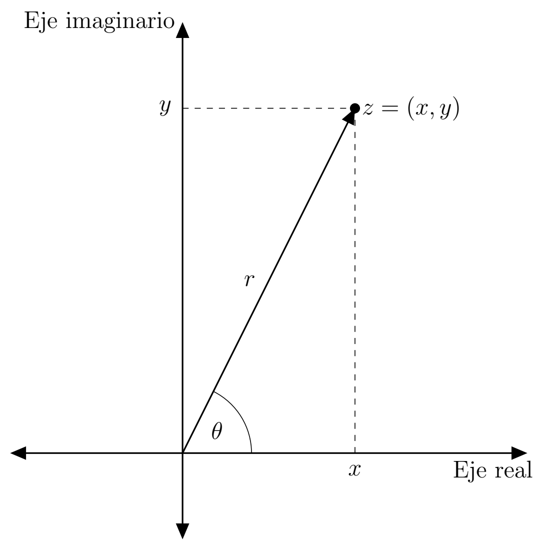
entonces $arg(z)$ es solución de la ecuación

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Sin embargo, al resolver esta ecuación para $0 \leq \theta < 2\pi$, en general obtenemos dos valores de θ. Para determinar cuál de estos valores corresponde a $arg(z)$, simplemente graficamos z y observamos a qué cuadrante pertenece.

5.7. Representación polar de un número complejo.

Sea $z = x + yi$ un número complejo ubicado en el primer cuadrante, cuyo módulo es $|z| = r$ y su argumento es θ:



Según vemos en la figura, se tiene que

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ \sin\theta = \frac{y}{r}. \tag{5.7.1}$$

O sea,

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta. \tag{5.7.2}$$

Las relaciones en (5.7.2), en realidad se cumplen para cualquier número complejo $z = x + yi$, cuyo módulo sea $|z| = r$ y su argumento sea θ. De este modo, z puede ser representado como

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta. \tag{5.7.3}$$

La escritura (5.7.3) es abreviada como

$$z = rcis\theta.$$

la cual se denomina **forma polar** del número complejo z.

Definición 5.7.1. *Sea z un número complejo. La **forma polar** de z, viene dada por*

$$z = rcis\theta,$$

donde r es el módulo y θ es el argumento de z.

Ejercicio 5.7.1. *¿Cuál es la forma polar de $z = 2 + 2i$?*

Solución. Según lo obtenido en el ejercicio anterior, $r = 2\sqrt{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$, por lo que la representación polar de z es

$$z = 2\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

□

Ejercicio 5.7.2. *Obtenga $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ en su forma polar.*

Solución. Note que

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Por otro lado,

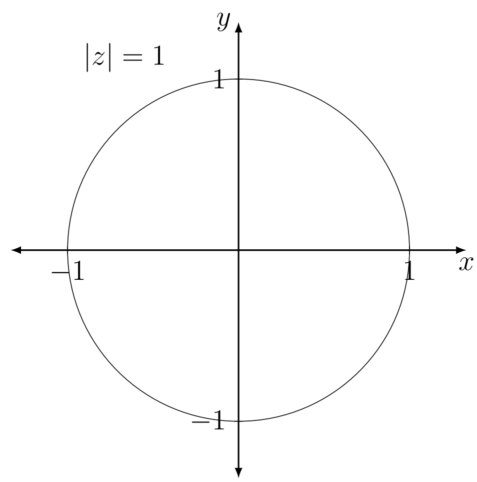
$$\tan\theta = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

En nuestro contexto, la ecuación tiene solución $\theta = \frac{2\pi}{3}$ o $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Como z pertenece al cuarto cuadrante, entonces $arg(z) = \frac{5\pi}{3}$, de donde

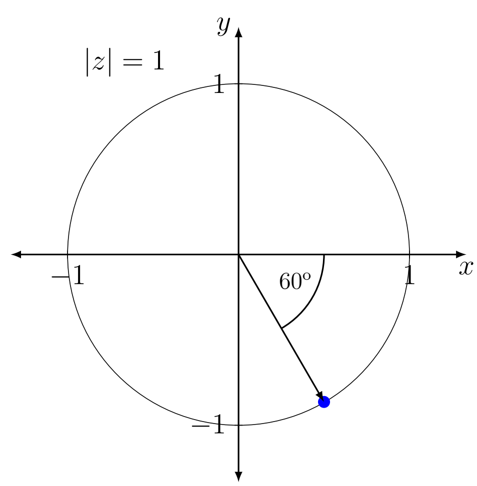
$$z = cis\left(\frac{5\pi}{3}\right).$$

□

Observación 5.7.1. Grafiquemos el número complejo del ejercicio anterior, $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, usando su forma polar. Como $|z| = 1$, trazamos la circunferencia de centro en $(0, 0)$ y radio 1:



Como $arg(z) = \frac{5\pi}{3}\ rad = 300°$, entonces, a partir de $(0, 0)$ trazamos un vector que forme un ángulo de $60°$, en sentido horario, con el eje real, obteniendo:



En general, podemos graficar cualquier número complejo z usando su forma polar, trazando una circunferencia de centro en el origen y radio $|z|$, y luego dibujando el ángulo $arg(z)$, de donde el punto z corresponde a la intersección de la circunferencia y el lado terminal del ángulo obtenido.

Ejercicio 5.7.3. *Represente* $z = 2cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *en su forma binómica.*

Solución. Note que

$$\begin{aligned} z = 2cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) &\Leftrightarrow z = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)i \\ &\Leftrightarrow z = 2 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ &\Leftrightarrow z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i. \end{aligned}$$

□

5.8. Representación de un número complejo en su forma exponencial.

Considere la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Multiplicando esta igualdad por r, obtenemos que

$$re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$

De este modo, el número complejo $z = rcis\theta$, es representado como $z = re^{i\theta}$, la cual se denomina **forma exponencial** de z.

Definición 5.8.1. *Sea z un número complejo de módulo r y argumento θ. La **forma exponencial** de z corresponde a*

$$z = re^{i\theta}.$$

Ejercicio 5.8.1. *Represente $z = i$ en su forma exponencial.*

Solución. Si graficamos z, notamos que $r = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, sin necesidad de hacer cálculos. De este modo,

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

□

Definición 5.8.2. *Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la **potencia** z^n, como la multiplicación de n factores iguales a z.*

Las propiedades de potencias de números reales con exponente natural, se mantienen si la base es un número complejo. De este modo, tenemos:

Proposición 5.8.3. *Sean z, w dos números complejos y n, m dos números naturales. Se tiene que*

a) $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$.

b) $\frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}, n > m, z \neq 0$.

c) $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$.

d) $z^n \cdot w^n = (z \cdot w)^n$.

e) $\frac{z^n}{w^n} = \left(\frac{z}{w}\right)^n, w \neq 0$.

Ejercicio 5.8.2. *Obtenga, en su forma binómica, el número complejo $(-3i)^4$.*

Solución. Usando la propiedad $d)$ de potencias de exponente natural, obtenemos que

$$(-3i)^4 = (-3)^4 \cdot i^4 = 81 \cdot i^2 \cdot i^2 = 81 \cdot -1 \cdot -1 = 81.$$

□

Observación 5.8.1. Note que

- $i^1 = i$.

- $i^2 = -1$.
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$.
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$.

Además, $i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1$. Se puede probar que al calcular las potencias de i en forma ordenada, los valores $i, -1, -i, 1$ se van repitiendo en forma ciclíca.

Ejercicio 5.8.3. *Obtenga el valor de i^{59}.*

Solución. Note que al dividir 59 entre 4, obtenemos resto 3. De este modo

$$i^{59} = i^3 = -i.$$

□

La siguiente proposición, nos permite calcular la potencia de un número complejo usando su forma exponencial.

Proposición 5.8.4. *Sea $z = re^{i\theta}$ un número complejo representado en su forma exponencial. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces la potencia z^n viene dada por*

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Observación 5.8.2. La definición anterior, nos plantea que z^n corresponde al número complejo cuyo módulo es r^n y cuyo argumento es un ángulo equivalente a $n\theta$.

Ejercicio 5.8.4. *Obtenga, en su forma binómica, $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$.*

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Usando la fórmula de cubo de binomio. En efecto,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+i\right)^3 &= (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 i + 3\sqrt{3}i^2 + i^3 \\ &= 3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} - i \\ &= 8i.\end{aligned}$$

- Usando la forma exponencial de $z = \sqrt{3} + i$. Note que $|z| = 2$. Por otro lado, $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Como z pertenece al primer cuadrante, entonces $\theta = \frac{\pi}{6}$. De este modo, $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Así,

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \\ &= 8e^{i\cdot\frac{3\pi}{6}} \\ &= 8e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Es decir, z^3 es un número complejo de módulo 8 y argumento $\frac{\pi}{2}$, por lo que gráficamente se puede apreciar que $z^3 = 8i$. Otra forma de obtener z^3 en su forma binómica, es notar que

$$\begin{aligned} z^3 &= 8e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} \\ &= 8cis\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i8\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 8i. \end{aligned}$$

□

5.9. Raíces cuadradas complejas de un número real negativo.

Definición 5.9.1. *Sea $z, w \in \mathbb{C}$. Se dice que w es una* ***raíz cuadrada compleja*** *de z, si $w^2 = z$.*

Observación 5.9.1. Se puede probar que las raíces cuadradas de un número complejo $z \neq 0$ son exactamente dos. En particular, nos interesa obtener las raíces cuadradas de un número real negativo cualquiera. ¿Cómo obtenerlas?

Ejercicio 5.9.1. *Obtenga las raíces complejas de*

a) $z = -25$.

Solución. Note que

$$(5i)^2 = 5^2 i^2 = -25$$

y

$$(-5i)^2 = (-5)^2 i^2 = -25,$$

por lo que las raíces cuadradas de -25 son $5i$ y $-5i$.

b) $z = -4$.

Solución. En virtud del ejercicio anterior, conjeturamos que las raíces cuadradas de -4 son $\pm 2i$. Veamos si es así. Se tiene que,

$$(2i)^2 = 2^2 i^2 = -4$$

y

$$(-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = -4.$$

c) $z = a$, *con* $a < 0$.

Solución. Note que como $a < 0$, entonces $-a > 0$. En virtud de los ejercicios anteriores, conjeturamos que las raíces cuadradas del número negativo a son

$$\sqrt{-a}i \text{ y } -\sqrt{-a}i.$$

Veamos si esto es así. Se tiene que

$$\left(\sqrt{-a}\ i\right)^2 = \left(\sqrt{-a}\right)^2 i^2 = (-a)i^2 = (-a)(-1) = a$$

y

$$\left(-\sqrt{-a}\ i\right)^2 = \left(-\sqrt{-a}\right)^2 i^2 = (-a)i^2 = (-a)(-1) = a.$$

□

Observación 5.9.2. Sea a un número real tal que $a < 0$. Las raíces cuadradas de a son $\sqrt{-a}i$ y $-\sqrt{-a}i$.

5.10. Ecuaciones cuadráticas de coeficientes reales cuyas soluciones son números complejos.

Resolvemos ecuaciones cuadráticas de coeficientes reales que no tienen solución en $\mathbb{R}$:

Ejercicio 5.10.1. *Obtenga las soluciones complejas de la ecuación cuadrática:*

a) $x^2 + 9 = 0$.

Solución. La ecuación es equivalente a

$$x^2 = -9. \tag{5.10.1}$$

De este modo, las soluciones son las raíces cuadradas de -9, es decir

$$x = \pm 3i.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{3i, -3i\}$.

b) $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Note que
$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = -5.$$
Completando cuadrado en la igualdad de la derecha, se deduce que
$$x^2 - 2x + 1 = -5 + 1,$$
o sea que
$$(x-1)^2 = -4$$
De este modo, extrayendo raíz cuadrada
$$x - 1 = \pm 2i,$$
por lo que las soluciones son
$$x = 1 \pm 2i.$$

- Usamos el hecho que las soluciones de una ecuación cuadrática de coeficientes reales, vienen dadas por
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
Para nuestra ecuación $a = 1, b = -2, c = 5$, por lo que sus soluciones tienen la forma
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}.$$
O sea,
$$x = \frac{2 \pm 4i}{2}.$$
Es decir, las soluciones son $1 \pm 2i$.

Con cualquiera de los métodos escogidos, tenemos que
$$S = \{1 + 2i, 1 - 2i\}.$$

c) $9x^2 - 12x + 5 = 0$.

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Multiplicamos nuestra ecuación por 9 y hacemos el cambio de variable $u = 9x$, obteniendo la ecuación cuadrática
$$u^2 - 12u + 45 = 0.$$
Restando 45 y luego completando cuadrado, se logra que
$$(u - 6)^2 = -9.$$
Extrayendo raíz cuadrada y despejando u, se obtiene que
$$u = 6 \pm 3i.$$
Retornando a la variable x, se tiene que
$$x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}i.$$

- Usando la fórmula
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
En este caso, $a = 9, b = -12, c = 5$. De este modo,
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{18},$$
por lo que
$$x = \frac{12 \pm 6i}{18}.$$
Así
$$x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}i.$$

Es decir,
$$S = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i \right\}$$
independiente del método escogido para obtener S.

d) $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Restando 1 y luego completando cuadrado, obtenemos
$$x^2 + x + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4},$$
de donde
$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{3}{4}.$$
Extrayendo raíz cuadrada, se deduce que
$$x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} i$$
De este modo,
$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

- Usando la fórmula
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
con $a = 1, b = 1, c = 1$, obtenemos que
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$
De este modo,
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Con cualquiera de los métodos escogidos,
$$S = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

□

5.11. Raíces enésimas de un número complejo.

Definición 5.11.1. *Sea $z, w \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se dice que w es una **raíz n-ésima** de z si*
$$w^n = z.$$

Observación 5.11.1. Sea z un número complejo y n un número natural. Se puede probar que las raíces n-ésimas de z son exactamente n.

Ejercicio 5.11.1. *Sea el número complejo $z = -8$, cuya forma exponencial corresponde a*
$$z = 8e^{i\pi}.$$
Considere el número complejo $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Obtenga w^3. En base a lo obtenido, ¿qué relación tiene w con z?

Solución. Se tiene que
$$w^3 = 2^3 e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3} = 8e^{i\pi} = z.$$
De este modo, w es una raíz cúbica de z. Note que el módulo de w es la raíz cúbica del módulo de z, y que el argumento de w es la tercera parte del argumento de z.

Ejercicio 5.11.2. *Sea z un número complejo de módulo r y argumento θ. Consideramos el número complejo $w = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}$. Obtenga w^n. En base a lo obtenido, ¿que relación existe entre w y z?*

Solución. Note que

$$w^n = \left(\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}\right)^n = (\sqrt[n]{r})^n \left(e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}\right)^n = re^{i\theta} = z.$$

De este modo, w es una raíz enésima de z. □

Observación 5.11.2. Dado un número complejo $z = re^{i\theta}$, una raíz enésima de z corresponde al número complejo

$$w = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)},$$

el cual es un número complejo cuyo módulo es la raíz enésima del módulo de z, y cuyo argumento es la n-ésima parte del argumento de z.

Ejercicio 5.11.3. *Nuevamente consideremos el número complejo $z = -8$, cuya representación exponencial es*

$$z = 8e^{i\pi}.$$

Vimos que una raíz cúbica de z corresponde a $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Demuestre que los números complejos

$$w_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)}$$

y

$$w_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)}$$

también son raíces cúbicas de z.

Solución. Lo hacemos en dos etapas:

- Probemos primero esto para w_1. Se tiene que

  $$w_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi+2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\pi},$$

  por lo que

  $$(w_1)^3 = (2e^{i\pi})^3 = 2^3e^{i3\pi} = 8e^{i\pi} = z.$$

- Veamos qué ocurre con w_2. Se tiene que

$$w_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi+4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)},$$

de modo que

$$(w_2)^3 = \left(2e^{\frac{5\pi}{3}}\right)^3 = 2^3 e^{i5\pi} = 8e^{i\pi} = z.$$

$\square$

Observación 5.11.3. Sea $z = re^{i\theta}$ un número complejo. Se tiene que z tiene exactamente n raíces enésimas, las cuales vienen dadas por

$$\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}, \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)}, \ldots, \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)}.$$

Es decir, tienen la forma

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Teorema 5.11.2. *Sea $z = re^{i\theta}$ es un número complejo. Las raíces enésimas de z, vienen dadas por*

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ejercicio 5.11.4. *Lea y responda.*

a) *Determine las raíces cúbicas de $z = i$, y expréselas en su forma binómica.*

Solución. En este caso, $r = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. De este modo,

$$z = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

por lo que sus raíces cúbicas son

$$w_0 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)}, w_1 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)}, w_2 = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)}.$$

Es decir,

$$w_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}, w_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, w_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

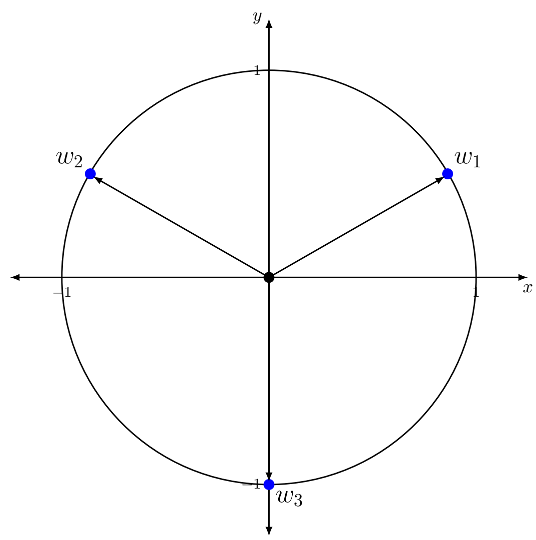
Note que

- $w_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, por lo que $w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
- $w_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ por lo que $w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
- $w_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ por lo que $w_3 = -i$.

□

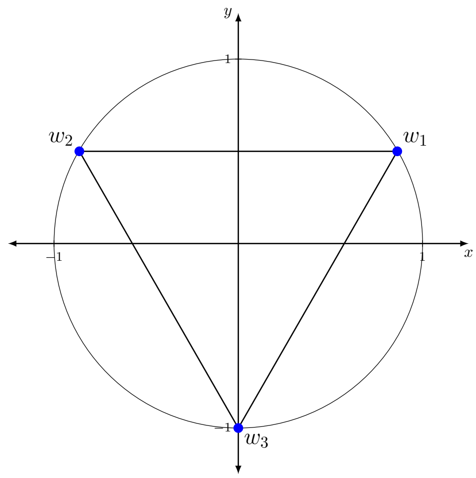
b) *Gráfique las raíces obtenidas en el plano complejo.*

Solución. De la representación exponencial de las raíces cúbicas, vemos que las tres tienen módulo 1, y que sus argumentos son $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$ respectivamente. Para graficarlas, dibujamos una circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio 1, y trazamos rayos según los argumentos mencionados, obteniendo:

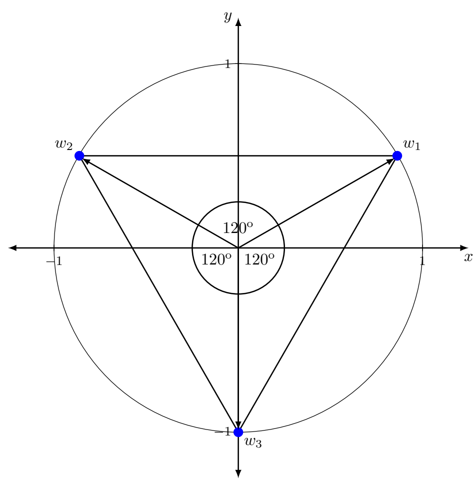


c) *Demuestre que el triángulo cuyos vértices son tales raíces es equilátero.*

Solución. El triángulo mencionado es



Dado el argumento de las raíces, se tiene que cada lado del triángulo abarca un ángulo del centro de medida 120°:



De este modo, los lados del triángulo son congruentes entre sí, y en consecuencia el triángulo es equilátero. □

Ejercicio 5.11.5. *Obtenga las raíces cuartas de $z = 16$, grafíquelas y demuestre que el polígono que determinan tales raíces es un cuadrado.*

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: Note que $|z| = 16$ y $\theta = 0$. De este modo,

$$z = 16e^{i0}.$$

Sus raíces cuartas son

$$w_0 = 2e^{\frac{0}{4}i}, w_1 = 2e^{\frac{0+2\pi}{4}i}, w_2 = 2e^{\frac{0+4\pi}{4}i}, w_3 = 2e^{\frac{0+6\pi}{4}i}.$$

O sea

$$w_0 = 2e^{0i}, w_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}, w_2 = 2e^{\pi i}, w_3 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

En definitiva, sus raíces son

- $w_1 = 2e^{0i} = 2$ (raíz real).
- $w_2 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$.
- $w_3 = 2e^{\pi i} = -2$ (raíz real).
- $w_4 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = -2i$.

▪ Segunda forma: Las raíces buscadas satisfacen la ecuación $z^4 = 16$. Esta ecuación es equivalente a $z^4 - 16 = 0$. Se tiene que

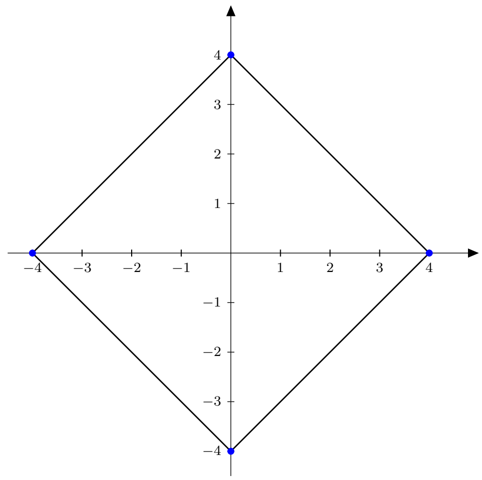
$$z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow z^2 = 4 \ \vee \ z^2 = -4.$$

Note que

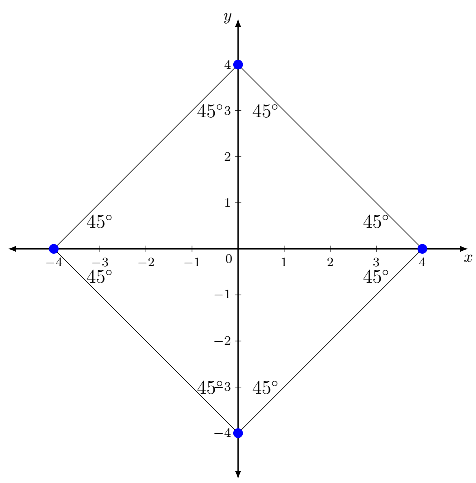
- $z^2 = 4$ se cumple si, y sólo si, $z = 2$ o $z = -2$.
- $z^2 = -4$ se cumple si, y sólo si, $z = 2i$ o $z = -2i$.

En definitiva, las raíces cuartas de 16 son $2, -2, 2i, -2i$.

Si las graficamos y formamos el polígono cuyos vértices son estas raíces, obtenemos:



Observemos que cada lado de este cuadrilátero es la hipotenusa del triángulo rectángulo que determina con los ejes coordenados. Estos 4 triángulos rectángulos son congruentes entre sí, por lo que sus hipotenusas miden lo mismo, y en consecuencia, los 4 lados del cuadrilátero miden lo mismo. Además cada uno de estos triángulos es isosceles, por lo que sus ángulos agudos miden 45°:



De este modo, todos los ángulos del cuadrilátero miden 90°. Por lo tanto, el cuadrilátero es un cuadrado. □

Observación 5.11.4. En general, al graficarlas en el plano complejo, las n raíces enésimas de un número complejo z, determinan un polígono regular de n lados. Es decir, determinan un polígono cuyos lados miden lo mismo y cuyos ángulos interiores también miden lo mismo.

Ejercicio 5.11.6. *Obtenga el perímetro del hexágono regular que determinan las raíces sextas de i.*

Solución. Observemos que $|z| = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, por lo que

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

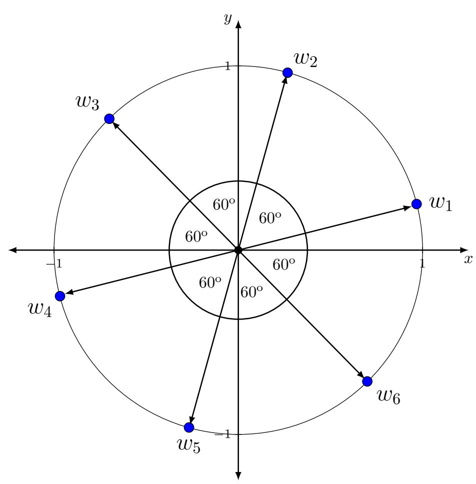
Sus raíces sextas tienen la forma

$$w_k = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

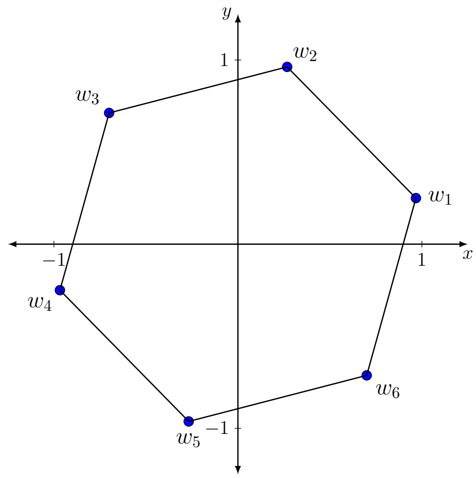
O sea, tienen la forma

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right)}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \tag{5.11.1}$$

De este modo, $w_0 = e^{i\frac{\pi}{12}}$, por lo que su argumento es 15°. Note que el término $k\frac{\pi}{3}$ en (5.11.1), hace que el argumento entre una raíz sexta y otra varíe de 60° en 60°. Tomando en cuenta eso, graficamos las raíces sextas de i, no sin antes trazar la circunferencia unitaria (dado que el módulo de cada raíz es 1):



De este modo, el hexágono regular determinado por las raíces es



El héxagono dado se puede dividir en 6 triángulos equiláteros, cuyo vértice común es $(0,0)$. Note además, que cada lado de cada uno de estos triángulos mide 1 (dado que el módulo de las raíces es 1). En particular, cada lado del hexágono mide 1 unidad, y por ende su perímetro es de 6 unidades. $\square$

5.12. Ejercicios propuestos.

1. Exprese cada número complejo siguiente como par ordenado, en su forma polar y en su forma exponencial.

   a) $z = 1 + i$
   b) $z = 1 - i$
   c) $z = 2i$
   d) $z = -\frac{1}{4}i$
   e) $z = -3$
   f) $z = 3 - \sqrt{3}i$
   g) $z = -\sqrt{3} + 3i$
   h) $z = -\sqrt{3} - i$

2. Grafique cada número complejo dado y expréselo en su forma binomial.

   a) $z = 2cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$
   b) $z = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
   c) $z = cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
   d) $z = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$
   e) $z = \frac{1}{2}e^{\frac{13\pi}{6}i}$

3. Obtenga

   a) $(2+3i)+(5-3i)$
   b) $(3+i)i+(1+i)$
   c) $(2-4i)(2+4i)$
   d) $(1-3i)\left(\dfrac{1}{2}+i\right)$
   e) $\dfrac{1}{2-i}$
   f) $\dfrac{(1-i)^2}{i}$
   g) $\dfrac{3-2i}{3+2i}$
   h) $\dfrac{1-i}{2+i}$

4. Demuestre que para todo par de números complejos:

   a) el conjugado de la suma es la suma de sus conjugados.
   b) el conjugado del producto es el producto de sus conjugados.

5. Demuestre que un número complejo y su conjugado tiene el mismo módulo.

6. Considere los números complejos $z=-1+\sqrt{3}i$ y $w=-\sqrt{3}-i$.

   a) Determine $z\cdot w$.
   b) Exprese z, w y $z\cdot w$ en forma polar ¿Qué relación existe entre sus módulos? ¿Qué relación existe entre sus argumentos?

7. Demuestre que si z y w son números complejos cualquiera, entonces

$$|z\cdot w|=|z|\cdot|w|,\ arg(z\cdot w)=arg(z)+arg(w).$$

8. Sea $z=2cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ y $w=3cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

   a) Con z y w en su forma polar, obtenga $z\cdot w$ en su forma polar (use lo demostrado en el ejercicio anterior) y luego en su forma binomial.
   b) Exprese z y w en su forma binomial y obtenga $z\cdot w$ en su forma binomial.
   c) Compruebe que los números complejos obtenidos en a) y b) son iguales.

9. Sea $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

   a) Obtenga z^3, Usando la fórmula del cubo del binomio.

   b) Obtenga z^3,usando z en su forma exponencial.

   c) Compruebe que los números complejos obtenidos en a) y en b) son iguales.

10. Grafique en el plano complejo, el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ tal que

   a) $Im(z) = 0$

   b) $Im(z) = 2Re(z)$

   c) $|z| = 4$

   d) $|z|^2 = 2Re(z)$

   e) $arg(z) = \pi$

   f) $arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$

   g) $z = \overline{z}$

   h) $-1 \leq Im(z) \leq 1$

   i) $Re(z) \leq 4$

11. Obtenga las soluciones de cada ecuación cuadrática, dada:

   11.1) Despejando x, mediante completación de cuadrado si es necesario.

   11.2) Usando la fórmula de las soluciones de una ecuación cuadrática.

   a) $x^2 + 9 = 0$

   b) $x^2 = -32$

   c) $x^2 + a^2 = 0$, con a constante real

   d) $x^2 + 2x + 10 = 0$

   e) $x^2 - 4x + 29 = 0$

   f) $x^2 - 6x + 10 = 0$

   g) $4x^2 - 4x + 5 = 0$

   h) $x^2 + x + 1 = 0$

   i) $x^2 + x = -2$

   j) $2x(x + 1) = -5$

12. Obtenga una ecuación cuadrática de coeficientes reales

   a) cuyas soluciones sean $1 + 3i$ y $1 - 3i$.

   b) cuyas soluciones sean $2 - i$ y $2 + i$.

   c) cuyas soluciones sean $a + bi$ y $a - bi$.

13. Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

14. Lea y resuelva

    a) Obtenga las raíces cúbicas de $z = -i$.

    b) Grafíquelas y obtenga el triángulo equilátero determinado por tales raíces. Determine el perímetro y el área de este triángulo.

15. Lea y resuelva

    a) Obtenga las raíces cuartas de $z = -16$

    b) Grafíquelas y obtenga el cuadrado determinado por tales raíces. Calcule el perímetro de este cuadrado.

16. Lea y resuelva

    a) Obtenga las raíces sextas de $z = 1$.

    b) Grafíquelas y obtenga el hexágono determinado por ellas. Demuestre que el área de tal hexágono es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades cuadradas.

17. Si $z = rcis\ \theta$ es un número complejo cualquiera, obtenga $\overline{z}$ en su forma polar.

18. Demuestre que para todo par de números complejos z y w, con $w \neq 0$, el módulo de $\dfrac{z}{w}$ es $\dfrac{|z|}{|w|}$.

19. Demuestre, usando el principio de inducción matemática que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \overline{z^n} = (\overline{z})^n.$$

Capítulo 6

Polinomios.

6.1. Introducción.

Un polinomio de la variable x es una expresión algebraica que corresponde a una suma de potencias de x, donde cada potencia está multiplicada por un número real conocido. Un ejemplo de polinomio es

$$p(x) = 5x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 9x + 2,$$

el cual es de grado 4. En este capítulo, estudiaremos cómo obtener las llamadas raíces de un polinomio, que corresponden a los valores de x que al ser sustituidos en el polinomio, nos da como resultado 0. Obtenidas las raíces de un polinomio, podemos luego factorizarlo. Por ejemplo, las raíces reales del polinomio recién mencionado son 2 y $\frac{1}{4}$ y su factorización, en el contexto de polinomios de coeficientes reales, es

$$p(x) = 5(x-2)\left(x - \frac{1}{4}\right)(x^2+1).$$

Además, del factor $x^2 + 1$ podemos obtener dos raíces más, las cuales son números complejos, y corresponden a i y $-i$. De este modo, su factorización, en el contexto de polinomios de coeficientes complejos, es

$$p(x) = 4(x-2)\left(x - \frac{1}{4}\right)(x-i)(x+i).$$

Además, estudiaremos algunas aplicaciones de los polinomios a otros contextos. Por ejemplo, el polinomio

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100,$$

donde t representa el tiempo, nos otorga el número de venados que permanecen vivos en una selva, luego de t meses de estar insertos en la selva. Encontrando sus raíces podremos determinar en qué período los venados se extinguirán.

6.2. Concepto de polinomio.

Algunos ejemplos de polinomios son:

- $p(x) = x + 3$
- $q(x) = x^2 - 6x - 7$
- $r(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$
- $q(x) = 4x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 9x + 2$
- $s(x) = 5$

Informalmente, un polinomio en la variable x es una suma de potencias de x de exponente natural o cero, donde cada potencia está multiplicada por un número real, denominado coeficiente de la potencia respectiva. En un polinomio, usualmente las potencias de la variable x están ordenadas en forma decreciente, de izquierda a derecha. Veamos la definición formal:

Definición 6.2.1. *Un **polinomio** de grado n, de la variable x sobre $\mathbb{R}$, el cual denotamos por $p(x)$, corresponde a toda expresión de la forma*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{6.2.1}$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$ cuando $n > 0$.

Observación 6.2.1. Se tiene que

- Los escalares $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se llaman **coeficientes** de $p(x)$. Es decir, los coeficientes de $p(x)$ son los números que multiplican a cada potencia de x presente en el polinomio.

- El número n se llama **grado** del polinomio $p(x)$ y se escribe $gr(p) = n$. Informalmente, el grado de $p(x)$ corresponde al exponente de la mayor potencia de x presente en él. Más formalmente, el grado es el exponente de la mayor potencia de x para la cual su coeficiente en $p(x)$ no es 0. Note que, en la definición, se tiene que $a_n \neq 0$, de lo contrario $p(x)$ tendría grado menor a n.

Definición 6.2.2. *Todo polinomio de la forma $p(x) = a_0$ se llama **polinomio constante**. Si $p(x) = 0$, entonces $p(x)$ se llama **polinomio nulo**.*

Ejercicio 6.2.1. *Determine el grado y los coeficientes de:*

a) $q(x) = x^2 - 6x + 5$.

Solución. Este polinomio es de grado 2, lo que denotamos como $gr(q) = 2$. Sus coeficientes son $1, -6$ y 5, en orden decreciente con respecto a las potencias de x.

a) $p(x) = x + 2$.

Solución. En este caso, $gr(p) = 1$. Por otro lado, los coeficientes de $p(x)$ son 1 y 2, en orden decreciente con respecto a las potencias de x.

c) $r(x) = x^4 - x$.

Solución. En este caso, $gr(r) = 4$ y sus coeficientes son $1, 0, 0, -1$, en orden decreciente con respecto a las potencias de x (las potencias x^3 y x^2 no aparecen en el polinomio, por lo que el coeficiente de cada una de ellas es 0). □

Observación 6.2.2.

- Observemos que, si $p(x) = 5$, entonces $p(x)$ puede ser escrito como $p(x) = 5x^0$. De este modo, decimos que $gr(p) = 0$. En general, si $p(x)$ es un polinomio constante no nulo $p(x) = a_0$, con $a_0 \neq 0$, entonces como $p(x) = a_0 x^0$, deducimos que $gr(p) = 0$.

- Consideremos el polinomio nulo $p(x) = 0$. Dado que el grado de un polinomio es el exponente de la mayor potencia de x cuyo coeficiente no es 0, entonces convenimos que $p(x)$ no tiene grado, dado que ninguno de sus coeficientes es distinto de cero.

Observación 6.2.3. El conjunto de todos los polinomios reales en x con coeficientes en $\mathbb{R}$ se denota por $\mathbb{R}[x]$.

Observación 6.2.4. Todo polinomio $p(x)$ determina una función

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto p(x), \end{aligned}$$

la cual llamamos **función polinomial** p.

6.3. Suma de polinomios.

Informalmente, para sumar dos polinomios, sumamos los términos semejantes de ambos polinomios, es decir, sumamos los términos que contengan potencias del mismo exponente.

Ejercicio 6.3.1. *Obtenga el polinomio* $(p+q)(x)$*, si*

a) $p(x) = x^4 - x^2 - 6x + 2$ *y* $q(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$.

Solución. En este caso

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= p(x) + q(x) \\ &= (x^4 - x^2 - 6x + 2) + (x^3 + 3x^2 - x + 1) \\ &= x^4 + x^3 + 2x^2 - 7x + 3. \end{aligned}$$

b) $p(x) = 2x^3 - 6x + 2$ *y* $q(x) = -2x^3 + 5x^2 - 1$.

Solución. En este caso

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x)\\ &= (2x^3 - 6x + 2) + (-2x^3 + 5x^2 - 1)\\ &= 5x^2 - 6x + 1.\end{aligned}$$

c) $p(x) = x^3 - 3x + 2$ *y* $q(x) = -3x^3 + 2x - 1$.

Solución. Se tiene que

$$(p+q)(x) = -2x^3 - x + 1.$$

d) $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *y* $q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

Solución. En este caso

$$(p+q)(x) = b_3x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

$\square$

Ejercicio 6.3.2. *En base a lo obtenido en el último ejercicio, conjeture: ¿Qué relación existe entre* $gr(p)$, $gr(q)$ *y* $gr(p+q)$*?*

Solución. Observamos que

- en $a)$, $gr(p) = 4$, $gr(q) = 3$ y $gr(p+q) = 4$.
- en $b)$, $gr(p) = 3$, $gr(q) = 3$ y $gr(p+q) = 2$.
- en $c)$, $gr(p) = 3$, $gr(q) = 3$ y $gr(p+q) = 3$.
- en $d)$, $gr(p) = 2$, $gr(q) = 3$ y $gr(p+q) = 3$.

Observamos que el grado de la suma $p+q$ no supera al mayor valor entre el grado de p y el grado de q. De este modo, conjeturamos que

$$grad(p+q) \leq \max\{grad(p), grad(q)\}.$$

$\square$

Definición 6.3.1. *Sean* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *y* $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ *dos polinomios de* $\mathbb{R}[x]$.
Se llama ***suma*** *de* $p(x)$ *y* $q(x)$, *al polinomio* $(p+q)(x)$ *de* $\mathbb{R}[x]$ *definido por*

$$(p+q)(x) = (a_r + b_r)x^r + \ldots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

donde

$$r = grad(p+q) \leq \max\{grad(p), grad(q)\}.$$

6.4. Producto de polinomios.

Informalmente, para multiplicar dos polinomios, los multiplicamos término a término y luego reducimos términos semejantes.

Ejercicio 6.4.1. *Obtenga el polinomio* $(p \cdot q)(x)$ *si:*

a) $p(x) = x^4 - 2x$ *y* $q(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

   Solución. Multiplicando término a término, obtenemos que

   $$(p \cdot q)(x) = (x^4 - 2x)(x^3 + 2x^2 - x + 1) = x^7 + 2x^6 - x^5 + x^4 - 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x.$$

   O sea,

   $$(p \cdot q)(x) = x^7 + 2x^6 - x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x.$$

b) $p(x) = 2x^3 - 6x + 2$ *y* $q(x) = -2x^2 + 5x$.

   Solución. Se tiene que

   $$(p \cdot q)(x) = (2x^3 - 6x + 2)(-2x^2 + 5x) = -4x^5 + 10x^4 + 12x^3 - 34x^2 + 10x.$$

c) $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}(p \cdot q)(x) &= (a_2x^2 + a_1x + a_0)(b_2x^2 + b_1x + b_0)\\ &= a_2b_2x^4 + a_2b_1x^3 + a_2b_0x^2 + a_1b_2x^3 + a_1b_1x^2 + a_1b_0x + a_0b_2x^2 + a_0b_1x + a_0b_0\\ &= a_2b_2x^4 + (a_2b_1 + a_1b_2)x^3 + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + a_0b_0.\end{aligned}$$

Observamos que, por ejemplo, el coeficiente de x^3 es $a_2b_1 + a_1b_2$, donde los subíndices en cada término suman 3. En general, el coeficiente de cada potencia x^r, cumple que los subíndices en cada uno de sus términos suman r, para $r = 0, 1, 2, 3$.

□

Ejercicio 6.4.2. *En base a lo obtenido en el ejercicio anterior, conjeture: ¿qué relación existe entre $gr(p)$, $gr(q)$ y $gr(p \cdot q)$?*

Solución. Note que

- En a), $gr(p) = 4, gr(q) = 3$ y $gr(p \cdot q) = 7$.
- En b), $gr(p) = 3, gr(q) = 2$ y $gr(p \cdot q) = 5$.
- En c), $gr(p) = 2, gr(q) = 2$ y $gr(p \cdot q) = 4$.

De este modo, nuestra conjetura es

$$gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q).$$

□

Definición 6.4.1. *Sean $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ dos elementos de $\mathbb{R}[x]$.*
Se llama ***producto*** *de $p(x)$ y $q(x)$ al polinomio $(p \cdot q)(x)$ de $\mathbb{R}[x]$ definido por*

$$(p \cdot q)(x) = (a_tb_0 + \ldots + a_0b_t)x^t + \ldots + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2$$
$$+(a_1b_0 + a_0b_1)x + a_0b_0,$$

donde

$$t = gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q).$$

6.5. División de polinomios en $\mathbb{R}[x]$.

Recordemos la división entre números naturales. Por ejemplo, si efectuamos la división $125 \div 6$, obtenemos que el cuociente es 20 y el resto es 5. Esto quiere decir que

$$125 = 20 \cdot 6 + 5.$$

En general, al dividir dos números positivos, en la forma

$$dividendo \div divisor,$$

obtenemos que

$$dividendo = divisor \cdot cuociente + resto,$$

donde el resto es siempre menor que el divisor.

Esta idea se traspasa para dividir dos polinomios. En efecto, si $p(x)$ y $s(x)$ son dos polinomios en $\mathbb{R}[x]$, con $s(x) \neq 0$, efectuar la división $p(x) \div s(x)$, consiste en encontrar un polinomio $q(x)$ y otro $r(x)$, de modo que

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x),$$

donde $q(x)$ recibe el nombre de **cuociente** y $r(x)$ recibe el nombre de **resto**. Cuando $r(x) \neq 0$, entonces su grado debe ser menor que el grado del divisor $s(x)$, es decir, $gr(r) < gr(s)$.

¿Cómo dividir dos polinomios? en otras palabras, ¿cómo obtener su cuociente y resto? Veamos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6.5.1. *Obtenga el cuociente y el resto de dividir* $p(x) = 5x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x$ *entre* $s(x) = x^2 + 1$.

Solución. El primer término del cuociente, corresponde a la división de la mayor potencia de x en $p(x)$ entre la mayor potencia de x en $s(x)$. Es decir, corresponde a la división $\frac{5x^4}{x^2}$, lo cual nos da $5x^2$. De este modo,

$$\begin{array}{l}
(5x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x) \div (x^2 + 1) = 5x^2 \\
\underline{-(5x^4 \qquad\quad + 5x^2)\quad} \\
\qquad\qquad 4x^3 - 6x^2 + 6x
\end{array}$$

donde $5x^4 + 5x^2$ corresponde al producto de $5x^2$ con el divisor $x^2 + 1$ y la última línea viene a ser la diferencia entre los dos polinomios de las líneas superiores.

Para obtener el segundo término del cuociente, repetimos el paso anterior; ahora tomando como dividendo al polinomio $4x^3 - 6x^2 + 6x$ y divisor siempre $x^2 + 1$. De este modo, el segundo término del cuociente es $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$ y el desarrollo queda como

$$\begin{array}{l}
(5x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x) \div (x^2 + 1) = 5x^2 + 4x \\
\underline{-(5x^4 \quad + 5x^2)\qquad} \\
\qquad\quad 4x^3 - 6x^2 + 6x \\
\underline{- \qquad (4x^3 \qquad\quad + 4x)} \\
\qquad\qquad\quad - 6x^2 + 2x
\end{array}$$

Donde $4x^3 + 4x$ corresponde al producto entre $4x$ y $x^2 + 1$ y la última línea es la diferencia entre los polinomios de las dos líneas anteriores. Note que el polinomio restante es $-6x^2 + 4x$, cuyo grado es 2, el cual coincide con el grado del divisor $x^2 + 1$. De este modo, debemos realizar una vez más el paso mencionado, para que el grado del resto sea menor que el grado del divisor $x^2 + 1$ (es decir, se debe cumplir que $gr(r) < 2$). De este modo, tomando como dividendo $-6x^2 + 4x$ y como divisor siempre $x^2 + 1$, obtenemos que el tercer término del cuociente es $\frac{-6x^2}{x^2} = -6$. El resto lo obtenemos de forma análoga a cómo se obtuvo en los pasos anteriores. Así, nuestro proceso de división queda como

$$
\begin{array}{l}
(5x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x \quad\ ) \div (x^2+1) = 5x^2 + 4x \\
\underline{-(5x^4 \qquad\ + 5x^2) \quad} \\
\qquad\ 4x^3 - 6x^2 + 6x \\
\underline{- \quad\ (4x^3 \qquad\ + 4x)} \\
\qquad\qquad\ - 6x^2 + 2x \\
\underline{\qquad\quad - (-6x^2 \qquad - 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2x + 6
\end{array}
$$

Por lo tanto, $q(x) = 5x^2+4x-6$ y $r(x) = 2x+6$. Esto puede ser comprobado, mostrando que

$$5x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x = (x^2+1)(5x^2+4x-6) + (2x+6).$$

$\square$

Teorema 6.5.1. *Sean $p(x)$ y $s(x)$ dos polinomios en $\mathbb{R}[x]$, con $s(x) \neq 0$. Entonces, existen dos polinomios $q(x), r(x)$ en $\mathbb{R}[x]$, únicamente determinados, tales que:*

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ se llaman ***cuociente*** *y* ***resto****, respectivamente, de dividir $p(x)$ por $s(x)$. Si $r(x) \neq 0$, entonces $gr(r) < gr(s)$.*

Ejercicio 6.5.2. *Considere los polinomios* $p(x) = x^4 - 3x^3 - 4x + 4$ *y* $s(x) = x - 1$ *.*

a) *Divida* $p(x)$ *entre* $s(x)$*, indicando el cuociente* $q(x)$ *y el resto* $r(x)$*.*

Solución. El proceso de división es

$$\begin{array}{rl}
(x^4 - 3x^3 \qquad - 4x + 4) & \div (x-1) = x^3 - 2x^2 - 2x - 6 \\
6x - 6 & \\ \hline
-\,2x^3 \qquad - 4x + 4 & \\
6x - 6 & \\ \hline
-\,2x^2 - 4x + 4 & \\
6x - 6 & \\ \hline
-\,6x + 4 & \\
6x - 6 & \\ \hline
-\,2 &
\end{array}$$

(Note que en cada paso, el polinomio que se resta aparece equivalentemente con signo cambiado). De este modo, $q(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 6$ y $r(x) = -2$.

b) *¿Qué tipo de polinomio es* $r(x)$*?*

Solución. Es un polinomio constante.

c) *Usando lo obtenido en a), exprese* $p(x)$ *como* $p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x)$*.*

Solución. Se tiene que

$$p(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - 2x - 6) - 2. \tag{6.5.1}$$

d) *¿Qué relación existe entre el resto obtenido y* $p(1)$*?*

Solución. Para obtener $p(1)$ podemos reemplazar $x = 1$ directamente en $p(x) = x^4 - 3x^3 - 4x + 4$. Sin embargo, es más interesante de observar que si reemplazamos $x = 1$ en (6.5.1), obtenemos que

$$p(1) = 0 - 2 = -2.$$

De este modo, $p(1)$ coincide con el resto obtenido. □

Observación 6.5.1. En general, al dividir un polinomio $p(x)$, de grado n, por un polinomio $x-c$, se obtiene como cuociente un polinomio $q(x)$ de grado $n-1$ y como resto un polinomio constante $r(x)=r_0$. De este modo

$$p(x) = q(x)(x-c) + r_0. \tag{6.5.2}$$

Si reemplazamos $x=c$ en (6.5.2), obtenemos que

$$p(c) = q(c)(c-c) + r_0,$$

por lo que

$$p(c) = r_0.$$

Es decir, al reemplazar $x=c$ en $p(x)$, el valor obtenido corresponde al resto r_0.

6.6. Método de Ruffini o división sintética.

Este método nos entrega una forma para dividir un polinomio $p(x)$ de grado arbitrario por otro de la forma $x-c$. Veamos cómo funciona:

Ejercicio 6.6.1. *Considere los polinomios* $p(x)=x^4+x^3+6x^2-x-30$ *y* $s(x)=x+2$.

a) *Usando división sintética, divida* $p(x)$ *entre* $s(x)$*, indicando el cuociente* $q(x)$ *y el resto* $r(x)$*.*

Solución. Colocamos los coeficientes de $p(x)$ en una fila. En otra fila, bajo la anterior, colocamos $c=-2$ y trazamos líneas tal como lo indica la figura:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 6 & -1 & -30 \\ -2 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Bajamos el primer coeficiente de $p(x)$ de izquierda a derecha, es decir 1, a la tercera fila, la cual está bajo la línea divisoria. Luego, lo multiplicamos por $c = -2$, colocando el resultado -2 en la tercera columna, bajo el 1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 6 & -1 & -30 \\ -2 & & -2 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Sumamos los números obtenidos en la tercera columna, obteniendo -1. Colocamos el -1 en la tercera fila de esta columna:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 6 & -1 & -30 \\ -2 & & -2 & & & \\ \hline & 1 & -1 & & & \end{array}$$

Aquí termina el primer paso.

Veamos el segundo paso. Consideramos el elemento recién obtenido de la tercera fila, es decir -1, y tal como en el primer paso, lo multiplicamos por $c = -2$. El resultado, el cual es 2, lo colocamos en la cuarta columna, bajo el 6, y sumamos hacia abajo, obteniendo 8, el cual se coloca en la tercera fila:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 6 & -1 & -30 \\ -2 & & -2 & 2 & & \\ \hline & 1 & -1 & 8 & & \end{array}$$

Aquí termina el segundo paso.

En el tercer paso y en los pasos venideros, se procede de forma similar a los dos primeros pasos. Es decir, volvemos a multiplicar el término resultante de la tercera fila (en este caso 8) por $c = -2$. colocamos el resultado en la siguiente columna, bajo el coeficiente respectivo, y luego sumamos hacia abajo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 6 & -1 & -30 \\ -2 & & -2 & 2 & -16 & \\ \hline & 1 & -1 & 8 & -17 & \end{array}$$

Hacemos por última vez el paso mencionado, rellenando la tabla:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 6 & -1 & -30 \\ -2 & & -2 & 2 & -16 & 34 \\ \hline & 1 & -1 & 8 & -17 & 4 \end{array}$$

La tercera fila nos indica el cuociente y el resto de la división. De izquierda a derecha, el cuociente, el cual es de grado 3, tiene coeficientes $1, -1, 8, -17$, o sea es $q(x) = x^3 - x^2 + 8x - 17$. El número sobrante 4, corresponde al resto, o sea $r(x) = 4$.

b) *En lo base a lo realizado en a), obtenga $p(-2)$.*

Solución. Según lo obtenido en a) y por la última observación, tenemos que $p(-2) = 4$. $\square$

6.7. Raíces de un polinomio.

Definición 6.7.1. *Sea $p(x)$ un polinomio en $\mathbb{R}[x]$. Se dice que $x = c$ es una* ***raíz*** *de $p(x)$ si $p(c) = 0$.*

Observación 6.7.1. Es decir, $x = c$ es una raíz de $p(x)$, si al reemplazar este valor en el polinomio dado, obtenemos como resultado 0 (o equivalentemente si $x = c$ es solución de la ecuación $p(x) = 0$). Es interesante investigar cómo obtener todas las raíces de un polinomio $p(x)$.

Ejercicio 6.7.1. *Considere los polinomios* $p(x) = x^3 + x - 2$ *y* $s(x) = x - 1$.

a) *Usando división sintética, divida* $p(x)$ *entre* $s(x)$*, indicando el cuociente* $q(x)$ *y el resto* $r(x)$.

Solución. Los coeficientes de $p(x)$ son, en orden decreciente, $1, 0, 1, -2$. Además $c = 1$. La división sintética queda como

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Al observar los números obtenidos en la tercera fila, vemos que el cuociente (el cual es de grado 2) es $q(x) = x^2 + x + 2$ y el resto es $r(x) = 0$.

b) *¿Es* $x = 1$ *una raíz de* $p(x)$*?*

Solución. Como el resto de dividir $p(x)$ entre $x - 1$ es 0, entonces $p(1) = 0$. Por lo tanto, $x = 1$ es una raíz de $p(x)$. □

Generalizando lo visto en el ejercicio anterior, tenemos que

Proposición 6.7.2. *Sea* $p(x)$ *un polinomio en* $\mathbb{R}[x]$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Se tiene que* $x = c$ *es una raíz de* $p(x)$*, si y sólo si, al dividir* $p(x)$ *entre* $x - c$*, el resto obtenido es 0.*

Ejercicio 6.7.2. *Considere el cuociente* $q(x)$ *y el resto* $r(x)$ *obtenido en el ejercicio anterior, al dividir* $p(x) = x^3 + x - 2$ *entre* $s(x) = x - 1$. *Exprese* $p(x)$ *como*

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x).$$

Solución. Como $q(x) = x^2 + x + 2$ y $r(x) = 0$, entonces

$$p(x) = (x^2 + x + 2)(x - 1). \tag{6.7.1}$$

□

En el penúltimo ejercicio, vimos que $x = 1$ es raíz del polinomio $p(x)$ dado. Además, en el último ejercicio, de (6.7.1) deducimos que $x-1$ es factor de $p(x)$. Esto se generaliza en el siguiente teorema:

Teorema 6.7.3. *Sea $p(x)$ un polinomio en $\mathbb{R}[x]$ y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que $x = c$ es una raíz de $p(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $p(x)$.*

Ejercicio 6.7.3. *Considere el polinomio*

$$p(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9.$$

Usando división sintética:

a) *Determine si $x = 3$ es raíz de $p(x)$.*

Solución. Dividimos $p(x)$ entre $x - 3$, usando división sintética. Los coeficientes de $p(x)$ son $1, -6, 8, 6, -9$. Además, $c = 3$ (note que el valor de c corresponde al candidato a raíz, esto será así de aquí en adelante). La división sintética queda como:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -6 & 8 & 6 & -9 \\ 3 & & 3 & -9 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

Como $r(x) = 0$, entonces $x = 3$ es raíz de $p(x)$. Note que, como $q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, entonces

$$p(x) = (x^3 - 3x^2 - x + 3)(x - 3). \tag{6.7.2}$$

b) *Determine si $x = 3$ es también raíz del cuociente $q(x)$ obtenido en a).*

Solución. Haciendo la división sintética entre $q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ y $x - 3$, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & & 3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

El resto es $r_2(x) = 0$, por lo que $x = 3$ es también raíz de $q(x)$. El nuevo cuociente es $q_2(x) = x^2 - 1$, por lo que $q(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$. De este modo, de (6.7.2), obtenemos que

$$p(x) = (x^2 - 1)(x - 3)^2. \tag{6.7.3}$$

Observamos que $x = 3$ no es raíz del nuevo cuociente $q_2(x) = x^2 - 1$, dado que sus raíces son $x = 1$ y $x = -1$. □

Observación 6.7.2. En el ejercicio anterior, de (6.7.3), obtenemos que el polinomio $p(x)$ completamente factorizado, queda como

$$p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)^2.$$

En este caso, decimos que $x = 3$ es una raíz de **multiplicidad** 2 de $p(x)$, dado que el factor $x - 3$ aparece elevado a 2 en su factorización.

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 6.7.4. *Sea $p(x)$ un polinomio perteneciente a $\mathbb{R}[x]$. Sea c una raíz de $p(x)$. Se llama **multiplicidad** de c, al mayor número natural k tal que*

$$p(x) = (x - c)^k q(x),$$

donde c no es raíz de $q(x)$.

Observación 6.7.3. En el ejercicio anterior,

$$p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)^2,$$

por lo que las raíces de $p(x)$ son

- $x = 1$ y $x = -1$, ambas de multiplicidad 1.
- $x = 3$, de multiplicidad 2.

Decimos que las raíces de $p(x)$ son $1, -1, 3, 3$, donde cada raíz aparece contada tantas veces como indica su multiplicidad. De este modo, $p(x)$ tiene 4 raíces. Note que $gr(p) = 4$, por lo que en este caso, el número de raíces de $p(x)$ coincide con su grado. ¿Será esto siempre verdadero, para cualquier polinomio $p(x)$? Esto se responde en el siguiente teorema.

Teorema 6.7.5. *Sea $n > 0$. Un polinomio $p(x)$ de $\mathbb{R}[x]$ de grado n tiene a lo más n raíces reales, cada raíz contadas tantas veces como lo indica su multiplicidad.*

Observación 6.7.4. Usando división sintética, podemos encontrar todas las raíces reales de un polinomio, cada una con su respectiva multiplicidad, y factorizarlo completamente en $\mathbb{R}[x]$.

Ejercicio 6.7.4. *Considere el polinomio $p(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.*

a) *Demuestre que $x = 1$ es raíz de $p(x)$ y determine su multiplicidad.*

Solución. Realizamos la división sintética respectiva, considerando los coeficientes de $p(x)$, los cuales son $1, 1, -4, -2, 5, 1, -2$, y $x = 1$ a la izquierda de estos. Obtenemos

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 1 & -4 & -2 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 & -2 & -4 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -4 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Como el resto es 0, entonces $x = 1$ es raíz de $p(x)$. Veamos si es raíz doble, es decir, si su multiplicidad es 2. Consideramos los coeficientes del cuociente, en este caso, $1, 2, -2, -4, 1, 2$ y realizamos la división sintética respectiva:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 2 & -2 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & & 1 & 3 & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

De nuevo el resto es 0, por lo que $x = 1$ es raíz doble de $p(x)$. Veamos si $x = 1$ es raíz triple de $p(x)$, es decir, si su multiplicidad es 3. Consideramos los coeficientes del cuociente del paso anterior, es decir, $1, 3, 1, -3, -2$ y realizamos la división sintética, obteniendo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & & 1 & 4 & 5 & 2 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

Como el resto es 0, entonces $x = 1$ es raíz triple de $p(x)$. Veamos si es raíz de multiplicidad 4. De forma análoga, obtenemos que

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & & 1 & 5 & 10 \\ \hline & 1 & 5 & 10 & 12 \end{array}$$

Como el resto es $12 \neq 0$, entonces concluimos que $x = 1$ es raíz de multiplicidad 3 de $p(x)$. Luego, usando los coeficientes obtenidas en la penúltima división sintética, deducimos que

$$p(x) = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2)(x - 1)^3. \tag{6.7.4}$$

b) *Demuestre que $x = -1$ y $x = -2$ son raíces de $p(x)$. Factoríze $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.*

Solución. Probamos que $x = -1$ es raíz de $p(x)$. De (6.7.4), basta probar que $x = -1$ es raíz de $q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$. Haciendo división sintética, obtenemos que

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & & -1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Como el resto es 0, entonces $x = -1$ es raíz de $q(x)$, y así también de $p(x)$. Note que el cuociente obtenido es

$$q_1(x) = x^2 + 3x + 2.$$

De este modo, para determinar si $x = -1$ es una raíz de multiplicidad mayor a 1, y además para obtener las restantes raíces de $p(x)$, simplemente resolvemos la ecuación cuadrática

$$x^2 + 3x + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son $x = -1$ o $x = -2$. Así, comprobamos que $x = -1$ es una raíz de multiplicidad de 2 y que $x = -2$ es raíz de $p(x)$. Por lo tanto,

$$p(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2(x + 2).$$

□

Nos queda la pregunta: ¿Cómo determinar todas las posibles raíces de un polinomio? Esta interrogante la responderemos en la siguiente sección.

6.8. Regla de Descartes.

La regla de Descartes nos otorga una estimación de la posible cantidad de raíces positivas y de raíces negativas que tiene un polinomio, cada raíz contada tantas veces como su multiplicidad lo indique (es decir, se puede repetir alguna raíz), de acuerdo a los cambios de signo de sus coeficientes.

Por ejemplo, consideremos el polinomio

$$p(x) = x^9 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + x - 12.$$

De izquierda a derecha, este polinomio tiene 5 cambios de signo en sus coeficientes:

$$p(x) = x^9 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + x - 12$$

5 cambios de signos

De este modo,

- El polinomio $p(x)$ puede tener como máximo 5 raíces positivas, es decir, como máximo el número de cambios de signo de los coeficientes de $p(x)$.
- Si no es así, entonces puede tener 3 o 1 raíz positiva. Note que estas opciones se obtienen a partir de 5, disminuyendo éste de 2 en 2.

Para determinar la posible cantidad de raíces negativas, obtenemos

$$p(-x) = -x^9 + 3x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 12.$$

Observamos que $p(-x)$ tiene 2 cambios de signo en sus coeficientes:

$$p(-x) = -x^9 + 3x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 12$$

2 cambios de signos

Esto quiere decir que:

- El polinomio $p(x)$ puede tener como máximo 2 raíces negativas, es decir, como máximo el número de cambios de signo de los coeficientes de $p(-x)$.
- Si no es así, entonces tiene 0 raíces negativas. Note que esta opción se obtiene a partir de 2, disminuyendo éste en 2 unidades.

Todo esto lo generalizamos en el siguiente teorema:

Teorema 6.8.1. *Sea $p(x)$ un polinomio. El número de raíces reales positivas de $p(x)$, contada cada raíz tantas veces como su multiplicidad lo indica:*

- *Corresponde como máximo al número de cambios de signo en los coeficientes de $p(x)$.*

- *Si es menor, difiere de la primera opción en un número par (es decir, para determinar las otras opciones, disminuimos la primera opción de 2 en 2).*

Por otro lado, el número de raíces reales negativas de $p(x)$, contada cada raíz tantas veces como su multiplicidad lo indica:

- *Corresponde como máximo al número de cambios de signo en los coeficientes de $p(-x)$.*
- *Si es menor, difiere de la primera opción en un número par (es decir, para determinar las otras opciones, disminuimos la primera opción de 2 en 2).*

La siguiente idea nos entrega una forma de calcular los candidatos a raíces racionales de un polinomio $p(x)$, para el cual sus coeficientes son números enteros. Consideremos el polinomio

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6.$$

El término independiente de x es $a_0 = -6$. Sus divisores enteros son

$$\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1.$$

El coeficiente de la potencia de x que determina el grado, es decir de x^3, es $a_3 = 2$. Sus divisores enteros son

$$\pm 2, \pm 1.$$

Los candidatos a raíces racionales de $p(x)$, corresponden a números de la forma

$$\frac{\text{divisor de } a_0 = -6}{\text{divisor de } a_3 = 2}.$$

Veamos todas las opciones posibles. En virtud de lo mencionado, se tiene que, si dividimos:

- ± 6 entre cada divisor de 2, obtenemos $\pm 3, \pm 6$.
- ± 3 entre cada divisor de 2, obtenemos $\pm \frac{3}{2}, \pm 3$.
- ± 2 entre cada divisor de 2, obtenemos $\pm 1, \pm 2$.

- ± 1 entre cada divisor de 2, obtenemos $\pm\frac{1}{2}, \pm 1$.

En resumen, los candidatos a raíces racionales de $p(x)$ son

$$\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm\frac{3}{2}, \pm 1, \pm\frac{1}{2}.$$

Lo mencionado se generaliza en la siguiente proposición:

Proposición 6.8.2. *Sea $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n, para el cual sus coeficientes $a_n, \ldots, a_1, a_0$ son números enteros. Si un número racional irreducible $\frac{a}{b}$ es raíz de $p(x)$, entonces a divide a a_0 y b divide a a_n.*

Observación 6.8.1. Esta proposición nos dice que los números racionales irreducibles de la forma $\frac{a}{b}$, con a divisor de a_0 (el término libre) y b divisor de a_n (el coeficiente de la mayor potencia de x presente en el polinomio), son **candidatos** a ser raíces de $p(x)$.

Ejercicio 6.8.1. *Para cada polinomio siguiente:*

a) Determine sus raíces reales y factorízelo en $\mathbb{R}[x]$.

b) Determine sus raíces complejas y factorizelo en $\mathbb{C}[x]$, conjunto que corresponde a los polinomios de coeficientes complejos.

1) $p(x) = 4x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 9x + 2$.

Solución. Note que $a_0 = 2$ y $a_4 = 4$, por lo que los candidatos a raíces racionales de $p(x)$ son de la forma

$$\frac{\text{divisor de } 2}{\text{divisor de } 4}.$$

Los divisores enteros de 2 son

$$\pm 2, \pm 1,$$

y los divisores enteros de 4 son

$$\pm 4, \pm 2, \pm 1.$$

Así, los candidatos a raíces racionales son

$$\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}.$$

Para que nuestro trabajo sea más eficiente, usaremos la Regla de Descartes. Note que, de izquierda a derecha, $p(x)$ tiene 4 cambios de signo en sus coeficientes, por lo que tiene 4, 2 o 0 raíces positivas (sin embargo, es posible que alguna de las raíces no esté dentro de nuestros candidatos, y sea una raíz irracional). Por otro lado,

$$p(-x) = 4x^4 + 9x^3 + 6x^2 + 9x + 2,$$

(note que, en general, $p(-x)$ se obtiene simplemente cambiándole el signo a las potencias de exponente impar de $p(x)$) el cual no tiene cambios de signo, por lo cual $p(x)$ no tiene raíces racionales negativas. Es decir, los candidatos a raíces racionales se reducen sólo a

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}.$$

Veamos si $x = 2$ es raíz de $p(x)$. La división sintética queda como

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -9 & 6 & -9 & 2 \\ 2 & & 8 & -2 & 8 & -2 \\ \hline & 4 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

El resto es 0, por lo que $x = 2$ es raíz de $p(x)$. Realizando la división sintética entre el cuociente obtenido y $x - 2$, podemos ver que $x = 2$ es sólo raíz simple de $p(x)$.

Veamos si $x = \frac{1}{4}$ es raíz de $p(x)$. La división sintética respectiva corresponde a

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -1 & 4 & -1 \\ \frac{1}{4} & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

por lo que $x = \frac{1}{4}$ también es raíz. El cuociente es de grado 2, y corresponde a $q(x) = 4x^2 + 4$. Note que la ecuación

$$4x^2 + 4 = 0, \tag{6.8.1}$$

no tiene soluciones reales, por lo que las raíces reales de $p(x)$ son sólo $x = 2$ y $x = \frac{1}{4}$, ambas de multiplicidad 1 (2 raíces positivas, tal cómo se estimó con la regla de Descartes). Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es

$$p(x) = 4(x-2)\left(x - \frac{1}{4}\right)(x^2+1).$$

Sin embargo, sus raíces complejas son $2, \frac{1}{4}$ y las provenientes de la resolución de (6.8.1), las cuales son $i, -i$. Su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es

$$p(x) = 4(x-2)\left(x - \frac{1}{4}\right)(x-i)(x+i).$$

2) $p(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$.

Solución. Como $a_0 = -12$ y $a_4 = 1$, los candidatos a raíces racionales de $p(x)$ son de la forma

$$\frac{\text{divisor de } -12}{\text{divisor de } 1}.$$

O sea, son los divisores enteros de -12, los cuales son

$$\pm 12, \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$$

(dado que los divisores de 1 son ± 1).

Note que $p(x)$ tiene sólo 1 cambio de signo en sus coeficientes, por lo que tiene exactamente 1 raíz positiva. Por otro lado,

$$p(-x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12.$$

Como $p(-x)$ tiene 3 cambios de signos en sus coeficientes, entonces $p(x)$ tiene 3 o 1 raíz negativa. Por simplicidad en los cálculos, veamos si $x = 1$ es raíz de $p(x)$. La división sintética es

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & 9 & -4 & -12 \\ 1 & & 1 & 7 & 16 & 12 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & 12 & 0 \end{array}$$

Como el resto es 0, entonces $x = 1$ es raíz de $p(x)$ y es la única raíz positiva de $p(x)$, tal como lo vimos con la regla de Descartes.

Busquemos raíces negativas de $p(x)$. Veamos si $x = -3$ es raíz de $p(x)$. La división sintética es

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 7 & 16 & 12 \\ -3 & & -3 & -12 & -12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

por lo que $x = -3$ es raíz de $p(x)$. Note que el cuociente obtenido es $q(x) = x^2 + 4x + 4$, por lo que para determinar si $x = -3$ es raíz doble de $p(x)$, y para obtener sus restantes raíces, basta resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 + 4x + 4 = 0.$$

Resolviendo tal ecuación, obtenemos que $x = -2$ es una raíz de multiplicidad 2 de $p(x)$. Como $p(x)$ tiene a lo más 4 raíces, contada cada raíz tantas veces como su multiplicidad, entonces hemos obtenido todas las raíces de $p(x)$ (observemos que tenemos 3 raíces negativas, tal como se especulaba con la regla de Descartes). En resumen:

- $x = 1$ y $x = -3$ son raíces de multiplicidad 1.
- $x = -2$ es raíz de multiplicidad 2.

De este modo, $p(x)$ queda factorizado en $\mathbb{R}[x]$ como

$$p(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)^2.$$

Sus raíces complejas y su factorización en $\mathbb{C}[x]$ son las mismas que en $\mathbb{R}[x]$ (dado que cualquier polinomio de coeficientes reales y de grado n tiene exactamente n raíces complejas.)

3) $p(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x$.

Solución. Note que $x = 0$ es raíz de $p(x)$, lo cual se puede apreciar factorizando por $x = x - 0$ en el polinomio. De este modo,

$$p(x) = x(x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2).$$

Para obtener las restantes raíces, es suficiente hacer el análisis de

$$q(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2.$$

Puede comprobar usted mismo, que las raíces de $q(x)$ son

- $x = 1$ de multiplicidad 3.
- $x = -2$ de multiplicidad 1.

De este modo, las raíces reales, y también complejas, de $p(x)$ son

- $x = 1$ de multiplicidad 3.
- $x = -2$ y $x = 0$ de multiplicidad 1.

Su factorización en $\mathbb{R}[x]$, y también en $\mathbb{C}[x]$, es

$$p(x) = x(x-1)^3(x+2).$$

4) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Solución. Los candidatos a raíces racionales son

$$\pm 2, \pm 1.$$

Según la regla de Descartes, $p(x)$ puede tener 2 o 0 raíces positivas, y tiene 1 sola raíz negativa. Usando división sintética, vemos que $x = 1$ es raíz de $p(x)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

Así, el cuociente obtenido es $p(x) = x^2 - 2x - 2$. Para obtener las restantes raíces, resolvemos la ecuación

$$x^2 - 2x - 2 = 0,$$

cuyas soluciones son $x = 1 \pm \sqrt{3}$. De este modo, las raíces de $p(x)$ son $1, 1 \pm \sqrt{3}$, todas de multiplicidad 1. Note que la raíz negativa $1 - \sqrt{3}$ no correspondía a ninguno de los candidatos, dado que es un raíz irracional. De este modo, su factorización en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$, es

$$p(x) = (x-1)(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3})).$$

Si pensamos en $p(x)$ como un polinomio en $\mathbb{Q}[x]$, el cual corresponde al conjunto de polinomios $p(x)$ con coeficientes racionales, entonces su factorización es

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2).$$

5) $p(x) = x^7 + x^6 + x + 1$.

Solución. El único candidato a raíz racional es $x = -1$, dado que $p(x)$ no tiene raíces positivas. Usando división sintética, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

por lo que $x = -1$ es raíz de $p(x)$, y también podemos probar que es raíz de multiplicidad 1. El cuociente $q(x) = x^6 + 1$ no tiene raíces reales, por lo que la única raíz real de $p(x)$ es $x = -1$ y su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es

$$p(x) = (x+1)(x^6+1).$$

Para determinar las restantes raíces complejas de $p(x)$, debemos resolver en $\mathbb{C}$, la ecuación

$$x^6 + 1 = 0,$$

la cual es es equivalente a

$$x^6 = -1.$$

Es decir, las raíces restantes corresponden a las raíces sextas de $z = -1$. Como z tiene módulo 1 y argumento π, entonces sus raíces son de la forma

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi + 2k\mathcal{P}}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)},\ k = 0, 1, \ldots, 5.$$

De este modo, las restantes raíces son

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \pm i$$

(Se puede probar que las raíces complejas de un polinomio siempre vienen de a pares, nos referimos a que si z es una raíz compleja de de un polinomio $p(x)$, también lo es su conjugado $\overline{z}$).

Por lo tanto, su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es

$$p(x) = (x+1)(x-i)(x+i)\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)$$

$$\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right).$$

$\square$

Veamos algunas aplicaciones de lo aprendido:

Ejercicio 6.8.2. *¿En qué puntos del plano cartesiano se intersectan los gráficos de $p(x) = x^3 - x^2 - x + 3$ y $q(x) = x^2 + 1$?*

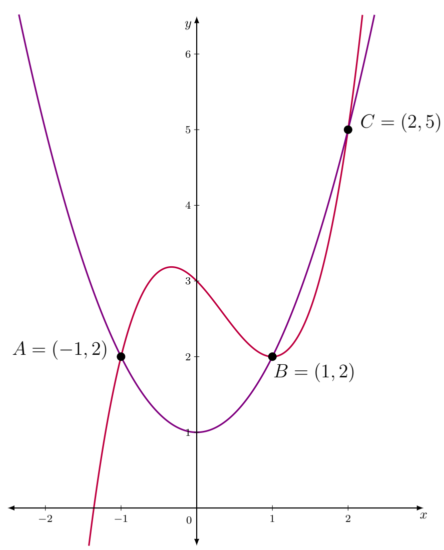
Solución. Los puntos del gráfico de p tienen la forma $(x, p(x))$ y los puntos del gráfico de q tienen la forma $(x, q(x))$, con $x \in \mathbb{R}$. De este modo, para determinar sus puntos de intersección, basta resolver la ecuación $p(x) = q(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} p(x) = q(x) &\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + 3 = x^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Resolver la última ecuación es simplemente encontrar las raíces del polinomio

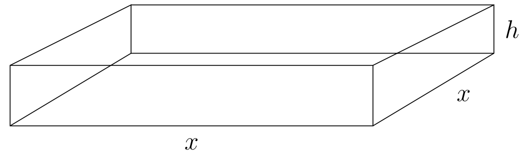
$$t(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2,$$

las cuales son $-1, 1$ y 2. Luego, reemplazando estas raíces por x en cualquiera de los polinomios $p(x)$ o $q(x)$, se obtiene que los puntos de intersección son $(-1, 2), (1, 2)$ y $(2, 5)$. Con ayuda de un graficador, observamos los gráficos de p y q, con sus puntos de intersección destacados:



□

Ejercicio 6.8.3. *Se desea confeccionar una caja de lata de base cuadrada, y con parte superior abierta, la cual tenga un volumen de 500 cm*^{3}*. Una representación de la caja es*



donde x es la longitud de los lados de la base, y h es la altura.

a) *Obtenga una expresión que dependa sólo de x, y que represente el material total usado para confeccionar la caja.*

Solución. El volumen de la caja es x^2h, por lo que

$$x^2h = 500. \tag{6.8.2}$$

El material usado para confeccionarla, corresponde a la suma de las áreas de las caras de la caja, es decir, al área de la base x^2 más las áreas de las 4 superficies laterales, cada una correspondiente a xh. De este modo, el material usado para confeccionar la caja es

$$A = x^2 + 4xh. \tag{6.8.3}$$

Despejando h de (6.8.2), deducimos que

$$h = \frac{500}{x^2}. \tag{6.8.4}$$

Reeemplazando esta expresión en (6.8.3), obtenemos que el material para confeccionar una caja de este tipo viene dado por

$$A = x^2 + \frac{2000}{x}.$$

b) *Se puede probar que la cantidad mínima de material usada para confeccionar una caja con tal volumen, debe ser de 300 cm^2. Si se desea usar esta cantidad de material, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la caja?*

Solución. Nuestra pregunta se responde resolviendo la ecuación $A = 300$, es decir,

$$x^2 + \frac{2000}{x} = 300.$$

Esta expresión es equivalente a

$$x^3 - 300x + 2000 = 0. \tag{6.8.5}$$

Para resolver (6.8.5), debemos encontrar las raíces de $p(x) = x^3 - 300x + 2000$. Los candidatos a raíces racionales de $p(x)$ son los divisores de 2000, es decir

$$\pm 2000, \pm 1000, \pm 500, \pm 250, \pm 200, \pm 100, \pm 50, \pm 40, \pm 25, \pm 10, \pm 8, \pm 5, \pm 4, \pm 2, \pm 1.$$

Hacemos división sintética con $c = 10$ y $p(x)$, obteniendo resto $r(x) = 0$ y cuociente

$$q(x) = x^2 + 10x - 200 = (x - 10)(x + 20).$$

De este modo,

$$p(x) = (x - 10)^2(x + 20),$$

y las raíces buscadas son $x = 10$ y $x = -20$. Como x debe ser positivo, entonces, para que el material sea mínimo, la caja debe tener 10 *cm* de lado en la base. Reemplazando $x = 10$ en (6.8.4), deducimos que

$$h = \frac{500}{x^2} = \frac{500}{100} = 5,$$

por lo que la altura debe ser de 5 cm. □

Ejercicio 6.8.4. *A comienzos de Junio de 2017, biólogos introducen un rebaño de 100 venados en una selva tropical. Se cree que el número de venados después de un cierto tiempo será cambiante, debido a la depredación, pero también a la reproducción de los mismos. Se estima que el número de venados vivos, pasados t meses de introducirlos en la selva, viene dado por*

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100.$$

Según esta estimación:

a) *¿En qué período de tiempo el número de venados sobrepasará los 180 ejemplares? Dato: Use* $\sqrt{5} \approx 2{,}23$.

Solución. Intentamos resolver la inecuación

$$N(t) > 180.$$

Se tiene que

$$N(t) > 180 \Leftrightarrow -t^4 + 21t^2 + 100 > 180 \Leftrightarrow t^4 - 21t^2 + 80 < 0.$$

Factorizamos en la última inecuación, para luego encontrar su conjunto solución:

$$t^4 - 21t^2 + 80 < 0 \Leftrightarrow (t^2 - 16)(t^2 - 5) < 0 \Leftrightarrow (t+4)(t-4)(t-\sqrt{5})(t+\sqrt{5}) < 0.$$

Como $t \geq 0$, así también lo son $t+4$ y $t+\sqrt{5}$. Dividiendo por $(t+4)(t+\sqrt{5})$ en la última inecuación, obtenemos equivalentemente que

$$(t-4)(t-\sqrt{5}) < 0. \tag{6.8.6}$$

Podemos ver que el conjunto solución de (6.8.6) es $\left]\sqrt{5}, 4\right[$ (el desarrollo queda a cargo del lector), el cual también es el conjunto solución de nuestra inecuación original. Como $\sqrt{5} \approx 2{,}23$, deducimos que el número de venados sobrepasará a 180, entre los 2.23 y los 4 años. Es decir, esto ocurrirá aproximadamente entre los 2 años y 3 meses, y los 4 años de ser introducidos los venados en la selva. Por lo tanto, el suceso se llevará a cabo aproximadamente desde Septiembre de 2019 hasta Junio de 2021.

b) *¿En que fecha los venados se extinguirán?*

Solución. Debemos resolver la ecuación $N(t) = 0$, o sea

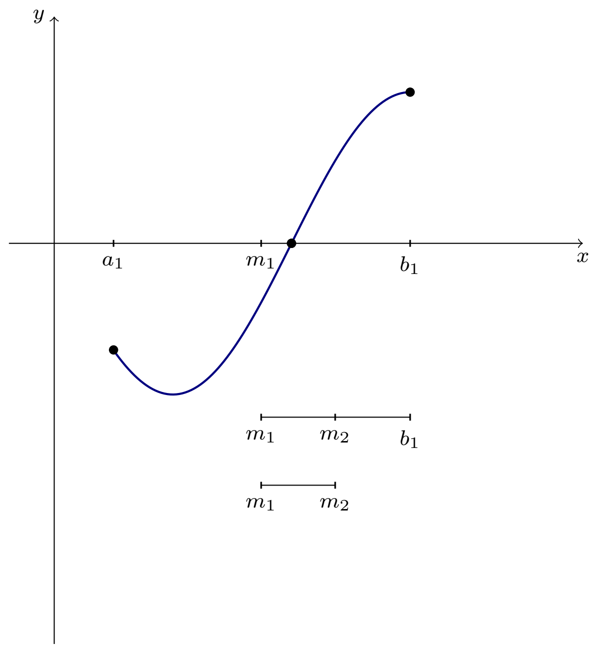
$$-t^4 + 21t^2 + 100 = 0.$$

Los candidatos racionales a soluciones de esta ecuación son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50, \pm 100.$$

Usando división sintética, podemos ver que $t = 5$ y $t = -5$ son las únicas soluciones reales de esta ecuación. Como t debe ser positivo, entonces concluimos que ya no habrá venados 5 años después de su introducción en la selva, es decir, en Junio de 2022. $\square$

6.9. Método de la bisección.



Este es un método de aproximación de raíces de un polinomio, el cual es útil para aproximar sus raíces irracionales, si es que las tiene. Veamos en un ejemplo como funciona.

Ejercicio 6.9.1. *Consideremos el polinomio* $p(x) = x^3 + x - 1$.

a) *Usando la regla de Descartes, demuestre que* $p(x)$ *tiene una sola raíz real. Luego pruebe que tal raíz es un número irracional.*

Solución. Note que $p(x)$ tiene un sólo cambio de signo, por lo que tiene 1 sola raíz real positiva. Por otro lado, como

$$p(-x) = -x^3 - x - 1,$$

entonces $p(x)$ no tiene raíces negativas. Dado que $x = 0$ no es raíz de $p(x)$, entonces $p(x)$ tiene sólo una raíz real.

Por otro lado, $p(x)$ tiene sólo dos candidatos a raíces racionales, los cuales son 1 y -1. Como la única raíz de $p(x)$ es positiva, entonces el único candidato es $x = 1$. Si realizamos la división sintética, vemos que

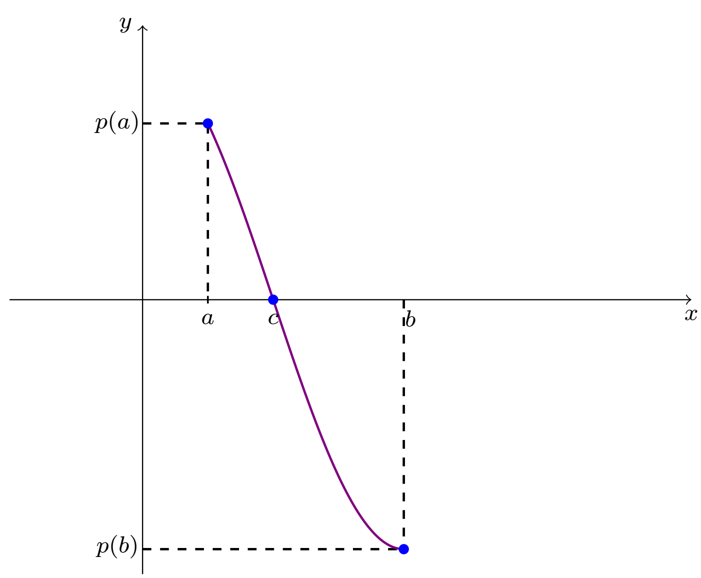
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

Como el resto es 1, entonces $x = 1$ no es raíz de $p(x)$. Es decir, $p(x)$ no tiene raíces racionales, pero si una sola raíz real, por lo que esta raíz es un número irracional.

b) *Usando el método de la bisección, aproxime el valor de tal raíz con una cifra decimal. Use calculadora.*

Solución. En el estudio del cálculo, podemos ver que una función polinomial es una función continua, lo cual corresponde intuitivamente a que su gráfico no tiene cortes.

De este modo, podemos ver si a y b son dos números reales con $a > b$, tales que $p(a) > 0$ y $p(b) < 0$, entonces necesariamente existe una raíz c de $p(x)$ que está ubicada entre a y b. Es decir, $a < c < b$:



Ocupemos este principio para obtener un valor aproximado de la raíz c de nuestro polinomio $p(x) = x^3 + x - 1$. Recordemos que $c > 0$, por lo que notando que

$p(0) = -1 < 0$ y $p(1) = 1 > 0$, obtenemos que

$$c \in [0,1]$$

(dado que las imágenes de 0 y de 1 tienen signos distintos).

La idea es "achicar" cada vez más el intervalo al cual pertenece c, partiéndolo en dos intervalos iguales sucesivamente, de modo de ir aproximando mejor c. Note que:

- el punto medio de $[0,1]$ es 0,5. Además, $p(0{,}5) = -0{,}375 < 0$ y como $p(1) > 0$, entonces $c \in [0{,}5; 1]$ (dado que las imágenes de 0,5 y de 1 tienen signos distintos).
- el punto medio de $[0{,}5; 1]$ es 0,75. Además, como $p(0{,}75) = 0{,}171875 > 0$ y $p(0{,}5) < 0$ entonces $c \in [0{,}5; 0{,}75]$.
- el punto medio de $[0{,}5; 0{,}75]$ es 0,625. Como $p(0{,}625) < 0$ y $p(0{,}75) > 0$, entonces $c \in [0{,}625; 0{,}75]$.
- el punto medio de $[0{,}625; 0{,}75]$ es 0,6875. Como $p(0{,}6875) > 0$ y $p(0{,}625) < 0$, entonces $c \in [0{,}625; 0{,}6875]$.

De este modo, la raíz c es aproximadamente 0,6. Evidentemente que esta aproximación se puede ir mejorando en la medida que seguimos realizando este proceso. $\square$

6.10. Descomposición en suma de fracciones parciales.

Las fracciones

$$\frac{x+2}{x^2-1}, \ \frac{x^3+3x^2-4}{x^2-5x+6}, \ \frac{2}{x^4+1},$$

son ejemplos de fracciones racionales. Informalmente una fracción racional, es un fracción en la cual tanto el numerador como el denominador son polinomios, con el cuidado que el polinomio del denominador no puede ser el polinomio nulo.

Definición 6.10.1. *Cualquier fracción de la forma*

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

con $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *y* $q(x) \neq 0$, *se llama* ***fracción racional***.

Si consideramos las fracciones racionales $\frac{2}{x+5}$ y $\frac{3}{x-4}$, podemos probar que su suma es

$$\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} = \frac{5x+7}{x^2+x-20}.$$

Ahora queremos realizar el procedimiento inverso, es decir, dada la fracción racional $\frac{5x+7}{x^2+x-20}$, queremos descomponerla en suma de fracciones más simples (las cuales deberían ser $\frac{2}{x+5}$ y $\frac{3}{x-4}$).

Observación 6.10.1. En general, descomponer una fracción racional en suma de fracciones parciales, consiste en expresar ésta como suma de fracciones racionales más simples. Cualquier fracción racional

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

con

$$gr(p) < gr(q),$$

(es decir, con el grado del numerador siendo menor que el grado del denominador) puede descomponerse en suma de fracciones parciales.

A continuación veremos ejemplos de cómo descomponer una fracción racional en suma de fracciones parciales, los cuales nos muestran cada uno de los 4 casos fundamentales. Partimos con la fracción planteada al comienzo de esta sección.

Ejercicio 6.10.1. *Descomponga en suma de fracciones parciales, la fracción*

$$\frac{5x+7}{x^2+x-20}.$$

Solución. Factorizamos su denominador, dejando la fracción como

$$\frac{5x+7}{(x+5)(x-4)}.$$

Dado que cada factor del denominador es de primer grado, entonces cada uno de ellos nos aporta una sola fracción a la suma de fracciones parciales. Más específicamente, el factor $x+5$ nos aporta una fracción de la forma

$$\frac{A}{x+5},$$

y el factor $x-4$ nos aporta una fracción de la forma

$$\frac{B}{x-4},$$

con A y B constantes por determinar, de modo que

$$\frac{5x+7}{(x+5)(x-4)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-4}. \tag{6.10.1}$$

Para obtener los valores de A y B, multiplicamos (6.10.1) por $(x+5)(x-4)$, obteniendo

$$5x+7 = A(x-4) + B(x+5). \tag{6.10.2}$$

A partir de (6.10.2), podemos proceder de dos formas:

- Primera forma: Note que si $x = 4$ en (6.10.2), entonces el término $A(x-4)$ se anula, quedando

  $$27 = 9B,$$

  de donde $B = 3$. Intentamos anular el término $B(x+5)$, y de este modo obtener el valor de A. Esto se obtiene reemplazando $x = -5$ en (6.10.2), de modo que

  $$-18 = -9A.$$

  Así, $A = 2$.

- Segunda forma: Deshaciendo los paréntesis en (6.10.2), y luego agrupando, obtenemos que

  $$5x+7 = (A+B)x + (5B-4A).$$

En la última igualdad, tenemos un polinomio a la izquierda y otro a la derecha. Igualando sus coeficientes respectivos, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$A + B = 5,\ 5B - 4A = 7,$$

cuyas soluciones son $A = 2$ y $B = 3$.

De este modo, con cualquiera de los métodos propuestos, obtenemos que la descomposición es

$$\frac{5x+7}{(x+5)(x-4)} = \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4}.$$

□

Observación 6.10.2. Sea

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

una fracción racional, con

$$gr(p) < gr(q).$$

Si el denominador $q(x)$ tiene un factor de primer grado de la forma $ax + b$, entonces la descomposición en suma de fracciones parciales tiene un término de la forma $\frac{A}{ax+b}$, con A constante por determinar. Es decir, el factor de primer grado $ax + b$ nos aporta una sola fracción a la descomposición, la cual es de la forma $\frac{A}{ax+b}$.

Ejercicio 6.10.2. *Descomponga en suma de fracciones parciales, la fracción*

$$\frac{5x^2 + 15x + 7}{(x-4)(x+3)^2}$$

Solución. En este caso, el denominador ya está factorizado. Tenemos que el factor de primer grado $x - 4$ nos aporta una sola fracción, la cual tiene la forma

$$\frac{A}{x-4}.$$

Por otro lado, el factor de primer grado repetido 2 veces $(x+3)^2$ nos aporta dos fracciones, las cuales tienen la forma

$$\frac{B}{x+3},\ \frac{C}{(x+3)^2}.$$

Es decir,

$$\frac{5x^2+15x+7}{(x-4)(x+3)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}, \tag{6.10.3}$$

con A, B y C por determinar. Para obtener los valores de A, B y C, intentamos dejar (6.10.3) sin fracciones. Para ello, multiplicamos esta igualdad por $(x-4)(x+3)^2$, obteniendo

$$5x^2+15x+7=A(x+3)^2+B(x-4)(x+3)+C(x-4). \tag{6.10.4}$$

Nuevamente obtenemos A, B y C de dos formas:

- Primera forma: Si $x=-3$ en (6.10.4), entonces

  $$7=-7C.$$

  De este modo, $C=-1$. Además, si $x=4$ en (6.10.4), obtenemos que $A=3$.

  Obtengamos B. Deshacemos los paréntesis del miembro derecho de (6.10.4), y agrupamos según las potencias de x, obteniendo que

  $$5x^2+15x+7=(A+B)x^2+(6A-B+C)x+(9A-12B-4C)$$

  El coeficiente de x^2 del polinomio de la derecha es $A+B$ y el del polinomio de la izquierda es 5. De este modo, $A+B=5$, de donde $B=2$.

- Segunda forma: Deshacemos los paréntesis del miembro derecho de (6.10.4), y agrupamos según las potencias de x, obteniendo que

  $$5x^2+15x+7=(A+B)x^2+(6A-B+C)x+(9A-12B-4C)$$

  Igualando coeficientes del polinomio de la izquierda con los del polinomio de la derecha, obtenemos el sistema

  $$A+B=5,\ 6A-B+C=15,\ 9A-12B-4C=7,$$

  de donde $A=3, B=2, C=-1$.

Por lo tanto,

$$\frac{5x^2+15x+7}{(x-4)(x+3)^2} = \frac{3}{x-4} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

□

Observación 6.10.3. Sea

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

una fracción racional, con

$$gr(p) < gr(q).$$

Si $q(x)$ tiene un factor de primer grado repetido k veces, de la forma $(ax+b)^k$, con $k \in \mathbb{N}, k > 1$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene términos de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(ax+b)^k}. \tag{6.10.5}$$

con $A_1, A_2, \ldots, A_k$ constantes por determinar. Es decir, el factor de primer grado repetido k veces $(ax+b)^k$, nos aporta k fracciones a la descomposición, las cuales tienen la forma (6.10.5).

Ejercicio 6.10.3. *Descomponga en suma de fracciones parciales, la fracción*

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Solución. El denominador ya está factorizado. El factor de primer grado $x+1$ del denominador nos aporta una sola fracción, en este caso de la forma

$$\frac{A}{x+1}.$$

El factor de segundo grado irreducible x^2+1 nos aporta también una sola fracción, en este caso de la forma

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

(Note que el grado del numerador es uno menos que el grado del denominador). De este modo,

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

con A, B y C por determinar. Amplificando la última igualdad por $(x+1)(x^2+1)$, obtenemos la equivalencia

$$x^2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1). \tag{6.10.6}$$

Obtenemos los valores de A, B y C. Deshaciendo los paréntesis en (6.10.6), se tiene que

$$x^2 = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C).$$

De este modo, tenemos el sistema

$$A+B=1,\ B+C=0,\ A+C=0,$$

cuyas soluciones son $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, la descomposición es

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)}.$$

□

Observación 6.10.4. Si $q(x)$ tiene un factor de segundo grado irreducible en $\mathbb{R}[x]$, de la forma ax^2+bx+c, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales tiene un término de la forma $\frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c}$, donde A_1, A_2 son constantes por determinar. Es decir, el factor irreducible no repetido ax^2+bx+c nos aporta una sola fracción a la descomposición, la cual tiene la forma $\frac{A_1x+A_2}{ax^2+b}$.

Ejercicio 6.10.4. *Descomponga en suma de fracciones parciales, la fracción*

$$\frac{x^4+8x^2-x+16}{x(x^2+4)^2}.$$

Solución. Note que el denominador ya está factorizado. El factor de primer grado x nos aporta la fracción de la forma

$$\frac{A}{x},$$

y el factor de segundo grado, irreducible y repetido $(x^2+4)^2$, nos aporta dos fracciones, las cuales tienen la forma

$$\frac{Bx+C}{x^2+4},\ \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

De este modo,

$$\frac{x^4+8x^2-x+16}{x(x^2+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}+\frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}, \tag{6.10.7}$$

con A, B, C, D, E constantes por determinar. Multiplicando (6.10.7) por $x(x^2+4)^2$, obtenemos que

$$x^4+8x^2-x+16=A(x^2+4)^2+(Bx+C)x(x^2+4)+(Dx+E)x. \tag{6.10.8}$$

Deshaciendo los parentésis del miembro izquierdo en (6.10.8), y agrupando las potencias de x, obtenemos que

$$x^4+8x^2-x+16=(A+B)x^4+Cx^3+(8A+4B+D)x^2+(4C+E)x+16A,$$

De este modo, se deduce el sistema

$$A+B=1,\ C=0,\ 8A+4B+D=8,\ 4C+E=-1,\ 16A=16,$$

cuyas soluciones son $A=1, B=C=D=0, E=-1$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales queda como

$$\frac{x^4+8x^2-x+16}{x(x^2+4)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x^2+4)^2}.$$

□

Observación 6.10.5. Si $q(x)$ tiene un factor de segundo grado, irreducible y repetido k veces, de la forma $(ax^2+bx+c)^k$, con $k\in\mathbb{N}, k>1$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene términos de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}, \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \ldots, \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}, \tag{6.10.9}$$

con $A_1, A_2, \ldots, A_k$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constantes por determinar. Es decir, el factor $(ax^2+bx+c)^k$ mencionado, aporta k fracciones a la descomposición, las cuales tienen la forma (6.10.9).

Veamos cómo descomponer en suma de expresiones más sencillas, una fracción racional donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Considere la fracción racional

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 4x + 18}{x^2 - 3x - 18}.$$

Realizamos primero la división

$$x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 4x + 18 \div x^2 - 3x - 18,$$

cuyo cuociente es $x^2 - 1$ y cuyo resto es x. De este modo,

$$x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 4x + 18 = (x^2 - 1)(x^2 - 3x - 18) + x.$$

Dividiendo la última igualdad por $x^2 - 3x - 18$, obtenemos que

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 4x + 18}{x^2 - 3x - 18} = x^2 - 1 + \frac{x}{x^2 - 3x - 18}, \tag{6.10.10}$$

donde a la izquierda tenemos nuestra fracción original. Note que la fracción $\frac{x}{x^2-3x-18}$ de (6.10.10), puede ser descompuesta en suma de fracciones parciales. En efecto, tenemos que

$$\frac{x}{x^2 - 3x - 18} = \frac{2}{3(x-6)} + \frac{1}{3(x+6)},$$

(lo puede comprobar usted mismo), por lo que de (6.10.10), concluimos que

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 4x + 18}{x^2 - 3x - 18} = x^2 - 1 + \frac{2}{3(x-6)} + \frac{1}{3(x+6)}.$$

Observación 6.10.6. Para descomponer una fracción racional de la forma $\frac{p(x)}{s(x)}$, en la cual el grado del numerador $p(x)$ es mayor que el grado del denominador $s(x)$, primero hacemos la división $p(x) \div s(x)$, cuyo cuociente es llamado $q(x)$ y resto $r(x)$. Así, tenemos que

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x). \tag{6.10.11}$$

Dividiendo (6.10.11) por $s(x)$, obtenemos que nuestra fracción es

$$\frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)}. \tag{6.10.12}$$

Como el grado del resto $r(x)$ es siempre menor que el grado del divisor $s(x)$, entonces la fracción

$$\frac{r(x)}{s(x)}$$

de la izquierda de (6.10.12), puede ser descompuesta en suma de fracciones parciales. Una vez hecho esto, finaliza nuestra descomposición de la fracción $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

6.11. Ejercicios propuestos.

1. Obtenga un polinomio $p(x)$, de coeficientes reales, del menor grado posible, de modo que

   a) 1 y 2 sean raíces simples, y -3 sea raíz de multiplicidad 3.

   b) $2-i$ y su conjugado sean raíces de multiplicidad 2.

   c) $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ sean raíces simples, y 0 sea raíz de múltiplicidad 2.

   d) las raíces sextas de 1 sean raíces de $p(x)$, y -1 sea raíz de multiplicidad 1.

2. Demuestre que $x=2$ es raíz de $p(x)=x^3+6x^2-x-30$:

   a) Usando la definición de raíz de un polinomio.

   b) Usando división euclidiana.

   c) Usando división sintética.

3. Considere el polinomio $p(x)=x^4-2x^3+6x^2-2x+5$.

   a) Usando división euclidiana, demuestre que $\pm i$ son raíces de multiplicidad 1 de $p(x)$.

   b) Determine todas las raíces complejas de $p(x)$.

4. Obtenga un polinomio cuadrático $q(x)$ de coeficientes reales,

   a) cuyas raíces sean $3+i$ y $3-i$.

b) cuyas raíces sean $a + bi$ y $a - bi$.

5. Considere el polinomio $p(x) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 8x - 20$.

   a) Usando división euclidiana, demuestre que $3 + i$ y $3 - i$ son raíces de $p(x)$.

   b) Obtenga todas las raíces de $p(x)$.

6. Obtenga un polinomio cuádratico $p(x)$, de coeficientes reales,

   a) cuyas raíces sean $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$.

   b) cuyas raíces sean $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$, con $b > 0$.

7. Considere el polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x - 1$

   a) Demuestre que no tiene raíces racionales.

   b) Demuestre que $1 \pm \sqrt{2}$ son raíces de $p(x)$.

   c) Obtenga todas las raíces complejas de $p(x)$ y factorizelo en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

8. Determine las raíces de cada polinomio siguiente y factorícelo completamente en $\mathbb{R}[x]$.

   a) $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$

   b) $p(x) = x^4 + 16x^2 + 64$

   c) $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

   d) $p(x) = 8x^3 - 20x^2 + 14x - 3$

   e) $p(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$

   f) $p(x) = x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

   g) $p(x) = x^6 - 64$

9. Determine el valor de k, de modo que

   a) $x + 2$ sea un factor de $x^3 - kx^2 + 3x + 10k$.

b) $x = 1$ sea raíz de $x^3 - 3x^2 + kx - 1$.

10. De una hoja rectangular de aluminio, de lados 20 cm y 16 cm, se debe construir una caja de 384 cm^2 de volumen y altura menor a 5 cm, recortando a la hoja cuadrados de igual tamaño en cada una de sus esquinas. ¿Cuál debe ser el tamaño de cada cuadrado?

11. Se desea construir un cubo y una pirámide de base rectangular, de modo que tengan mismo volumen. Además, la pirámide debe cumplir que

    - El ancho de su base debe ser una unidad mayor que la arista del cubo.
    - El largo de su base debe ser dos unidades mayor que la arista del cubo.
    - Su altura debe ser 2 unidades.

    Bajo estas condiciones, ¿cuánto debe medir la arista del cubo?

12. Un puente colgante de 2 metros de longitud está soportado por tres torres A, B y C, donde B está ubicado justo en la mitad del puente. El puente soporta una carga uniforme de $1000\frac{N}{m}$, por lo cual el puente se deforma. Se puede probar que el punto entre B y C donde la deformación es mayor, es un punto que está a x metros de A, el cual es solución de la ecuación

$$32x^3 - 156x^2 + 240x - 116 = 0.$$

    a) Demuestre que $x = 1$ es solución de esta ecuación.
    b) Obtenga todas las soluciones de esta ecuación (Use calculadora cuando sea necesario).
    c) ¿A cuántos metros de A se ubica el punto de deformación máxima que está entre B y C?

13. Descomponga la fracción en suma de fracciones parciales.

a) $\dfrac{3x+6}{(x-2)(x+4)}$

b) $\dfrac{2x}{(x-1)^3}$

c) $\dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}$

d) $\dfrac{1}{x^2(x^2+4)}$

e) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

f) $\dfrac{1}{1-x^4}$

g) $\dfrac{2x^3+x^2+5x-3}{(x+2)^2(x^2+1)}$

h) $\dfrac{4}{x^4-5x^2+4}$

i) $\dfrac{x+3}{x^3+x^2+x}$

Capítulo 7

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

7.1. Introducción.

En este capítulo, en primer lugar, estudiaremos matrices, las cuales son formadas disponiendo un cierto conjunto de números reales en forma rectangular. Un ejemplo es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Veremos que las matrices se pueden sumar, multiplicar, y además de resolver ecuaciones que las involucran. Por ejemplo, tenemos la suma

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -4 & 4 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -9 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

y la multiplicación

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & -2 & 7 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al mirar estos ejemplos, naturalmente nos preguntamos ¿cómo sumar dos matrices? ¿cómo multiplicar dos matrices? Una vez respondidas estas interrogantes, pueden surgir otras interrogantes, tales como: ¿cúal es la matriz elemento neutro de la suma? ¿cuál es la matriz elemento neutro de la multiplicación? Para una matriz dada, ¿existe una matriz opuesta aditiva e inversa multiplicativa?

Para un cierto tipo de matrices, también estudiaremos el llamado determinante de una matriz, el cual corresponde a un número que nos permite determinar si ésta tiene una matriz inversa multiplicativa.

Posterior a esto, usaremos las matrices para resolver sistemas de ecuaciones, cuya resolución es bastante más sencilla de este modo. Acá transformamos primero el sistema a su forma matricial, para después aplicar las llamadas operaciones fila de una matriz, las cuales nos permiten transformar nuestro sistema en uno más sencillo, de modo de obtener sus soluciones. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 1, \end{aligned}$$

matricialmente es expresado como

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 : 1 \\ 2 & -1 & 2 : 1 \\ 2 & -3 & 1 : 1 \end{pmatrix}.$$

Realizamos operaciones fila hasta obtener la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 : 0 \\ 0 & 1 & 0 : \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 : -\frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que la solución única es $x = 0, y = \frac{1}{5}, z = -\frac{2}{5}$.

7.2. Concepto de matriz.

Ejemplos de matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada: $B = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Una matriz columna: $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una matriz fila: $D = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Una matriz diagonal: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

,

$$\text{Una matriz identidad: } F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Una matriz simétrica: } G = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{1}{3} & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Una matriz antisimétrica: } H = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & \frac{1}{3} \\ -3 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 7.2.1. Informalmente, una **matriz** consiste en un conjunto de números reales (o complejos, aunque en este texto sólo estudiaremos matrices de números reales) que están dispuestos en forma rectangular. La **dimensión** (u orden) de una matriz corresponde al producto simbólico entre su número de filas y de columnas, en ese orden. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

tiene 4 filas y 3 columnas, por lo que decimos que su dimensión es 4×3. Por otro lado, cada número real de una matriz A se llama **elemento** de la matriz, y se denota por a_{ij}, donde i es la fila y j es la columna a la cual pertenece dicho elemento. En el caso de la matriz A recién propuesta, se tiene que

$$a_{23} = -4,$$

dado que -4 es el elemento que está en la segunda fila y tercera columna. Así también,

$$a_{12} = 2, a_{21} = 1, a_{43} = 5,$$

entre otros. Más formalmente, podemos entender una matriz como una función, que en un nuestro ejemplo corresponde a

$$\begin{aligned} A : \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3\} &\to \mathbb{R} \\ (i,j) &\mapsto A(i,j) := a_{ij}. \end{aligned}$$

Esta función, a cada par ordenado (i, j) le asocia el elemento de la matriz que pertenece a la fila i y a la columna j. En particular,

$$A(2,3) = -4 \text{ y } A(1,2) = 2.$$

Veamos la definición general:

Definición 7.2.1. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Se llama **matriz** sobre $\mathbb{R}$ a una función*

$$\begin{aligned} A : \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} &\to \mathbb{R} \\ (i,j) &\mapsto A(i,j) := a_{ij}, \end{aligned}$$

la cual es representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Cada a_{ij} es llamado **elemento** de la matriz, donde $i = 1,\ldots,m$ es la fila y $j = 1,\ldots,n$ es la columna a la cual pertenece tal elemento en la representación dada. Además, decimos que la matriz tiene **dimensión** (orden) $m \times n$, donde m es el número de filas y n el número de columnas. También podemos escribir $A = (a_{ij})$.*

El conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$ con valores en $\mathbb{R}$ se denota por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

7.3. Algunos tipos de matrices.

Al inicio del capítulo, vimos varios tipos de matrices. Retomemos esto:

Definición 7.3.1. *Una matriz es*

- *Una **matriz cuadrada**, si tiene igual número de filas y de columnas.*

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En este caso, como la matriz es de 2×2, decimos que es una matriz cuadrada de dimensión 2. En general, si una matriz es de dimensión $n \times n$, decimos que es una matriz cuadrada de dimensión n. El conjunto de matrices cuadradas de dimensión n es denotada por $M_n(\mathbb{R})$.

- *una **matriz columna**, si tiene una sóla columna.*

  Ejemplo:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

  Esta matriz tiene dimensión 4×1. En general, una matriz columna tiene dimensión $m \times 1$.

- *una **matriz fila**, si tiene 1 sóla fila.*

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene dimensión 1×3. En general, una matriz fila tiene dimensión $1 \times n$.

Observación 7.3.1. Queremos definir los restantes tipos de matrices propuestos al comienzo. Para ello daremos primero una importante definición. Considere la matriz cuadrada A con algunos elementos marcados:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ 8 & 9 & -2 & -2 \\ 6 & 11 & 0 & 1 \\ 10 & 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

La **diagonal principal** de esta matriz corresponde al conjunto de elementos marcados, es decir, al conjunto formado por los elementos

$$4, 9, 0, 4,$$

los cuales corresponden a los elementos

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44},$$

de la matriz A. Note que cada uno de ellos cumple que su número de fila y de columna en el cual está ubicado es el mismo.

En general, tenemos:

Definición 7.3.2. *Sea A una matriz de cuadrada de dimensión n. Llamamos* ***diagonal principal*** *de A al conjunto de elementos de la forma a_{ii}, con $i = 1, \ldots, n$.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Diagonal Principal}}$

Con el concepto de diagonal principal ya definido, vemos las definiciones restantes, las cuales corresponden a casos particulares de matrices cuadradas:

Definición 7.3.3. *Sea A una matriz cuadrada de dimensión n. Se tiene que*

- *A es una **matriz diagonal**, si cada elemento de A que no pertenece a la diagonal principal es 0.*

  Ejemplo:
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Es decir, una matriz es una matriz diagonal, si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ (Note que según la definición, algún elemento de la diagonal principal también puede ser 0).

- *A es una **matriz identidad**, si es una matriz diagonal donde cada elemento de la diagonal principal es 1.*

  Ejemplo:
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación 7.3.2. Las matrices identidad tienen especial relevancia en la multiplicación de matrices, la cual veremos más adelante.

Observación 7.3.3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 9 \\ 7 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

En ella se aprecia, una “simetría” de sus elementos con respecto a la diagonal principal. Para apreciar mejor esta “simetría”, trazamos algunas líneas en la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 9 \\ 7 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar, que en esta matriz tenemos que

$$a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}, a_{41} = a_{14}, a_{42} = a_{24}, a_{43} = a_{34}.$$

Esta matriz es un ejemplo de una matriz **simétrica**.

En general, tenemos que:

Definición 7.3.4. *Sea A una matriz cuadrada de dimensión n. Se dice que A es* ***simétrica*** *si*

$$a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Observación 7.3.4. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 & 7 \\ -5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 & -9 \\ -7 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Trazamos algunas líneas sobre esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 & 7 \\ -5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 & -9 \\ -7 & -1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que los elementos que están en posiciones simétricas con respecto a la diagonal principal, son opuestos aditivos entre sí. Es decir,

$$a_{12} = -a_{21}, a_{12} = -a_{21}, a_{13} = -a_{31}, a_{23} = -a_{32}, a_{41} = -a_{14}, a_{42} = -a_{24}, a_{43} = -a_{34}.$$

Además como

$$a_{11} = 0, \; a_{22} = 0, \; a_{33} = 0,$$

entonces

$$a_{11} = -a_{11}, a_{22} = -a_{22}, a_{33} = -a_{33}.$$

Esta matriz es un caso particular de una matriz **antisimétrica**.

Formalmente, tenemos que

Definición 7.3.5. *Sea A una matriz cuadrada de dimensión n. Se dice que A es antisimétrica si*

$$a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Observación 7.3.5. Intuitivamente, dos matrices A y B son iguales, si tienen los mismos elementos y en la misma posición. Por ejemplo, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

no son iguales, pero si lo son

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Expresamos esta idea en la siguiente definición:

Definición 7.3.6. *Se dice que dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ son* ***iguales*** *si*

$$a_{ij} = b_{ij},$$

para todo $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$.

7.4. Operaciones con matrices.

En esta sección estudiaremos tres operaciones con matrices:

- Suma de matrices
- Multiplicación de un escalar por una matriz
- Multiplicación de matrices

7.4.1. Suma de matrices.

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -4 & 4 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Note que A y B tienen la misma dimensión. La matriz $A + B$ corresponde a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+5 \\ -5-4 & 0+4 \\ -1+3 & -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -9 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, los elementos de $A + B$ se obtienen sumando cada elemento de A con el elemento que está en la misma posición en la matriz B. En general, tenemos que

Definición 7.4.1. *Sean $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. La* ***matriz suma*** *entre A y B, la cual es denotada por $A + B$, es la matriz dada por*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Observación 7.4.1. Note que $A + B$ es una matriz de la misma dimensión que A y que B.

Proposición 7.4.2. *(Propiedades de la suma de matrices, primera parte:)*

Sean A, B, C *tres matrices en* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Se tiene que:*

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$*. Es decir, la suma de matrices es asociativa.*

2) $A+B = B+A$*. Es decir, la suma de matrices es conmutativa.*

Ejercicio 7.4.1. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Obtenga una matriz X *que cumpla que* $A+X = X+A = A$.

Solución. Note que si

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A+X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = A,$$

y también

$$X+A = A.$$

Observación 7.4.2. La matriz X del ejemplo anterior, cuyos elementos son sólo ceros, recibe el nombre de **matriz nula** de dimensión 3×2 y se denota por θ. Es decir,

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para cualquier dimensión, una matriz nula es aquella donde todos sus elementos son 0.

Formalmente tenemos:

Definición 7.4.3. *Una matriz A en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama **matriz nula**, si*

$$a_{ij} = 0, \forall i = 1, \dots n,\ j = 1, \dots , m.$$

En este caso, A es denotada por $A := \theta$.

Ejercicio 7.4.2. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Obtenga una matriz B que cumple que $A + B = B + A = \theta$.

Solución. Observamos que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

cumple que

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta,$$

y también que

$$B + A = \theta.$$

□

Observación 7.4.3. En el ejercicio anterior, la matriz B, cuyos elementos son los opuestos aditivos de los elementos de A, recibe el nombre de **matriz opuesta de** A y se denota por $-A$, es decir

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

En general, la matriz opuesta de una matriz A, es aquella cuyos elementos son los opuestos aditivos de los elementos de A, ubicado cada elemento de la matriz opuesta en la misma posición que su elemento respectivo de A.

Más especifícamente tenemos:

Definición 7.4.4. *Sea A una matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. La matriz opuesta de A, corresponde a la matriz B, que cumple que*

$$b_{ij} = -a_{ij},\ \forall i = 1,\dots n,\ j = 1,\dots,m.$$

La matriz B es denotada por $B := -A$.

En general, tenemos las dos siguientes propiedades:

Proposición 7.4.5. *(Propiedades de la suma de matrices, segunda parte) Sea A una matriz en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se tiene que:*

*3) Existe una matriz θ en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamada **matriz nula**, tal que*

$$A + \theta = \theta + A = A.$$

*4) Existe una matriz $-A$ en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamada **matriz opuesta** de A, la cual satisface que*

$$A + (-A) = (-A) + A = \theta.$$

Definición 7.4.6. *Dadas dos matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define la **matriz diferencia** entre A y B, la cual es denotada como $A - B$, como*

$$A - B = A + (-B).$$

Ejercicio 7.4.3. *Encuentre la matriz X tal que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para encontrar la matriz X, podemos restar en ambos lados de la igualdad, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

De este modo, asociando y conmutando las matrices donde sea necesario, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

O sea

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

7.4.2. Producto de un escalar por una matriz.

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos el escalar 5 por la matriz A, obteniendo la matriz

$$5A = \begin{pmatrix} 5\cdot 0 & 5\cdot -4 & 5\cdot -3 & 5\cdot 6 \\ 5\cdot 6 & 5\cdot -2 & 5\cdot -1 & 5\cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -15 & 30 \\ 30 & -10 & -5 & -20 \end{pmatrix}.$$

Es decir, los elementos de la matriz $5A$ se obtienen multiplicando cada elemento de A por 5. En general, tenemos la definición:

Definición 7.4.7. *Si A es una matriz de dimensión $m \times n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo, se llama **producto del escalar** α **y la matriz** A a la matriz denotada por αA, la cual es tal que*

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

Observación 7.4.4. De la definición, deducimos que αA se obtiene multiplicando cada elemento de A por α. Note que la matriz αA tiene la misma dimensión que A.

Proposición 7.4.8. *(Propiedades del producto escalar por matriz) Sean A, B dos matrices en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene que:*

1) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$. Esta propiedad se puede entender como distributividad del escalar con respecto a la suma de matrices.

2) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$. Esta propiedad se puede entender como distributividad de la matriz con respecto a la suma de escalares.

3) $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A)$. Esta propiedad se puede entender como una especie de asociatividad, entre dos escalares y una matriz.

4) $1 \cdot A = A$. Lo que se afirma en esta propiedad, es que 1 es el elemento neutro de la multiplicación escalar por matriz.

Ejercicio 7.4.4. *Obtenga las matrices A y B que satisfacen el sistema*

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Solución. Resolvemos este sistema de ecuaciones matricial, tal como lo hacemos con un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son números reales.

Multiplicamos la primera ecuación por 2, y usando la propiedad 1) de producto escalar por matriz, logramos el sistema equivalente

$$2A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 8 & -6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Sumamos ambas ecuaciones, de lo cual se deduce que

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 18 & -9 & -12 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la última igualdad por $\frac{1}{3}$, y usando la propiedad 3) de producto escalar por matriz, obtenemos que

$$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 18 & -9 & -12 \end{pmatrix}.$$

O sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Reemplazamos la matriz A obtenida en la ecuación

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

y luego restamos A en ambos miembros de la igualdad obtenida, deduciendo que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

7.4.3. Multiplicación de matrices.

Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que A es de dimensión 2×3, y que B es de dimensión 3×4. Es decir, el número de columnas de A, coincide con el número de filas de B, por lo que es posible obtener la matriz producto AB. La matriz AB tiene dimensión 2×4, es decir, el mismo número de filas de A y el mismo número de columnas de B:

dimensión de AB

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 4}=(AB)_{2\times 4}$$

iguales

Obtenemos el producto AB del siguiente modo:

- Queremos obtener el elemento d_{11} de AB. Para ello consideramos la primera fila de A, la cual llamaremos f_1 y la primera columna de B, la cual llamaremos c_1:

$$AB=\begin{array}{c} f_1 \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\cdot\begin{array}{l} c_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}=\begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Multiplicamos el primer elemento de f_1, el cual es 2, con el primer elemento de c_1, el cual es 1. A lo obtenido le sumamos la multiplicación entre el segundo elemento de f_1, es decir -1, con el segundo elemento de c_1, el cual es 0. Y a lo obtenido, le sumamos la multiplicación del último elemento de f_1, el cual es 4, con el último elemento de c_1, el cual es 3

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Es decir, tenemos la suma

$$2\cdot 1+(-1)\cdot 0+4\cdot 3,$$

la cual nos da como resultado 14, valor que corresponde a d_{11}. De este modo, lo que llevamos hasta el momento es

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- Para obtener el elemento d_{12} de AB, consideramos aún la primera fila f_1 de A, pero ahora con la segunda columna de B, llamada c_2:

$$AB = \begin{array}{c} f_1 \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} c_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 14 & d_{12} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Realizamos un procedimiento análogo al que se realizó para obtener d_{11}, es decir, multiplicamos los primeros, segundos y terceros términos de f_1 y c_2 entre sí, y luego sumamos,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & d_{12} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

obteniendo que

$$d_{12} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = 11.$$

De este modo, lo que llevamos realizado hasta el momento es

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

- Aún construyendo la primera fila de AB, queremos obtener d_{13}. Para ello consideramos la primera fila f_1 de A y la tercera columna de B, llamada c_3. Procediendo del mismo modo al como se obtuvo d_{11} y d_{12}, obtenemos que $d_{13} = -2$. Finalmente, para obtener d_{14}, consideramos aún la primera fila f_1 de A y la cuarta columna de B, la cual llamamos c_4, y procedemos de forma análoga. De este modo, $d_{14} = 7$. Es decir, hasta el momento, tenemos que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & -2 & 7 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

- Para obtener los elementos de la segunda fila de AB, es decir $d_{21}, d_{22}, d_{23}, d_{24}$, usamos la segunda fila de A, llamada f_2, con la columna c_1, c_2, c_3, c_4 de B respectivamente. En cada caso, realizamos el procedimiento análogo, obteniendo finalmente que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 & -2 & 7 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En general, si tenemos una matriz A de dimensión $m \times n$ y una matriz B de dimensión $n \times p$, podemos obtener la matriz AB, la cual tendrá dimensión $m \times p$. El elemento d_{ij} de AB se obtiene operando la fila i de A con la columna j de B. Más específicamente, tenemos que

$$d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Note que en la última igualdad, el primer término $a_{i1}b_{1j}$ corresponde al producto del primer término de la fila i, el cual es a_{i1}, con el primer término de la columna j, el cual es b_{1j}. Además, el segundo término de esta suma corresponde al producto de los segundos términos de la fila i y la columna j, y así sucesivamente para el resto de los términos. De este modo, tenemos la siguiente definición:

Definición 7.4.9. *Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, la **matriz producto** entre A y B, denotada por AB, es la matriz de $M_{m\times p}(\mathbb{R})$ definida como*

$$AB = (d_{ij}),$$

donde

$$d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Ejercicio 7.4.5. *Obtenga, el producto AB y BA para*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

¿Es cierto que $AB = BA$?

Solución. Pretendemos realizar el producto AB. Vemos que A tiene dimensión 2×3 y B tiene dimensión 3×2. Como el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, entonces es posible efectuar AB, la cual es una matriz cuadrada de dimensión 2. En efecto,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, queremos efectuar el producto BA. Como el número de columnas de B coincide con el número de filas de A, entonces podemos obtener BA, la cual es una matriz cuadrada de dimensión 3. En efecto,

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

De este modo, es evidente que $AB \neq BA$, dado que ni siquiera tienen la misma dimensión. $\square$

Observación 7.4.5. En general, el producto de matrices no es conmutativo.

Proposición 7.4.10. *(Propiedades del producto de matrices)*

1) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ y $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, entonces

$$(AB)C = A(BC).$$

Es decir, el producto de matrices es asociativo.

2) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y* $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, *entonces*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Es decir, el producto de matrices es distributivo por izquierda.

3) Si $B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ *y* $D \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$, *entonces:*

$$(B+C)D = BD + CD.$$

Es decir, el producto de matrices es distributivo por derecha (note que distributividad por derecha no es lo mismo que distributividad por izquierda, dado que en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa).

4) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Es decir, existe una especie de asociatividad entre el producto escalar por matriz y el producto de matrices.

Ejercicio 7.4.6. *Sean* a, b, c, d *números reales. Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *y la matriz identidad* I *de dimensión* 2, *obtenga* AI *y* IA.

Solución. Vemos que A e I son matrices cuadradas de dimensión 2, por lo que es posible efectuar ambas multiplicaciones. De este modo,

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

Por otro lado,

$$I \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

□

Observación 7.4.6. Como en el ejercicio anterior, A es una matriz cualquiera de 2×2, entonces concluimos que la matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es el elemento neutro para la multiplicación de matrices de 2×2. En general, si $n \in \mathbb{N}$, entonces la matriz identidad I de $n\times n$ es el elemento neutro para la multiplicación de matrices de $n \times n$, lo cual se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 7.4.11. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $I \in M_n(\mathbb{R})$ es la matriz identidad, entonces*

$$AI = IA = A.$$

Ejercicio 7.4.7. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determine una matriz cuadrada X de dimensión 2, de modo que

$$AX = XA = I.$$

Solución. La matriz incógnita es

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

De este modo

$$AX = I,$$

corresponde a

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando las matrices del miembro izquierdo de la última igualdad, deducimos la igualdad

$$\begin{pmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.4.1}$$

Como dos matrices son iguales, cuando tienen los mismos elementos y en la misma posición, entonces de (7.4.1), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a + 5c = 1 \\ 2b + 5d = 0 \\ a + 3c = 0 \\ b + 3d = 1 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, se deduce que $b = -\frac{5}{2}d$. Reemplazando esta expresión en la cuarta ecuación, obtenemos que $d = 2$, por lo tanto $b = -\frac{5}{2} \cdot 2 = -5$. De la tercera ecuación, tenemos que $a = -3c$. Si reemplazamos esta expresión en la primera ecuación, obtenemos que $c = -1$, y luego $a = -3 \cdot (-1) = 3$. De este modo, nuestra matriz incógnita es

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ya conociendo esta matriz, probamos

$$XA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

De este modo, X satisface que

$$AX = XA = I.$$

□

Observación 7.4.7. En el contexto de matrices cuadradas de dimensión 2 (y en general para matrices cuadradas de dimensión n), sabemos que la matriz identidad I es el elemento neutro de la multiplicación. De este modo, la matriz X obtenida en el ejercicio anterior, es denominada **matriz inversa** de la matriz A dada, y es denotada por A^{-1}. Es decir,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 7.4.12. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es* ***invertible*** *si existe una matriz cuadrada $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que*

$$AX = XA = I,$$

donde I es la matriz identidad de dimensión n. La matriz X es denotada por $X := A^{-1}$, y se denomina la ***matriz inversa*** *de A.*

A partir del ejercicio anterior, nos surgen algunas interrogantes:

- ¿Toda matriz cuadrada posee matriz inversa? Si no es así, ¿qué tipo de matrices cuadradas poseen matriz inversa?

- Si una matriz posee matriz inversa, ¿esta es única?

- Si una matriz posee matriz inversa, ¿cómo obtenerla?

Estas preguntas las iremos respondiendo a lo largo del capítulo.

Proposición 7.4.13. *Se tiene que*

- *Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.*

- *Si A es invertible, entonces A^{-1} también es invertible y $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. Es decir, la inversa de la inversa de una matriz es sí misma.*

7.5. Operaciones fila en una matriz dada.

Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, llamamos **operación elemental fila** en A a cualquiera de las siguientes operaciones:

- **Intercambiar dos filas de A.**

  Ejemplo: En la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -2 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

intercambiamos la fila 1 con la fila 3, lo cual se denota como $f_1 \to f_3$. De este modo, obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -13 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

En general, si en una matriz A, se intercambia la fila i con la fila j, esto se denota como

$$f_i \to f_j.$$

- **Multiplicar una fila de A por un escalar $\alpha \neq 0$:**

  Ejemplo: En la matriz

  $$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

  multiplicamos la fila 2 por el escalar $\alpha = 3$, lo cual se denota como $f_2 \to 3f_2$. Así, obtenemos la matriz

  $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 12 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

  En general, si en una matriz A, se multiplica la fila i por el escalar α, esto se denota como

  $$f_i \to \alpha f_i.$$

- **Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra fila:**

  Ejemplo: En la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

  sustituimos la fila 1, por la suma de la fila 1 con 3 veces la fila 2, lo cual se denota como $f_1 \to f_1 + 3f_2$. Se tiene que

f_1	1	8	2	-1
$3f_2$	9	12	3	12
$f_1 + 3f_2$	10	20	5	11

  De este modo, la nueva matriz es

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 11 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

  En general, si en una matriz A cambiamos la fila i, por la suma de la fila i con la multiplicación de α con la fila j, esto se denota por

$$f_i \to f_i + \alpha f_j.$$

Definición 7.5.1. *Sean $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A y B son **equivalentes por filas**, lo cual se denota como $A \sim B$, si B es obtenida aplicándole una o varias operaciones elementales de filas a A, o viceversa.*

Ejercicio 7.5.1. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -2 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Mediante operaciones fila, transforme A en la matriz identidad de dimensión 3.

Solución. A partir de la matriz A, queremos obtener la matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como primer paso, el elemento $a_{11} = 2$, debe ser transformado en un 1. Para tal efecto, intercambiamos la fila 1 con la fila 3, es decir $f_1 \to f_3$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -13 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Nuestro trabajo será hecho por columnas y siempre tomando en cuenta la matriz obtenida en el último paso. Continuamos en la primera columna, ahora con el elemento $a_{21} = -2$, el cual debe ser transformado en un 0. Para tal efecto, aprovechando el 1 de la primera fila, realizamos la operación $f_2 \to f_2 + 2f_1$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Para terminar con la primera columna, queremos transformar $a_{31} = 2$ en 0. Para tal efecto, y aprovechando el 1 de la primera fila, realizamos $f_3 \to f_3 - 2f_1$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Seguimos con la segunda columna. Hacemos primero el 1 de esta columna, en la posición a_{22}, el cual nos servirá luego para hacer los ceros. Realizamos $f_2 \to f_3$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la segunda columna, nos falta sólo el 0 en $a_{12} = -2$. Usamos la fila del 1 de esta columna, es decir f_2, y hacemos $f_1 \to f_1 + 2f_2$, logrando

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, completamos la tercera columna. Debemos hacer primero el 1 en a_{33}, pero ya está listo. Hacemos 0 en $a_{13} = 1$. Para ello usamos la fila del 1 de esta columna, es decir f_3, y realizamos $f_1 \to f_1 - f_3$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente hacemos 0 en $a_{23} = -3$. Haciendo $f_2 \to f_2 + 3f_3$ (note que nuevamente usamos la fila del 1 de esta columna, es decir f_3), obtenemos la matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ejercicio 7.5.2. *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Usando operaciones fila, transforme A en la matriz identidad. En simultáneo, aplique las mismas operaciones fila a la matriz identidad, obteniendo una matriz la cual llamaremos B.

Solución. Para hacer más efectivo nuestro trabajo, formamos la llamada matriz ampliada $(A:I)$, la cual consiste en

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & :1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & :0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & :0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, ampliamos la matriz A con la matriz identidad. De este modo, las operaciones fila que le apliquemos a A, también se las aplicaremos en simultáneo a I. Al igual que en el ejercicio anterior, trabajaremos por columnas, haciendo primero el 1 de cada columna y luego los ceros (de hecho, tal como en el ejemplo anterior, usaremos la fila del 1 de cada columna para hacer los ceros respectivos). De este modo:

- Haciendo $f_3 \to f_1$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & :0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & :0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & :1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $f_2 \to f_2 - 2f_1$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & :0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & :0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & :1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $f_3 \to f_3 - 3f_1$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & :0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & :0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -13 & :1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Partimos con la segunda columna. Queremos hacer un 1, en $a_{22} = -3$. Para tal efecto, hacemos $f_2 \to -\frac{1}{3}f_2$, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & :0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & :0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -5 & -13 & :1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Hacemos $f_3 \to f_3 + 5f_2$, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & :0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & :0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & :1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- Para terminar con la segunda columna, hacemos $f_1 \to f_1 - 2f_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & :0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & :0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & :1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- Para hacer el 1 de la tercera columna, hacemos $f_3 \to 3f_3$, logrando la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & :0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{8}{3} & :0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & :3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Hacemos un 0 en $a_{23} = \frac{8}{3}$, realizando $f_2 \to f_2 - \frac{8}{3}f_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & :0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & :-8 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & :3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Hacemos un 0 en $a_{13} = -\frac{4}{3}$ con $f_1 \to f_1 + \frac{4}{3}f_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & :4 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & :-8 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & :3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

De este modo, hemos transformado la matriz A en la matriz identidad y en simultáneo, la matriz identidad en la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Nos preguntamos: ¿qué relación existe entre la matriz A y la matriz B del ejercicio anterior? Para responder a esta pregunta, necesitamos de un poco más de teoría:

Observación 7.5.1. Cuando a una matriz C le aplicamos una operación fila F, la matriz resultante la podemos denotar por $F(C)$.

Teorema 7.5.2. *Sean $A \in M_n(\mathbb{R})$ y F una operación elemental de filas. Entonces*

$$F(A) = F(I) \cdot A$$

donde I es la matriz identidad de dimensión n.

Observación 7.5.2. Este teorema nos dice que aplicar una operación fila a una matriz A, es lo mismo que aplicar esa operación fila a la matriz identidad y luego multiplicar la matriz resultante por A.

Observación 7.5.3. Si a una matriz C le aplicamos sucesivamente las m operaciones fila $F_1, F_2, \ldots, F_m$, en ese orden, entonces la matriz resultante la podemos denotar por $(F_m \cdots F_2 F_1)(C)$.

Una versión más general del teorema anterior, es el siguiente corolario:

Corolario 7.5.3. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y $F_1, F_2, \ldots, F_m$ son operaciones elementales de filas, entonces*

$$(F_m \cdots F_2 F_1)(A) = (F_m \cdots F_2 F_1)(I) \cdot A$$

Observación 7.5.4. El corolario anterior nos afirma que aplicar una cantidad fija de operaciones fila a una matriz A, es lo mismo que aplicarle esas operaciones fila a la matriz identidad y luego multiplicar la matriz resultante por A.

Ahora estamos en condiciones de responder nuestra última pregunta. Note que en el ejercicio anterior, aplicamos 9 operaciones fila a A y obtuvimos la matriz identidad. Es decir, en nuestro caso

$$(F_9 \cdots F_2 F_1)(A) = I. \tag{7.5.1}$$

Por otro lado, aplicamos las mismas operaciones fila a I y obtuvimos la matriz B. Es decir

$$(F_9 \cdots F_2 F_1)(I) = B. \tag{7.5.2}$$

Según el corolario anterior

$$(F_9 \cdots F_2 F_1)(A) = (F_9 \cdots F_2 F_1)(I) \cdot A.$$

Reemplazando (7.5.1) y (7.5.2) en la última igualdad, obtenemos que

$$I = B \cdot A.$$

Es decir, la matriz B corresponde a la matriz inversa de A, o sea $B = A^{-1}$. Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general, podemos obtener la inversa de una matriz A efectuando operaciones elementales de filas en la matriz ampliada $(A : I)$ hasta obtener la matriz $(I : B)$. En tal caso $B = A^{-1}$.

Si no es posible transformar A en la matriz identidad, entonces A no posee matriz inversa. Esto se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema 7.5.4. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matriz A es invertible, si y sólo si, es equivalente por filas a la matriz identidad I de dimensión n.*

7.6. Determinantes.

Ejercicio 7.6.1. *Determine, si es que existe, la matriz inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Formamos la matriz $(A : I)$, y efectuando operaciones fila, obtendremos $(I : A^{-1})$. Note que

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos $f_1 \to \frac{1}{5}f_1$:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hacemos $f_2 \to f_2 - 4f_1$:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right).$$

Si $f_2 \to \frac{5}{6}f_2$:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right).$$

Finalmente, haciendo $f_1 \to f_1 - \frac{1}{5}f_2$, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{array}\right).$$

De este modo, A es invertible, con

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Note que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix},$$

o sea

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Al comparar esta matriz con $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, sospechamos que A^{-1} se obtiene cambiando de posición entre sí los elementos 2 y 5 de la diagonal principal, cambiando el signo de los elementos 1 y 4 de la otra diagonal y multiplicando la matriz resultante por $\frac{1}{6} = \frac{1}{5 \cdot 2 - 1 \cdot 4}$. De este modo, nuestra conjetura es

Conjetura 7.1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Veamos que pasa con otra matriz cuadrada de 2×2:

Ejercicio 7.6.2. *Determine, si es que existe, la matriz inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución. Note que

$$(A : I) = \begin{pmatrix} 2 & 6 : 1 & 0 \\ 1 & 3 : 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $f_1 \to f_2$, entonces

$$(A : I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 : 0 & 1 \\ 2 & 6 : 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $f_2 \to f_2 - 2f_1$, entonces

$$(A : I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 : 0 & 1 \\ 0 & 0 : 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz A se transformó en una matriz cuya segunda fila tiene sólo ceros, entonces A no es equivalente por filas a la matriz identidad I (es decir, a partir de A, usando operaciones fila, no podemos obtener la matriz identidad). De este modo, A^{-1} no existe. $\square$

Vemos que para la matriz A del ejemplo anterior, se tiene que

$$ad - bc = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Esto nos hace formular una segunda conjetura:

Conjetura 7.2. La matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible, si y sólo si, $ad - bc \neq 0$.

Definición 7.6.1. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz cuadrada de dimensión 2. El ***determinante*** *de A, denotado por $det(A)$ (o $|A|$), corresponde al número real*

$$det(A) = ad - bc.$$

Definimos ahora el determinante de una matriz cuadrada de dimensión mayor a 2. En particular, partimos con una matriz de 3×3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Escogemos la primera fila de A. Consideramos el primer elemento de esta fila, es decir, $a_{11} = 2$, y tachamos la fila y la columna a la cual pertenece a_{11}:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-6} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & 1 & -3 \\ \cancel{4} & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideramos el número

$$2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix},$$

el cual se calcula multiplicando a_{11} por -1 elevado a la suma del número de fila más el número de columna a la cual pertenece a_{11}, y todo esto multiplicado por el determinante de la matriz sobrante de tachar la fila y columna a la cual pertenece a_{11} (la cual es de 2×2).

Análogamente a lo hecho con a_{11}, ahora nos centramos en $a_{12} = -6$. Tachamos la fila y la columna a la cual pertenece a_{12}:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-6} & \cancel{4} \\ 2 & \cancel{1} & -3 \\ 4 & \cancel{-3} & -1 \end{pmatrix}$$

y calculamos el número

$$(-6) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

el cual consiste en a_{21} por -1 elevado a la suma del número de fila más el número de columna a la cual pertenece a_{21} y por el determinante de la matriz sobrante de tachar la fila y columna a la cual pertenece a_{21}. Si hacemos similar procedimiento para $a_{13} = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-6} & \cancel{4} \\ 2 & 1 & \cancel{-3} \\ 4 & -3 & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

obtenemos el término

$$4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

El determinante de la matriz A, corresponde a la suma de los tres términos obtenidos en este proceso, es decir

$$det(A) = 2 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-6) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

O sea

$$det(A) = 2 \cdot (-1 - 9) + 6 \cdot (-2 + 12) + 4 \cdot (-1 - 9) = 0.$$

En general, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es una matriz de 3×3, entonces, considerando la primera fila de A, obtenemos el determinante de A tal como en el ejemplo recién dado, es decir

$$det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Sin embargo, podemos escoger cualquier fila de la matriz en cuestión, y realizar el procedimiento análogo para calcular su determinante, obteniendo el mismo valor. Por ejemplo, si queremos calcular el determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

nos conviene escoger la fila 3, dado que tiene dos ceros, lo cual nos facilita el cálculo del determinante. Luego,

$$det(B) = 0 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

El primer y segundo término son nulos, por lo que

$$det(B) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Usted mismo puede comprobar que escogiendo otra fila de B, ya sea la primera o la tercera, se tiene que $det(B) = -1$.

¿Qué relación tiene la forma en la cual definimos el determinante de una matriz de 3×3 con el cómo definimos el determinante de una matriz de 2×2? Veamos:

Pensemos primero en una matriz de 1×1, $A = (a_{11})$. Definimos el determinante de A como

$$det(A) = a_{11}.$$

Es decir, el determinante de una matriz de 1×1 corresponde al valor de su único elemento.

Consideremos la matriz A de 2×2 definida por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Intentamos calcular el determinante de A, escogiendo una fila, tal como lo hicimos con las matrices de 3×3. Escogemos la fila 1, y tachamos la fila y la columna de a:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{pmatrix},$$

obteniendo el término

$$a \cdot (-1)^2 det(d).$$

Por otro lado, tachando a fila y la columna de b:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{pmatrix}$$

obtenemos el término

$$b(-1)^{1+3} det(c).$$

De este modo,

$$det(A) = a \cdot (-1)^2 det(d) + b(-1)^{1+3} det(c).$$

O sea

$$det(A) = ad - bc,$$

la cual es justamente la definición del comienzo de esta sección. Tal como en el caso de las matrices de 3×3, podemos probar que el valor $ad - bc$ obtenido es independiente de la fila escogida.

En general, si A es una matriz cuadrada de $n \times n$, se tiene que:

- Si $n = 1$, y $A = (a)$ entonces $\det A = a$.
- Si $n > 1$, escogemos la fila i. Consideramos las matrices

$$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in},$$

correspondientes a eliminar fila y la columna a la cual pertenece

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in},$$

respectivamente. De este modo,

$$det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1} det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} det A_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} det A_{in}.$$

Más formalmente, tenemos la siguiente definición:

Definición 7.6.2. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. El* ***determinante*** *de la matriz A, el cual es denotado por $det(A)$ (o $|A|$), es tal que*

- *Si $n = 1$ y $A = (a_{11})$, se tiene que* $\det(A) = a_{11}$.
- *Si $n > 1$, y A_{ij} es la matriz de cuadrada obtenida de A eliminándole la fila i y la columna j, entonces*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A_{ij}),$$

para cualquier $i = 1, \ldots, n$.

Observación 7.6.1. Sólo en el caso de matrices de 3×3, podemos calcular su determinante a partir de un método llamado **Regla de Sarrus**. Veamos un ejemplo. Queremos calcular

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix},$$

el cual ya vimos que corresponde a 0. Usemos la regla de Sarrus para obtener este mismo valor. Ampliamos la matriz A con dos columnas más, las cuales corresponden a sus dos primeras columnas, denotando esto como

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 & : 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 & : 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & : 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Tachamos 3 diagonales, las cuales decrecen hacia la derecha, tal como muestra la figura:

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 & : 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 & : 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & : 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos entre sí los elementos de cada diagonal tachada y luego sumamos lo obtenido, de este modo

$$det(A) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-6) \cdot (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot (-3) + \ldots \tag{7.6.1}$$

Para completar el cálculo de $det(A)$, tachamos otras 3 diagonales, las cuales crecen hacia la derecha, tal como muestra la figura:

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 & : 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 & : 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & : 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Multiplicamos entre sí los elementos de cada nueva diagonal tachada, y cada multiplicación obtenida la restamos a lo logrado en (7.6.1), de lo cual obtenemos que

$$det(A) = 2\cdot 1\cdot(-1)+(-6)\cdot(-3)\cdot 4+4\cdot 2\cdot(-3)-4\cdot 1\cdot 4-(-3)\cdot(-3)\cdot 2-(-1)\cdot 2\cdot(-6).$$

Por lo tanto,

$$det(A) = -2 + 72 - 24 - 16 - 18 - 12 = 0.$$

En general, la regla de Sarrus nos permite calcular el determinante de una matriz de 3×3:

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

- Ampliando la matriz en cuestión con sus dos primeras columnas.
- Tachando 6 diagonales, tal como en la figura.
- Realizando el producto entre los elementos de cada diagonal.
- Sumando los productos de las diagonales decrecientes hacia la derecha (en línea continua en la figura) y restando los productos de las diagonales crecientes hacia la derecha (en línea punteada en la figura).

Lo obtenido en este último paso, corresponde al valor del determinante de la matriz dada.

Ejercicio 7.6.3. *Calcule el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución. Podemos escoger cualquier fila de A para calcularlo. En este caso, escogemos la tercera fila, dado que contiene más ceros. De este modo, en virtud de la definición de determinante, tenemos que

$$det(A) = (-1)(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7.6.2}$$

Ahora debemos calcular los determinantes de 3×3 presentes en cada término de (7.6.2). Para ello podemos usar la regla de Sarrus. En efecto,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & : 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & : 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & : -1 & 1 \end{vmatrix} = 5-2-8-4-2-10 = -21$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & : 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & : 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & : -1 & -3 \end{vmatrix} = 3-1-6+3+3 = 2.$$

De este modo, de lo obtenido y (7.6.2), se deduce que

$$det(A) = -21 + 2 = -19.$$

$\square$

Durante nuestro capítulo, consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

para las cuales $det(A) = 0$ y $det(B) = -1$. Usando operaciones fila, podemos comprobar que

- A no es invertible.
- B es invertible, con

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estos ejemplos, nos dan lugar a plantear la siguiente conjetura general:

Conjetura 7.3. Sea A una matriz cuadrada de dimensión n. Se tiene que A es invertible, si y sólo si, $det(A) \neq 0$.

7.6.1. Propiedades de los determinantes.

Ejercicio 7.6.4. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de $det(A)$?

Solución. Escogiendo la tercera fila para calcular $det(A)$, obtenemos que todos los sumandos se anulan, por lo que $det(A) = 0$. □

El ejercicio anterior se generaliza como sigue:

Proposición 7.6.3. Si A tiene una fila nula, entonces $\det(A) = 0$.

Veamos una propiedad de las matrices diagonales:

Proposición 7.6.4. Si A es una matriz diagonal, entonces $det(A)$ se obtiene multiplicando todos los elementos de su diagonal principal, es decir

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Apliquemos la propiedad recién mencionada:

Ejercicio 7.6.5. *Obtenga $det(I)$, para I la matriz identidad de 3×3.*

Solución. La matriz I es

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como I es una matriz diagonal, entonces en virtud de la propiedad anterior, su determinante es

$$det(I) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

$\square$

En general, tenemos que:

Proposición 7.6.5. Si I_n es la matriz identidad de $n \times n$, entonces $det(I_n) = 1$.

Ejercicio 7.6.6. *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si a A realizamos la operación fila $f_2 \to f_3$, entonces obtenemos B. ¿Qué relación existe entre los determinantes de A y de B?

Solución. Usando la definición de determinante o la regla de Sarrus, se deduce que

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

y

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

por lo que sus determinantes son opuestos aditivos entre sí. Es decir,

$$det(B) = -det(A).$$

$\square$

En general, tenemos que:

Proposición 7.6.6. Si F es una operación elemental de filas que intercambia dos filas de A, y si $B = F(A)$, entonces $\det(B) = -\det(A)$.

Ejercicio 7.6.7. *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que si a A le aplicamos la operación fila $f_1 \to 3f_1$, entonces obtenemos B. ¿Qué relación existe entre los determinantes de A y de B?

Solución. Del ejercicio anterior, tenemos que $det(A) = 1$. Por otro lado, calculamos $det(B)$. Usando la regla de Sarrus, se tiene que

$$det(B) = \begin{vmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 9 = 3.$$

Es decir ,

$$det(B) = 3 \cdot det(A).$$

$\square$

El ejercicio anterior es un caso particular de la siguiente propiedad:

Proposición 7.6.7. Si F es una operación elemental de filas que multiplica una fila de A por un escalar α, y si $B = F(A)$, entonces $\det(B) = \alpha \det(A)$.

Ejercicio 7.6.8. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) *Dado el escalar α, obtenga la matriz αA.*

Solución. La matriz pedida es

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 2\alpha & -3\alpha & \alpha \\ 0 & 2\alpha & -2\alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

b) *¿Qué relación existe entre los determinantes de A y de αA?*

Solución. Usando la regla de Sarrus obtenemos que

$$det(A) = -2.$$

Por otro lado, la matriz αA se puede obtener multiplicando cada fila de A por α. Es decir, aplicando las operaciones fila $f_1 \to \alpha f_1$, $f_2 \to \alpha f_2$, $f_3 \to \alpha f_3$ a la matriz A. De este modo, en base a la proposición 7.6.7, concluimos que

$$det(\alpha A) = \alpha^3 det(A).$$

O sea,

$$det(\alpha A) = -2\alpha^3.$$

□

La generalización del ejercicio anterior es

Proposición 7.6.8. Si A es una matriz cuadrada de dimensión n y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$det(\alpha A) = \alpha^n det(A).$$

Ejercicio 7.6.9. *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que si a A le aplicamos la operación fila $f_2 \to f_2 + 2f_3$, entonces obtenemos la matriz B. ¿Qué relación existe entre los determinantes de A y de B?

Solución. Ya vimos que $det(A) = 1$. Por otro lado, usando la regla de Sarrus, obtenemos que

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 8 - 3 = 1,$$

por lo que $det(B) = det(A)$. □

Generalizamos el ejercicio anterior:

Proposición 7.6.9. Si F es una operación elemental de filas que suma un múltiplo escalar α de la fila i a la fila j, y si $B = F(A)$, entonces $\det(B) = \det(A)$.

Ejercicio 7.6.10. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que A tiene dos filas iguales, f_1 y f_2. Si restamos estas dos filas, más específicamente, si aplicamos la operación fila $f_1 \to f_1 - f_2$, obtenemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $det(B) = 0$. ¿Cuál es el valor de $det(A)$?

Solución. La matriz B se obtiene aplicándole a A la operación fila $f_1 \to f_1 - f_2$, por lo que

$$det(A) = det(B) = 0.$$

En general,

Proposición 7.6.10. Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$.

Ejercicio 7.6.11. *Considere las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) *Obtenga AB.*

Solución. Se tiene que

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 10 & 38 \end{pmatrix}.$$

b) *Obtenga $det(A), det(B)$ y $det(AB)$. ¿Qué relación existe entre los valores obtenidos?*

Solución. Note que

$$det(A) = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 2$$

y

$$det(B) = 1 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = -4.$$

Además,

$$det(AB) = 38 \cdot 4 - 16 \cdot 10 = -8.$$

De este modo,

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B).$$

□

Se tiene en general que

Proposición 7.6.11. Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, entonces

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Observación 7.6.2. Es decir, el determinante del producto de matrices, es el producto de los determinantes.

Ejercicio 7.6.12. *Considere una matriz A cuadrada de dimensión n. Suponga que A es invertible. ¿Qué relación existe entre el determinante de A y de A^{-1}?*

Solución. De la propiedad 7.6.11, se deduce que

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}). \tag{7.6.3}$$

Por otro lado, como $A \cdot A^{-1} = I$, entonces

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1. \tag{7.6.4}$$

De (7.6.3) y (7.6.4), se tiene que

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1,$$

por lo que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

De este modo,

Proposición 7.6.12. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Se tiene que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Una consecuencia de la propiedad anterior es:

Proposición 7.6.13. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A es invertible entonces $det(A) \neq 0$.*

Observemos que esta proposición corresponde a una de las implicancias de nuestra última conjetura 7.2.

Observación 7.6.3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Formamos una matriz B, cuyas columnas son las filas de A:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -7 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es decir, de A a B, la fila 1 pasó a ser la columna 1, la fila 2 pasó a ser la columna 2, y la fila 3 pasó a ser la columna 3. La matriz B es denominada matriz **transpuesta** de A, y se denota por A^t. O sea,

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -7 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por a_{ij} a cada elemento de A, y por b_{ij} a cada elemento de A^t, entonces, dado que intercambiamos filas con columnas, se cumple que

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para todo $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3, 4$.

En general, tenemos que:

Definición 7.6.14. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$. La matriz* ***transpuesta*** *de A, la cual es denotada por A^t, corresponde a la matriz cuyos elementos b_{ij} se definen por*

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m.$$

Ejercicio 7.6.13. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) *Obtenga el determinante de A.*

Solución. Por la regla de Sarrus, se tiene que

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 4 + 12 = 21.$$

b) *Obtenga A^t.*

Solución. Intercambiando en A, las filas con las columnas, obtenemos que

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) *Obtenga el determinante de A^t. ¿Qué relación existe entre los determinantes de A y de A^t?*

Solución. Esta vez lo calcularemos usando la definición de determinante. Escogemos la segunda fila de A^t para calcularlo. Se tiene que

$$det(A^t) = -3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 21.$$

Por lo tanto

$$\det(A) = \det(A^t).$$

$\square$

Proposición 7.6.15. Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces

$$\det(A) = \det(A^t).$$

Observación 7.6.4. Note que, tal como en el ejercicio anterior, podemos calcular $\det(A^t)$, escogiendo una fila de A^t y usando la definición de determinante. Pero esto es lo mismo que haber calculado $\det(A)$ escogiendo una columna de A. Como los determinantes de A y de A^t coinciden, entonces para calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada A, podemos usar la definición, pero escogiendo una columna de A. Por ejemplo, si queremos calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

nos es conveniente escoger la segunda columna de A, de donde obtenemos que

$$det(A) = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 30.$$

7.7. Matriz de cofactores.

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para cada elemento a_{ij} de A calcularemos su llamado **cofactor**, el cual corresponde a

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

donde A_{ij} corresponde a la matriz obtenida luego de eliminar la fila y la columna a la cual pertenece a_{ij}. De este modo,

- El cofactor de $a_{11} = 3$ es

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Por otro lado,

$$c_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \text{ y } c_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

- Además,

$$c_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,\ c_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \text{ y } c_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

- Finalmente,

$$c_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ c_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \text{ y } c_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Con todos los cofactores obtenidos, formamos la llamada **matriz de cofactores** de A, la cual se denota por $cof(A)$. Esta matriz es

$$cof(A) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -6 & 13 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La transpuesta de la matriz de cofactores, se denomina **matriz adjunta** de A, y se denota por $adj(A)$. Así,

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para finalizar, multiplicamos esta matriz por $\frac{1}{\det(A)}$, pero como $det(A) = 1$, entonces

$$B = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -8 & 13 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que, de lo hecho en la sección anterior, específicamente en el ejercicio 13.3.2, se tiene que $B = A^{-1}$. Es decir, mediante el método recién propuesto, hemos obtenido la matriz inversa de A. De este modo, tenemos las siguientes definiciones:

Definición 7.7.1. *Sea* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

- *Se llama* ***cofactor*** *del elemento* a_{ij} *al escalar* $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$*, donde* A_{ij} *es la matriz que se obtiene al eliminar la fila* i *y la columna* j *de la matriz* A*.*

- *Se llama* ***matriz de cofactores de*** A*, a la matriz que contiene los cofactores* c_{ij} *de cada elemento* a_{ij} *de* A*. Se denota por* $cof(A)$*. Es decir,*

$$cof(A) = (c_{ij}).$$

- *Se llama* ***matriz adjunta de*** A*, a la matriz transpuesta de la matriz de cofactores. Se escribe* $adj(A)$*.*

Proposición 7.7.2. *Sea* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$*. Si* $det(A) \neq 0$*, entonces* A *es invertible y*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

Note que esta proposición es la otra implicancia de nuestra última conjetura. De este modo, concluimos que:

Teorema 7.7.3. *Sea* A *una matriz cuadrada de dimensión* n*. Se tiene que* A *es invertible, si y sólo si,* $\det(A) \neq 0$*.*

7.8. Matrices escalonadas por filas.

Ejemplos:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 7.8.1. *Una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ se dice* ***escalonada por filas*** *si*

- *de izquierda a derecha, el primer elemento distinto de 0 de cada fila es un 1, el cual llamaremos* ***uno principal*** *de la fila a la cual pertenece.*
- *cada uno principal está a la derecha de cada uno principal de las filas superiores.*
- *las filas nulas (es decir, cuyos elementos son sólo ceros), si existen, están en la parte inferior de la matriz.*

Ejercicio 7.8.1. *Consideremos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Realizando operaciones fila a A, obtenga una matriz B escalonada por filas.

Solución. Se tiene que:

- El primer elemento no nulo de la primera fila, de izquierda a derecha, debe ser un 1. De este modo, transformamos $a_{11} = 3$ en un 1, realizando la operación fila $f_1 \to \frac{1}{3} f_1$. Así, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Trabajamos por columnas, y continuamos con la primera. Hacemos un 0 en $a_{21} = 2$ y $a_{31} = 3$, por medio de las operaciones fila $f_2 \to f_2 - 2f_1$ y $f_3 \to f_3 - 3f_1$ (Usando la fila que contiene al 1 de la columna, en este caso f_1), respectivamente. De este modo, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- El uno principal de la segunda fila, debe estar a la derecha del uno principal de la primera fila, por lo que transformamos en 1 a $a_{22} = 2$. Hacemos $f_2 \to \frac{1}{2}f_2$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- En la tercera fila, el uno principal no puede estar en $a_{32} = 12$. Transformamos $a_{32} = 12$ en un 0, haciendo $f_3 \to f_3 - 12f_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

- Finalmente, el uno principal de la tercera fila puede estar en $a_{34} = 12$. Transformamos este valor, haciendo $f_3 \to \frac{1}{12}f_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, la matriz escalonada B es la que acabamos de obtener, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

En general, realizando operaciones fila, se puede transformar cualquier matriz A en una única matriz B escalonada por filas. Esto es lo que nos dice formalmente la siguiente proposición:

Proposición 7.8.2. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Existe una única matriz B, escalonada por filas, la cual es equivalente por filas a A.*

Ejercicio 7.8.2. *Considere la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenga su matriz B escalonada por filas ¿cuál es el número de filas no nulas de la matriz B obtenida?

Solución. Procedemos como sigue:

- Hacemos un 1 en $a_{11} = 4$, por medio de la operación fila $f_1 \to \frac{1}{4}f_1$. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Hacemos un 0 en $a_{21} = 2, a_{31} = 4, a_{41} = 3$ por medio de $f_2 \to f_2 - 2f_1$, $f_3 \to f_3 - 4f_1$, $f_4 \to 3f_1$, respectivamente, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la cual es una matriz escalonada por filas. Es decir,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que B tiene dos filas no nulas, por lo que en este caso decimos que el **rango** de A (la matriz inicial) es 2, lo que se denota por $r(A) = 2$. □

Definición 7.8.3. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se llama **rango** de A, al número de filas no nulas de la matriz escalonada por filas equivalente a A. Se escribe $r(A)$.*

7.9. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Veamos el siguiente problema introductorio:

Ejercicio 7.9.1. *A un evento dominical para niños, asistieron 450 personas. Hubieron 90 niños y niñas más que adultos (hombres y mujeres adultos), 10 hombres más que mujeres, y 20 mujeres adultas más que hombres adultos. ¿Cuántos hombres adultos, mujeres adultas, niños y niñas habían en el encuentro?*

Para resolver este problema podemos plantear un sistema de ecuaciones. Si

- x : cantidad de hombres adultos
- y : cantidad de mujeres adultas
- z : cantidad de niños
- w : cantidad de niñas

entonces tenemos que

- Como habían en total 450 personas, entonces

$$x + y + z + w = 450.$$

- Como habían 90 niños y niñas más que adultos, entonces

$$(z+w)-90=x+y.$$

- Como habían 10 hombres más que mujeres, entonces

$$(x+z)-10=y+w.$$

- Como habían 20 mujeres adultas más que hombres adultos, entonces

$$y-20=x.$$

De este modo, reescribiendo cada ecuación si es necesario, formamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 450 \\ -x-y+z+w &= 90 \\ x-y+z-w &= 10 \\ -x+y \qquad\quad &= 20. \end{aligned}$$

Expresamos este sistema usando matrices. La **matriz de coeficientes** del sistema corresponde a

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde la primera fila corresponde a los coeficientes de la primera ecuación, la segunda fila a los coeficientes de la segunda ecuación, y así sucesivamente. En general, la i- ésima fila corresponde a los coeficientes de la i-ésima ecuación.

La **matriz de incógnitas**, es

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

la cual corresponde a una matriz columna, en la cual aparece cada una de las incógnitas, según el orden planteado en el sistema, de arriba hacia abajo.

Finalmente, tenemos la **matriz de términos independientes**, la cual corresponde a

$$b = \begin{pmatrix} 450 \\ 90 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es una matriz columna, cuyos elementos son los términos independientes de las ecuaciones del sistema, de arriba hacia abajo.

De este modo, el sistema puede ser expresado como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 90 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Es decir, el sistema está expresado de la forma

$$A \cdot X = b.$$

Antes de continuar resolviendo este problema, veamos las siguientes definiciones generales:

Definición 7.9.1. *Una **ecuación lineal** de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_1,$$

en la cual, los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y el término independiente b_1 son números reales conocidos.

*Un **sistema de** m **ecuaciones lineales y** n **incógnitas** es un conjunto de m ecuaciones lineales que representaremos por:*

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}$$

*donde, los a_{ij} son los **coeficientes** del sistema, los b_i son los **términos independientes** del sistema y las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las **incógnitas** del sistema.*

En notación matricial, el sistema se denota como $AX = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

*Tenemos que A es la **matriz de coeficientes** del sistema; X es la **matriz de incógnitas** del sistema y b es la **matriz de términos independientes**.*

7.9.1. Método de Gauss Jordan.

Vamos a resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 450 \\ -x - y + z + w &= 90 \\ x - y + z - w &= 10 \\ -x + y \qquad\quad &= 20, \end{aligned}$$

del problema inicial usando matrices. Consideramos la matriz ampliada $(A : b)$, donde A es la matriz de coeficientes y b es la matriz de términos independientes. Es decir,

$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : 450 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & : 90 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & : 10 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & : 20 \end{pmatrix}.$$

Obtendremos una matriz escalonada por filas a partir de nuestra matriz $(A : b)$, por medio de la realización de operaciones fila. En efecto:

- El uno principal de la primera fila ya lo tenemos en $a_{11} = 1$. Formamos ceros en todo el resto de la primera columna, por medio de las operaciones fila $f_2 \to f_2 + f_1$, $f_3 \to f_3 - f_1$ y $f_4 \to f_4 + f_1$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 : 450 \\ 0 & 0 & 2 & 2 : 540 \\ 0 & -2 & 0 & -2 : -440 \\ 0 & 2 & 1 & 1 : 470 \end{pmatrix}.$$

- Hacemos $f_2 \to f_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 : 450 \\ 0 & -2 & 0 & -2 : -440 \\ 0 & 0 & 2 & 2 : 540 \\ 0 & 2 & 1 & 1 : 470 \end{pmatrix}.$$

- Formamos los unos principales de las filas 2 y 3, haciendo $f_2 \to -\frac{1}{2} f_2$ y $f_3 \to \frac{1}{2} f_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 : 450 \\ 0 & 1 & 0 & 1 : 220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 : 270 \\ 0 & 2 & 1 & 1 : 470 \end{pmatrix}.$$

- Hacemos un 0 en la parte inferior de la segunda columna, mediante la operación $f_4 \to f_4 - 2f_2$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 : 450 \\ 0 & 1 & 0 & 1 : 220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 : 270 \\ 0 & 0 & 1 & -1 : 30 \end{pmatrix}.$$
- Hacemos un 0 en la parte inferior de la tercera columna, por medio de $f_4 \to f_4 - f_3$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 : 450 \\ 0 & 1 & 0 & 1 : 220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 : 270 \\ 0 & 0 & 0 & -2 : -240 \end{pmatrix}.$$
- Finalmente, formamos el uno principal de la cuarta fila, haciendo $f_4 \to -\frac{1}{2}f_4$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 : 450 \\ 0 & 1 & 0 & 1 : 220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 : 270 \\ 0 & 0 & 0 & 1 : 120 \end{pmatrix},$$
matriz que corresponde a la matriz escalonada buscada.

Note que la matriz A también se transformó en una matriz escalonada. De este modo,

$$r(A) = 4 \text{ y } r(A : b) = 4.$$

Es decir,

$$r(A) = r(A : B) = \text{número de incógnitas}.$$

Cada vez que se da esta triple igualdad, el sistema tiene única solución. Para obtenerla, a partir de la matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 : 450 \\ 0 & 1 & 0 & 1 : 220 \\ 0 & 0 & 1 & 1 : 270 \\ 0 & 0 & 0 & 1 : 120 \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 450 \\ y \quad + w &= 220 \\ z + w &= 270 \\ w &= 120. \end{aligned}$$

Así, $w = 120$. Reemplazando este valor en la tercera ecuación, deducimos que $z = 150$. Del mismo modo, de la segunda ecuación se tiene que $y = 100$. Y finalmente de la primera ecuación, $x = 80$. Así, decimos que la solución única corresponde a

$$X = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

En el contexto del problema, tenemos 80 hombres adultos, 100 mujeres adultas, 150 niños y 120 niñas.

Observación 7.9.1. El sistema recién propuesto, corresponde al método de Gauss Jordan. Este método nos propone que para resolver un sistema de ecuaciones, escalonamos por filas la matriz $(A : b)$ (es decir, escalonamos la matriz de coeficientes ampliada con una columna más, la cual corresponde a la matriz de términos independientes). Al realizar este escalonamiento, obtenemos un sistema de ecuaciones equivalente (que tiene las mismas soluciones que nuestro sistema), del cual obtenemos la solución de nuestro sistema original.

Ejercicio 7.9.2. *Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones*

a)

$$\begin{aligned} x - 2y - 4z + 3w &= 1 \\ y + z - w &= 0 \\ 2x - 3z + w &= 1 \\ x - 5y - 7z + 6w &= 1. \end{aligned}$$

Solución. En este caso, la matriz A de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

la matriz de términos independientes es

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz de incógnitas es

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Escalonamos la matriz $(A : b)$ para resolver el sistema de ecuaciones. Esta matriz es

$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & : 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & : 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & : 1 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & : 1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos los ceros faltantes de la primera columna, por medio de las operaciones $f_3 \to f_3 - 2f_1$ y $f_4 \to f_4 - f_1$, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & :1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & :0 \\ 0 & 4 & 5 & -5 & :-1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & :0 \end{pmatrix}.$$

Para formar los ceros faltantes de la segunda columna, hacemos $f_3 \to f_3 - 4f_2$ y $f_4 \to f_4 + 3f_2$, logrando la matriz escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & :1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & :0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & :-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}.$$

Aquí podemos ver que

$$r(A) = 3 = r(A:b) < 4 = \text{número de incógnitas.}$$

Cada vez que esto ocurre, es decir cuando

$$r(A) = r(A:b) < \text{número de incógnitas,}$$

entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Para obtenerlas, a partir de la matriz escalonada, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x - 2y - 4z + 3w &= 1 \\ y + z - w &= 0 \\ z - w &= -1. \end{aligned}$$

Hacemos $w = t$, donde t es un número real cualquiera. De la tercera ecuación, obtenemos que $z = t - 1$. Del reemplazo de w y z, en función de t, en la segunda ecuación, se deduce que $y = 1$. Finalmente, reemplazando las expresiones obtenidas para y, z, w, en la primera ecuación, se obtiene que $x = t - 1$. Por lo tanto el conjunto solución es

$$S = \{(t-1, 1, t-1, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

De este modo, para obtener una solución particular, basta con darle un valor fijo a t, por ejemplo:

- Si $t = 0$, entonces $x = -1, y = 1, z = -1, w = 0$ es una solución particular del sistema.
- Si $t = 1$, entonces $x = 0, y = 1, z = 0, w = 1$ es otra solución particular del sistema.

Así, se puede reemplazar el valor de t que usted estime conveniente, obteniendo una nueva solución particular. □

b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + 5z &= 1 \\ 3x + \quad 6z &= 1. \end{aligned}$$

Solución. La matriz $(A : b)$ corresponde a

$$(A : b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : 1 \\ 2 & -1 & 5 & : 1 \\ 3 & 0 & 6 & : 1 \end{pmatrix}.$$

La escalonamos:

- Hacemos los ceros faltantes de la primera columna, por medio de $f_2 \to f_2 - 2f_1$ y $f_3 \to f_3 - 3f_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : 1 \\ 0 & -3 & 3 & : -1 \\ 0 & -3 & 3 & : -2 \end{pmatrix}.$$

- Note que si $f_3 \to f_3 - f_2$, obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & :1 \\ 0 & -3 & 3 & :-1 \\ 0 & 0 & 0 & :-1 \end{pmatrix}.$$

- Finalmente, hacemos los unos principales faltantes, por medio de $f_2 \to -\frac{1}{3}f_2$ y $f_3 \to -f_3$, de donde la matriz escalonada obtenida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & :1 \\ 0 & 1 & -1 & :\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & :1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$rango(A) = 2 \neq 3 = rango(A : b).$$

Cada vez que esto ocurre, es decir que

$$rango(A) \neq rango(A : b),$$

el sistema no tiene solución. En nuestro ejercicio, este hecho se pone de manifiesto en la tercera ecuación del sistema equivalente escalonado, la cual es

$$0x + 0y + 0z = 1.$$

Esta ecuación claramente no es satisfecha por ninguna terna de valores de x, y, z. De esta forma,

$$S = \emptyset.$$

$\square$

En resumen:

Teorema 7.9.2. *Un sistema $Ax = b$:*

- *no tiene solución, si y sólo si, $r(A) \neq r(A : b)$.*
- *tiene única solución, si y sólo si, $r(A) = r(A : b) =$ número de incógnitas.*
- *tiene infinitas soluciones, si y sólo si, $r(A) = r(A : b) <$ número de incógnitas.*

Ejercicio 7.9.3. *Considere el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 11z &= 5 \\ -2x + 4y - 13z &= -6 \\ x - 2y + 7z &= 3. \end{aligned}$$

a) *Obtenga la matriz de coeficientes A.*

Solución. La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -2 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

b) *Demuestre que A es invertible y obtenga A^{-1}.*

Solución. Note que $det(A) = 1 \neq 0$, por lo que A es invertible.

Haciendo operaciones fila o a través del cálculo de la matriz adjunta, obtenemos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) *Exprese el sistema en la forma $AX = b$ y multiplique ambos miembros de esta igualdad por A^{-1}, por izquierda. Realice todos los cálculos posibles. ¿A qué corresponde lo obtenido?*

Solución. Este sistema, al expresarlo de la forma $AX = b$, queda como

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -2 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos ambos miembros por A^{-1} por izquierda, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

O sea,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

De este modo, realizando la multiplicación en el miembro derecho de la igualdad anterior, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lo obtenido corresponde a la solución única del sistema, la cual es

$$x = 1, y = -1, z = 0.$$

□

Se tiene que:

Proposición 7.9.3. *Sea A una matriz cuadrada. Se tiene que, el sistema $Ax = b$ tiene solución única, si y sólo si, A es invertible.*

Observación 7.9.2. En el caso que la matriz cuadrada A sea invertible, entonces la única solución del sistema $Ax = b$ corresponde a $x = A^{-1}b$. Es decir, la solución única se obtiene multiplicando la inversa de la matriz de coeficientes por la matriz de términos independientes.

Ejercicio 7.9.4. *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 1 \\ -2x - y + z &= 3 \\ -x + y + \lambda z &= \lambda, \end{aligned}$$

con λ una constante real. Determine todos los valores de λ para los cuales el sistema

- *tiene solución única.*
- *tiene infinitas soluciones.*
- *no tiene solución.*

Solución. La matriz de coeficientes del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene solución única, si sólo si, A es invertible. Es decir, el sistema tiene solución única, sólo cuando $det(A) \neq 0$. Note que,

$$det(A) = 2\lambda^2 - 2\lambda - 4,$$

por lo que

$$det(A) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \ \vee \ \lambda = 2.$$

De este modo, el sistema tiene solución única, si y sólo si, $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$.

Analizamos los casos $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ por separado:

- Si $\lambda = -1$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ -2x - y + z &= 3 \\ -x + y - z &= -1. \end{aligned}$$

En este caso,

$$(A:b)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & :1 \\ -2 & -1 & 1 & :3 \\ -1 & 1 & -1 & :-1 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos esta matriz. Hacemos los ceros de la primera columna, por medio de $f_3 \to f_3+f_1$ y $f_2 \to f_2+2f_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & :1 \\ 0 & -3 & 3 & :5 \\ 0 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}. \tag{7.9.1}$$

Luego, haciendo $f_2 \to -\frac{1}{3}f_2$, obtenemos la matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & :1 \\ 0 & 1 & -1 & :\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}. \tag{7.9.2}$$

Como

$$rango(A)=rango(A:b)=2<3=\text{número de incógnitas},$$

entonces el sistema tiene infinitas soluciones, las cuales se obtienen del sistema equivalente

$$\begin{aligned} x-y+z&=1 \\ y-z&=\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Si $z=t$, entonces de la segunda ecuación, obtenemos que $y=\frac{5}{3}+t$. Luego, de la primera ecuación se deduce que $x=\frac{8}{3}$. De este modo, el conjunto solución es

$$S=\left\{\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3}+t,t\right):t\in\mathbb{R}\right\}.$$

- Si $\lambda=2$, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x+2y+z&=1 \\ -2x-y+z&=3 \\ -x+y+2z&=2, \end{aligned}$$

de donde

$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & :1 \\ -2 & -1 & 1 & :3 \\ -1 & 1 & 2 & :2 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos esta matriz. Hacemos los ceros de la primera columna usando $f_2 \to f_2 + 2f_1$ y $f_3 \to f_3 + f_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & :1 \\ 0 & 3 & 3 & :5 \\ 0 & 3 & 3 & :3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente haciendo $f_2 \to f_2 - f_3$, obtenemos la matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & :1 \\ 0 & 3 & 3 & :5 \\ 0 & 0 & 0 & :-2 \end{pmatrix}.$$

Como

$$rango(A) = 2 \neq 3 = rango(A:b),$$

entonces el sistema no tiene solución.

En resumen:

- el sistema tiene solución única para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$.
- el sistema tiene infinitas soluciones para $\lambda = -1$.
- el sistema no tiene solución para $\lambda = 2$.

□

Veamos una aplicación de los sistemas de ecuaciones resueltos usando matrices:

Ejercicio 7.9.5. *La economía de un país se divide en dos sectores fundamentales: sector productor y sector consumidor. Supongamos que en el sector productor sólo están el sector agrícola, el sector industrial y el sector servicios (el sector servicios corresponde* *a transporte, almacenamiento, salud, etc.). La demanda y la producción de cada sector, está expresada en millones de pesos. En cuanto a la demanda de sector productor, es decir, a la demanda interna, se tiene que:*

- *el sector agrícola requiere: el* 20 % *de su producción al mismo sector, el* 10 % *de su producción al sector industrial y* 20 % *de su producción al sector servicios.*
- *el sector industrial requiere: el* 50 % *de su producción al sector agrícola, el* 20 % *de su producción al mismo sector y* 10 % *de su producción al sector servicios.*
- *el sector servicios requiere:* 30 % *de su producción al sector agrícola,* 70 % *de su producción al sector industrial y* 10 % *de su producción al mismo sector.*

Además, la demanda del sector consumidor, o sea, la demanda externa, es de

- *600 millones de pesos de producción al sector agrícola.*
- *1000 millones de pesos de producción al sector industrial.*
- *2600 millones de pesos de producción al sector servicios.*

¿Cuántos millones de pesos debe producir cada sector para satisfacer la demanda total? Para determinar la respuesta, planteamos y resolvemos dos preguntas:

a) *Determine un sistema de ecuaciones que permita calcular la producción total de cada sector, en millones de pesos, teniendo en cuenta que, para cada sector:*

$$\text{producción} = \text{demanda interna} + \text{demanda externa}. \tag{7.9.3}$$

Solución. Sea a la producción agrícola, i la producción industrial, y s la producción servicios, expresadas en millones de pesos.

- Fijémonos en el caso del sector agrícola. Obtengamos una expresión para la demanda interna a este sector. Se tiene que

- Como el sector agrícola requiere el 20 % de la producción del mismo sector, entonces se requieren $0{,}2a$ millones del sector agrícola.
- Como el sector industrial requiere el 50 % de su producción al sector agrícola, entonces se requieren $0{,}5i$ millones del sector agrícola.
- Como el sector servicios requiere el 30 % de su producción al sector agrícola, entonces se requieren $0{,}3s$ millones del sector agrícola.

En definitiva, la demanda interna al sector agrícola es de

$$0{,}2a + 0{,}5i + 0{,}3s.$$

De este modo, considerando que su demanda externa es de 600 millones, entonces, usando (7.9.3), tenemos que su producción a viene dada por

$$a = 0{,}2a + 0{,}5i + 0{,}3s + 600.$$

- Veamos el caso del sector industrial. Obtengamos una expresión para la demanda interna a este sector. Tenemos que

  - Como el sector agrícola requiere 10 % de su producción al sector industrial, entonces se requieren $0{,}1a$ millones del sector industrial.
  - Como el sector industrial requiere 20 % de su mismo sector, entonces se requieren $0{,}2i$ millones de este sector.
  - Como sector servicios requiere el 70 % de su producción al sector industrial, entonces se requieren $0{,}7s$ millones del sector industrial.

  Así, la demanda interna al sector industrial es de

  $$0{,}1a + 0{,}2i + 0{,}7s.$$

  Como su demanda externa es de 1000 millones, entonces, usando (7.9.3), obtenemos que su producción i viene dada por

  $$i = 0{,}1a + 0{,}2i + 0{,}7s + 1000.$$

- Análogamente, la demanda total al sector servicios, y por ende su producción, debe corresponder a

$$s = 0{,}2a + 0{,}1i + 0{,}1s + 2600.$$

Por lo tanto, el sistema es

$$\begin{aligned} a &= 0{,}2a + 0{,}5i + 0{,}3s + 600 \\ i &= 0{,}1a + 0{,}2i + 0{,}7s + 1000 \\ s &= 0{,}2a + 0{,}1i + 0{,}1s + 2600, \end{aligned}$$

el cual reexpresado corresponde a

$$\begin{aligned} 0{,}8a - 0{,}5i - 0{,}3s &= 600 \\ -0{,}1a + 0{,}8i - 0{,}7s &= 1000 \\ -0{,}2a - 0{,}1i + 0{,}9s &= 2600. \end{aligned}$$

b) *Exprese matricialmente el sistema obtenido en a). Resuélvalo usando calculadora y el hecho que*

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 & -0{,}3 \\ 0{,}9 & -0{,}2 & -0{,}7 \\ 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}83 & 1{,}35 & 1{,}66 \\ 0{,}64 & 1{,}86 & 1{,}66 \\ 0{,}48 & 0{,}5 & 1{,}66 \end{pmatrix}.$$

Solución. Matricialmente, el sistema queda expresado como

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}7 \\ -0{,}2 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ i \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos a izquierda por la inversa de la matriz de coeficientes (la cual corresponde al dato en el enunciado). Así

$$\begin{pmatrix} a \\ i \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}83 & 1{,}35 & 1{,}66 \\ 0{,}64 & 1{,}86 & 1{,}66 \\ 0{,}48 & 0{,}5 & 1{,}66 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 1000 \\ 2600 \end{pmatrix}.$$

O sea,

$$\begin{pmatrix} a \\ i \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2986 \\ 3970 \\ 6972 \end{pmatrix}.$$

De este modo, la producción del sector industrial debe ser de 2986 millones, del sector industrial de 3970 millones, y del sector servicios de 6972 millones. □

7.9.2. Regla de Cramer.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 11z &= 5 \\ -2x + 4y - 13z &= -6 \\ x - 2y + 7z &= 3. \end{aligned}$$

Note que su matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -2 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

con

$$|A| = 1.$$

De este modo, el sistema tiene solución única. Según la regla de Cramer, se tiene que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ -6 & 4 & -13 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{|A|},$$

donde la matriz del numerador consiste en cambiar la primera columna de la matriz de coeficientes A, por la matriz de términos independientes. De este modo,

$$x = \frac{1}{1} = 1.$$

Para obtener y, consideramos una fracción, donde el denominador es como siempre $|A|$, y el numerador corresponde al determinante de la matriz resultante de sustituir la segunda columna de A por la matriz de términos independientes del sistema. Es decir

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 11 \\ -2 & -6 & -13 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{|A|},$$

de donde

$$y = \frac{-1}{1} = -1.$$

Finalmente z corresponde a la fracción cuyo denominador es $|A|$, y el numerador es el determinante de la matriz correspondiente a reemplazar la tercera columna de A por los términos independientes del sistema. O sea,

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = 0.$$

Por lo tanto, su conjunto solución es $S = \{(1, -1, 0)\}$. En general, tenemos:

Teorema 7.9.4. *Sea A una matriz cuadrada, con $|A| \neq 0$, y el sistema de ecuaciones $AX = b$. La solución única $X = (x_i)$ de este sistema, es tal que*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \tag{7.9.4}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, donde la matriz A_i se obtiene cambiando en la matriz A, la columna i por la matriz de términos independientes b.

Ejercicio 7.9.6. *Don Andrés es comerciante y vende 3 tipos de quesos: Roquefort, Parmesano y Gouda. El mes pasado vendió en total 44 unidades. El precio por cada unidad de queso Roquefort es de \$12000, por cada unidad de queso Parmesano es*

\$10000 *y por cada unidad de queso Gouda es de* \$9000. *En total, el mes pasado obtuvó* \$436000 *por sus ventas, vendiendo el doble de unidades de queso Roquefort que de queso Parmesano y Gouda juntos ¿Cuántas unidades de cada tipo de queso vendió?*

Solución. Sean

- x : cantidad de unidades de queso Roquefort.
- y : cantidad de unidades de queso Parmesano.
- z : cantidad de unidades de queso Gouda.

Como el mes pasado vendió 44 unidades, entonces

$$x + y + z = 44.$$

Como obtuvó en total \$436000 por las ventas, entonces, dado el precio por unidad, tenemos que

$$12000x + 10000y + 9000z = 436000.$$

Finalmente, como las unidades de queso Roquefort son el doble de unidades que del queso Parmesano y Gouda juntos, entonces

$$x = 2(y + z).$$

En resumen, reexpresando cada ecuación obtenida si es necesario, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 44 \\ 12x + 10y + 9z &= 336 \\ x - 2y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes corresponde a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

y la matriz de términos independientes es

$$b = \begin{pmatrix} 44 \\ 336 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que el determinante de la matriz de coeficientes A es $det(A) = -3 \neq 0$, por lo que el sistema tiene solución única. Usamos el método de Cramer para determinar la solución. Se tiene que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 \\ 336 & 10 & 9 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-60}{-3} = 20.$$

Además

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 1 \\ 12 & 336 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-18}{-3} = 6$$

y

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 12 & 10 & 336 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

Por lo tanto, Don Andrés vendió 20 unidades de queso Roquefort, 6 unidades de queso Parmesano y 4 unidades de queso Gouda. □

Observación 7.9.3. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 3z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

Dado que los términos independientes son todos 0, entonces este sistema se denomina sistema **homogéneo**. Note que $x = 0, y = 0, z = 0$ es una solución, la cual se denomina **solución trivial**.

En general, un sistema **homogéneo** es aquel donde los términos independientes son todos 0. Un sistema homogéneo siempre tiene solución. En efecto, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas, entonces

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

es solución del sistema homogéneo, y se llama **solución trivial**. De este modo, el interés en resolver un sistema homogéneo radica en conocer si tiene o no soluciones no triviales, es decir, si tiene única o infinitas soluciones.

Ejercicio 7.9.7. *Determine si el sistema homogéneo*

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 3z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

tiene única o infinitas soluciones.

Solución. Vemos que el determinante de la matriz de coeficientes A es $det(A) = 7 \neq 0$, por lo que cual el sistema tiene solución única, la cual corresponde a la solución trivial $x = y = z = 0$.

7.10. Ejercicios propuestos.

1. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ -2 & \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine su dimensión.

   b) ¿Cuáles de estas matrices son cuadradas?

   c) Indique, si es que las hay, cuál o cuales de las matrices de las dadas es:

      c1) una matriz columna.

      c2) una matriz fila.

      c3) una matriz diagonal.

      c4) una matriz simétrica.

      c5) una matriz antisimétrica.

2. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Muestre que $AB = \theta$, donde θ es la matriz nula en $M_2(\mathbb{R})$ (En este ejercicio podemos ver que para el producto de matrices, $AB = \theta$ no necesariamente implica que $A = \theta$ o $B = \theta$).

3. Obtenga las matrices A y B que satisfacen el sistema

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 10 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Es $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

   b) ¿Es $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$?

5. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre $AB = AC$ (Sin embargo, note que $B \neq C$. En este ejercicio podemos ver que para el producto de matrices no es válida la ley de cancelación, es decir $AB = AC$ no necesariamente implica que $B = C$).

6. Demuestre que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   satisface que $A^2 = \theta$, donde θ es la matriz nula en $M_2(\mathbb{R})$, sin embargo $A \neq \theta$.

7. Si $X \in M_2(\mathbb{R})$, demuestre que las soluciones de la ecuación

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

en $M_2(\mathbb{R})$, son las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es decir, esta ecuación de grado 2 tiene 4 soluciones en $M_2(\mathbb{R})$.

8. Dada cada matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Obtenga, si es posible, su matriz inversa usando operaciones fila.

b) Si es invertible, compruebe que el producto con su inversa corresponde a la matriz identidad de la respectiva dimensión.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -1 \\ -7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$, calcule $|A|$ y luego, usando propiedades de determinantes, calcule el determinante de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 6 & 8 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -1 \\ 21 & -24 & 15 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 0 & -12 & 2 \\ -7 & -16 & 10 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & -5 \\ -7 & 8 & -5 \end{pmatrix}, G = A^{-1}, H = A^3, J = 5A.$$

10. Calcule el determinante de las siguientes matrices cuadradas. En el caso de las matrices de 3×3, calcule cada determinante usando la regla de Sarrus y luego usando la definición de determinante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

    a) Determine si es invertible.

    b) En caso que sea invertible, obtenga su inversa a través de operaciones elementales de fila.

    c) En caso que sea invertible, obtenga su inversa a través del cálculo de su matriz adjunta.

    d) En caso que sea invertible, compruebe usando la definición, que la matriz obtenida es la inversa de la matriz dada.

12. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8,$$

calcule los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & -d & g \\ b & -e & h \\ c & -f & i \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a-d & b-e & c-f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

13. Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la matriz A definida por

$$A = \begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix},$$

sea invertible.

14. Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que la matriz A definida por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix},$$

no sea invertible.

15. Encuentre los $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Los valores obtenidos reciben el nombre de valores propios de la matriz A.

16. Calcule el rango de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

17. Calcule, si es que existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango tres, dos o uno.

18. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \quad \begin{aligned} x - y &= 2 \\ x - 2y &= 8 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 2y &= 8 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned} \qquad c) \quad \begin{aligned} x - 2y - z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 1 \end{aligned}$$

$$d) \quad \begin{aligned} x - 2y - z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ 3x + 3y - z &= 1 \end{aligned} \qquad e) \quad \begin{aligned} x + y + z - w &= 1 \\ 2x - y - 2z + 2w &= 2 \\ 3x + 2z - 2w &= -2 \end{aligned} \qquad f) \quad \begin{aligned} x - y + 2z + w &= 0 \\ 2x + 2y - w &= 0 \\ 3x + y + 2z + w &= 0 \end{aligned}$$

$$g) \quad \begin{aligned} x + 2y - 3z + 5w &= 0 \\ 2x + y - 4z - w &= 1 \\ x + y + z + w &= 0 \\ -x - y - z + w &= 4. \end{aligned}$$

19. Use la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

$$a)\quad \begin{aligned} x+y+z&=1\\ x-2y+3z&=2\\ x+z&=5 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} x-3y+2z&=-3\\ 5x+6y-z&=13\\ 4x-y+3z&=8 \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} x-2y+2z-3w&=15\\ 3x+4y-z+w&=-6\\ 2x-3y+2z-w&=17\\ x+y-3z-2w&=-7. \end{aligned}$$

20. Encuentre todos los valores de λ de modo que el sistema

$$\begin{aligned} \lambda x+y+z&=1\\ x+\lambda y+z&=0\\ x+y+\lambda z&=-1 \end{aligned}$$

tenga solución única, infinitas soluciones o no tenga solución.

21. Pablo, Francisco y Felipe, son hermanos. Recibieron de parte de su padre, una herencia de 120 millones de pesos. Felipe, dado que aún es estudiante, recibió 10 millones más que Pablo. Los tres hermanos deciden invertir en un negocio, para el cual se necesita un capital de 20 millones, por lo que Pablo aportará el 10 % de su dinero, Francisco el 30 %, y Felipe el 20 %. ¿Cuánto dinero recibió cada uno?

22. Victoria ganó 40 millones en un juego de azar. Invirtió su dinero en forma repartida en fondos mutuos de 3 bancos distintos A, B, C, los cuales tienen una rentabilidad del 10 %, 6 % y 8 % anual respectivamente. Dada las restricciones que pusó el banco C, decidió invertir 10 millones menos en el banco C que en el banco B. Victoria obtuvo al cabo de un año, 3 millones 300 mil pesos adicionales y con eso compró la casa que deseaba. ¿Cuánto dinero invirtió en cada banco?

23. Un pequeño pueblo tiene 3 industrias primarias, una mina de cobre, un ferrocarril y una planta de energía eléctrica. La demanda y la producción de cada industria, está expresada en millones de dólares. En cuanto a la demanda de sector productor, es decir, a la demanda interna, se tiene que:

    - para producir el cobre, la mina requiere 20 % de su producción a la industria del cobre, 10 % de su producción a la industria del transporte y 20 % de su producción a la industria de energía eléctrica.
    - para producir transporte, el ferrocarril requiere 10 % de su produccón a la industria del cobre, 10 % de su producción a la industria del transporte y 40 % de su producción a la industria de energía eléctrica.
    - para producir energía eléctrica, la planta requiere 20 % de su producción a la industria del cobre, 20 % de su producción a la industria del transporte, y 30 % de su producción a la industria de energía eléctrica.

    Además, durante el año, hay una demanda externa de 1,2 millones de dólares de cobre, 0,8 millones de dólares de transporte, y 1,5 millones de dólares de energía eléctrica

    a) Determine el sistema de ecuaciones que permite calcular la producción total de cada sector, expresada en millones de dólares.
    b) Exprese matricialmente el sistema obtenido en a).
    c) ¿Cuántos millones de doláres anuales debe producir cada sector para satisfacer la demanda total? Dato: Use b) y el hecho que

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{77} \cdot \begin{pmatrix} 110 & 30 & 40 \\ \frac{154}{7} & 104 & 28 \\ \frac{308}{7} & 68 & 142 \end{pmatrix}$$

.

24. Determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 0 \\ -3x + y - z &= 0 \\ 4x - 10y + kz &= 0 \end{aligned}$$

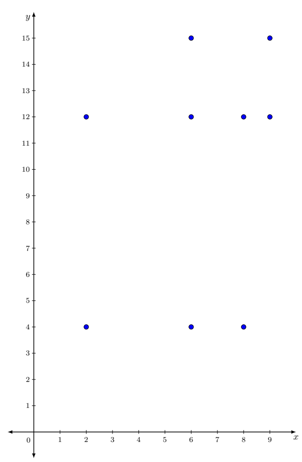
tiene solución no trivial.

Capítulo 8

Respuestas a los ejercicios propuestos.

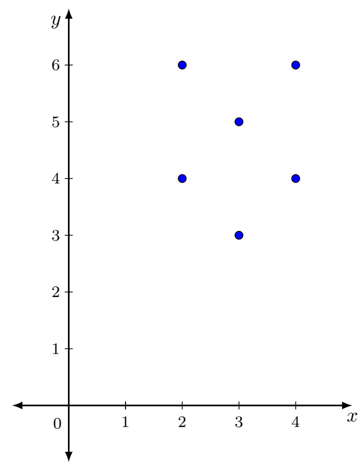
8.1. Funciones.

1. *a*)
   - $GrR = \{(2,4),(2,12),(6,4),(6,12),(6,15),(8,4),(8,12),(9,12),(9,15)\}$



   - $DomR = \{2,6,8,9\}$
   - $RecR = \{4,12,15\}$

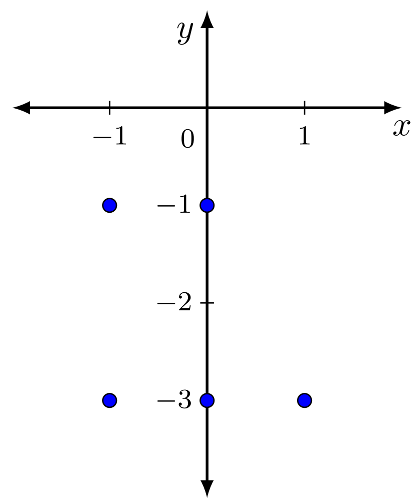
b) ▪ $GrR = \{(2,4),(2,6),(3,3),(3,5),(4,4),(4,6)\}$



▪ $DomR = A$

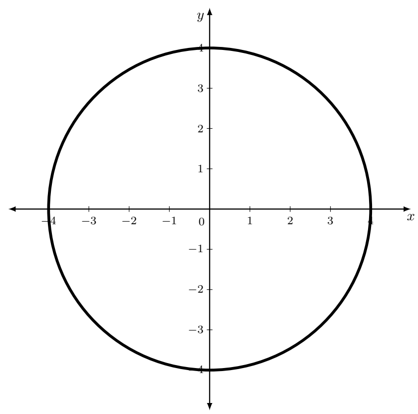
▪ $RecR = B$

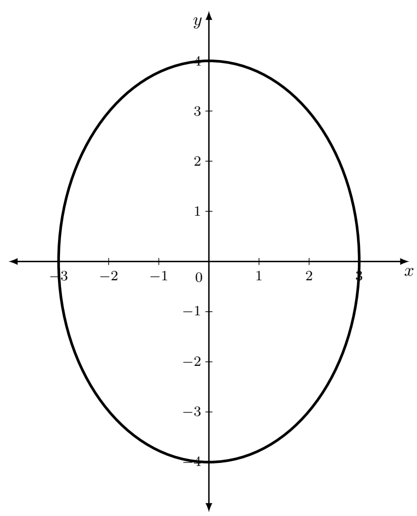
c) ▪ $GrR = \{(-1,-3),(-1,-1),(0,-3),(0,-1),(1,-3)\}$



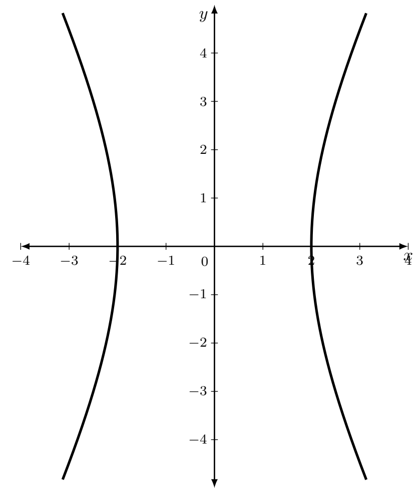
▪ $DomR = A$

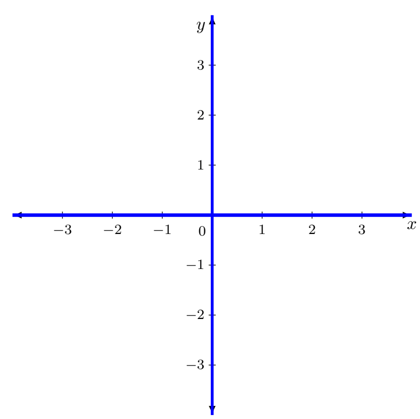
▪ $RecR = \{-3,-1\}$

2. a)
   - $DomR = [-4, 4]$
   - $RecR = [-4, 4]$
   - 

   b)
   - $DomR = [-3, 3]$
   - $RecR = [-4, 4]$
   - 

   c)
   - $DomR =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
   - $RecR = \mathbb{R}$

- 

3. a) 

   b) no, dado que 0 está relacionado con cualquier número real y

4. Sólo II

5. a) No
   b) no
   c) no
   d) si
   e) si
   f) no
   g) si
   h) si
   i) si

6. a) $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 1, f(3) = \frac{3}{2}$
   b) si

c) no

d) no

7. *a*) No

   b) la restricción debería ser tal que $Dom\ g = \{1, 2, 3\}$

8. *a*) No

   b) para que sea sobreyectiva, escogemos $Cod\ h = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\}$

9. *a*) No

   b) no

   c) redifinimos l de modo que $Dom\ l = \{0, 1, 2\}$ y $Cod\ l = \{0, 2\sqrt{2}, \sqrt{5}, 3\}$

10. *a*) $Domf = \mathbb{R},\ Recf = \mathbb{R}$

    b) $Domf = [-2, 2]\,,\ Recf = [0, 2]$

    c) $Domf = [2, +\infty[\,, Recf = [0, +\infty[$

11. *a*) $Domf = \mathbb{R}$

    b) $Domf = \mathbb{R}$

    c) $Domf = \mathbb{R} - \{4\}$

    d) $Domf =]-\infty, 4]$

    e) $Domf =]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$

    f) $Domf = \mathbb{R} - \{1\}$

    g) $Domf = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

    h) $Domf =]1, +\infty[$

    i) $Domf =]-3, 3[$

    j) $Domf = [0, 1[$

12. *a*) $x = 1$ o $x = -1$

    b) $x = 2$ o $x = -2$

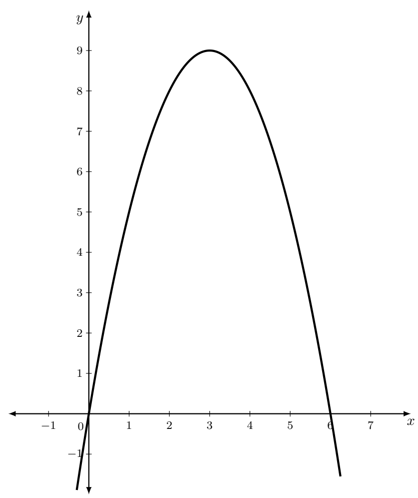
    c) no tiene preimagen

    d) $[3, +\infty[$

13. *a*) $]-\infty, 5[$
b) $x = 1$
c) $x = 5$
d) no tiene preimagen
e) $]-\infty, 0[$

14. *a*) $Recf = \mathbb{R}$
b) $Recf = [4, +\infty[$
c) $Recf = \mathbb{R} - \{0\}$
d) $Recf = [0, +\infty[$
e) $Recf = [0, +\infty[$
f) $Recf = \mathbb{R} - \{-1\}$
g) $Recf =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$
h) $Recf =]0, +\infty[$
i) $Recf =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
j) $Recf = [0, +\infty[$

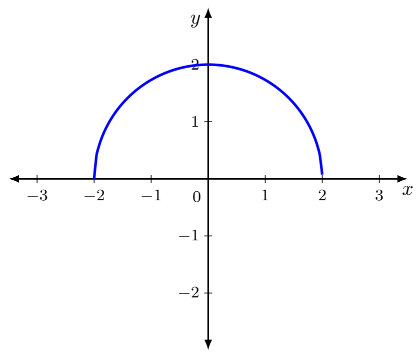
15. a) 15.1) $Domf = \mathbb{R}$
15.2) $Recf =]-\infty, 9]$
15.3)



b) 15.1) $Dom f = [-2, 2]$

15.2) $Rec f = [0, 2]$

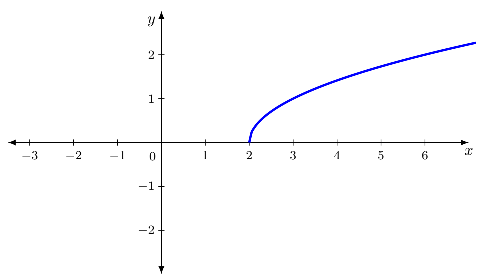
15.3)



c) 15.1) $Dom f = [2, +\infty[$

15.2) $Rec f = [0, +\infty[$

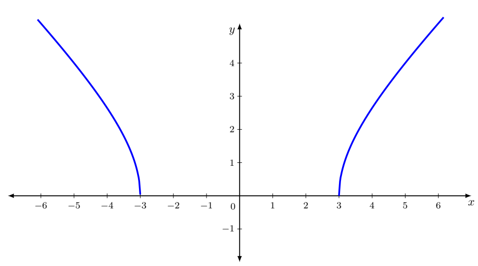
15.3)



d) 15.1) $Dom f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

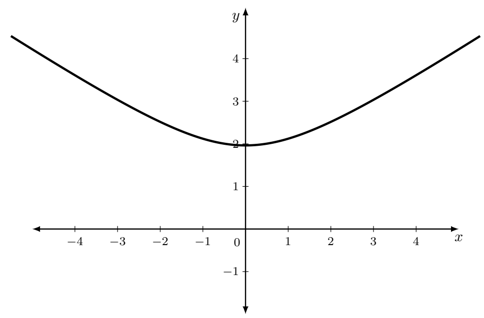
15.2) $Rec f = [0, +\infty[$

15.3)



e) 15.1) $Dom f = \mathbb{R}$

15.2) $Rec f = [2, +\infty[$

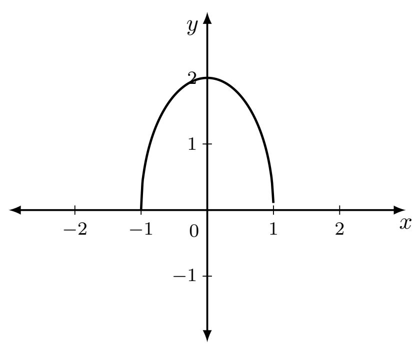


15.3)

f) 15.1) $Domf = [-1, 1]$

15.2) $Recf = [0, 2]$

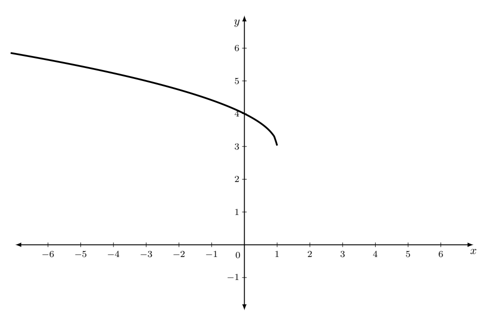
15.3)



g) 15.1) $Domf =]-\infty, 1]$

15.2) $Recf = [3, +\infty[$

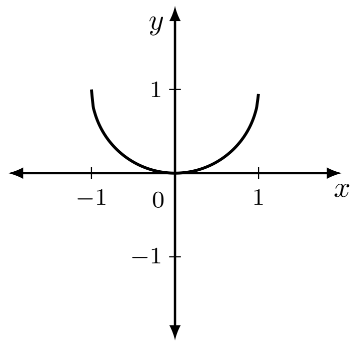
15.3)



h) 15.1) $Dom f = [-1, 1]$

15.2) $Rec f = [0, 2]$

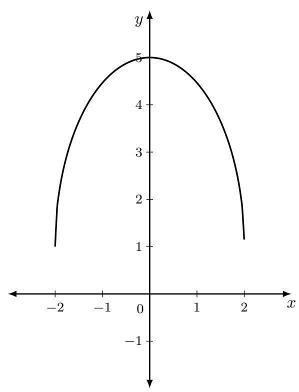
15.3)



i) 15.1) $Dom f = [-2, 2]$

15.2) $Rec f = [1, 5]$

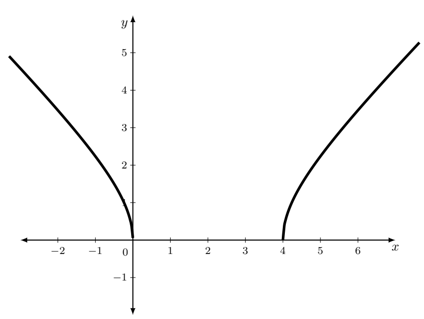
15.3)



j) 15.1) $Dom f =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$

15.2) $Rec f = [0, +\infty[$

15.3)



16. a)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) La función f es biyectiva

  b)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) La función f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
    - (16.2.1) y 16.2.2)) $f : \{1\} \to \{5\}$

  c)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) La función f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
    - (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [0, +\infty[\to]-\infty, 2]$

  d)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) La función f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
    - (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [3, +\infty[\to]-\infty, 9]$

  e)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
    - (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [0, 2] \to [0, 2]$

  f)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) f es inyectiva y no es sobreyectiva, por lo que no es biyectiva
    - (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [2, +\infty[\to [0, +\infty[$

  g)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
    - (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [3, +\infty[\to [0, +\infty[$

  h)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
    - (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [0, +\infty[\to [2, +\infty[$

  i)
    - (16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
    - ((16.1.2) y 16.2.2)) $f : [0, 1] \to [0, 2[$

  j)
    - ((16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva

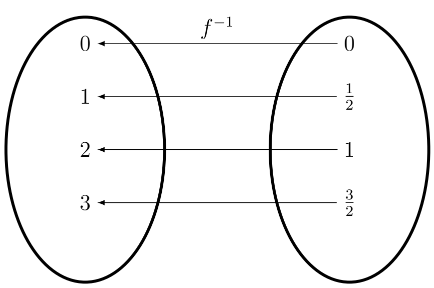
- (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [1, +\infty[\to]-\infty, 3]$

k)
- (16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
- (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [0, 1] \to [1, 2[$

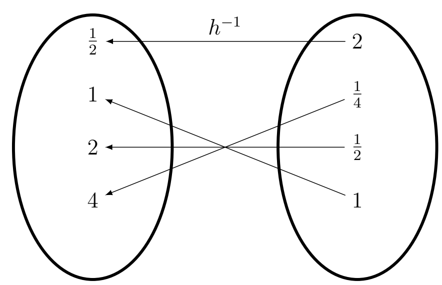
l)
- (16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
- (16.1.2) y 16.2.2)) $f : [0, 2] \to [1, 5[$

m)
- (16.1.1) y 16.2.1)) f no es inyectiva ni sobreyectiva, por lo que tampoco es biyectiva
- (16.1.2) y 16.2.2)) $f = [4, +\infty[\to [0, +\infty[$

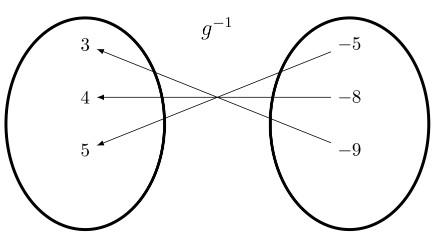
17. a)



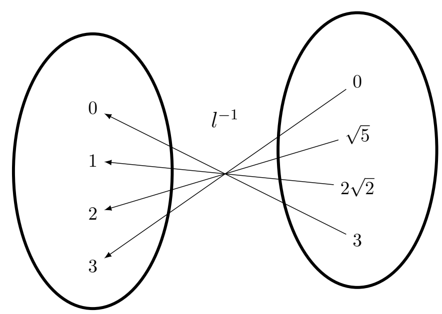
c)



b)



d)



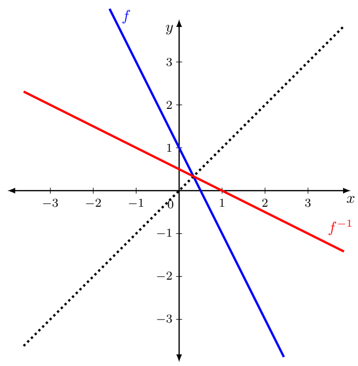
18. a) 18.1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to f(x)=1-2x$ es biyectiva.

18.2) Su función inversa es $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\to f^{-1}(x)=\frac{1-x}{2}$

18.3) $f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{1-x}{2}\right)=1+2\frac{1-x}{2}=x$ y

$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(1+2x)=\frac{1-(1-2x)}{2}=x.$

18.4)



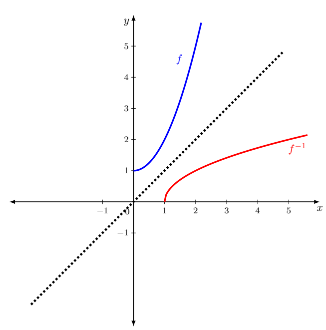
b) 18.1) $f:[0,+\infty[\to]-\infty,1]\,, x\to f(x)=x^2+1$ es biyectiva.

18.2) Su función inversa es $f^{-1}:]-\infty,1]\to[0,+\infty[\,, x\to f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$

18.3) $f(f^{-1}(x))=f(\sqrt{x-1})=(\sqrt{x-1})^2+1=x, x\leq 1$ y

$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(x^2+1)=\sqrt{(x^2+1)-1}=x, x\geq 0$

18.4)



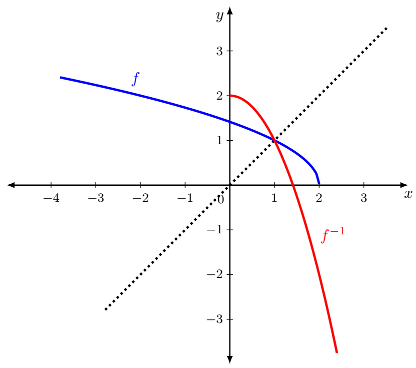
c) 18.1) $f:]-\infty,2]\to[0,+\infty[\,, x\to f(x)=\sqrt{2-x}$ es biyectiva.

18.2) Su función inversa es $f^{-1}:[0,+\infty[\to]-\infty,2]\,, x\to f^{-1}(x)=2-x^2$

18.3) $f(f^{-1}(x))=f(2-x^2)=\sqrt{2-(2-x^2)}=x, x\leq 0$ y

$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(\sqrt{2-x})=2-(\sqrt{2-x})^2=x, x\leq 2$

18.4)



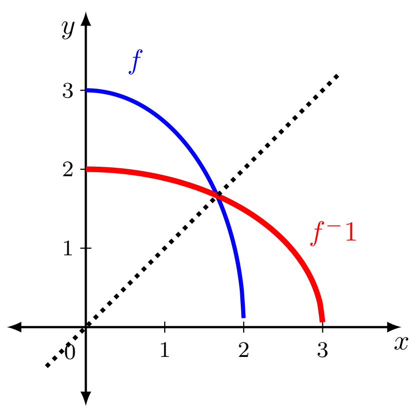
d) 18.1) $f:[0,2]\to[0,3], x\to f(x)=\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}$ es biyectiva.

18.2) Su función inversa es $f^{-1}:[0,3]\to[0,2], x\to f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{36-4x^2}}{3}$

18.3) $f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{\sqrt{36-4x^2}}{3}\right)=x, x\le 0$ y

$f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}\right)=x, x\le 2$

18.4)



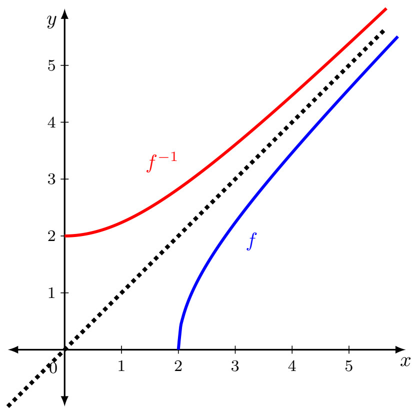
e) 18.1) $f:[2,+\infty[\,\to[0,+\infty[\,, x\to f(x)=\frac{\sqrt{4x^2-16}}{2}$ es biyectiva.

18.2) Su función inversa es $f^{-1}:[0,+\infty[\,\to[2,+\infty[\,, x\to f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{16+4x^2}}{2}$

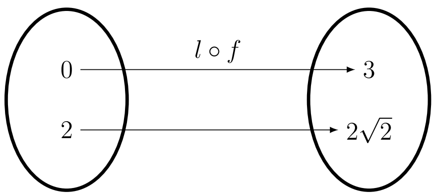
18.3) $f(f^{-1}(x))=f\left(\frac{\sqrt{16+4x^2}}{2}\right)=x, x\le 0$ y

$f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{\sqrt{4x^2-16}}{2}\right)=x, x\le 2$

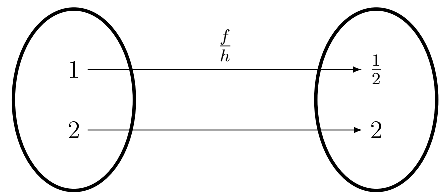
18.4)



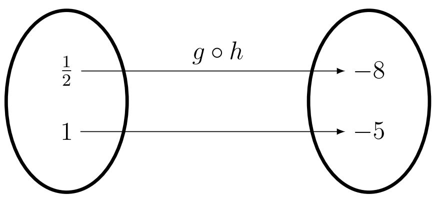
19. a)



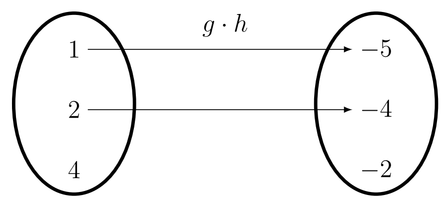
d)



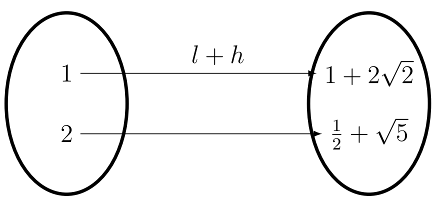
b)



e)



c)



20. a)

- $(f+g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} + \sqrt{x^2-1}$ y

  $(f \cdot g)(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{2-x}}$, ambas con dominio $X =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(2-x)}}$ con dominio $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
- $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \sqrt{(x^2-1)(2-x)}$ con dominio $X =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

b)

- $(f+g)(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2} + \sqrt{x-1}$ y

  $(f \cdot g)(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x-1}}{4-x^2}$, ambas con dominio $X = [1, 2[$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2}{(4-x^2)\sqrt{x-1}}$ con dominio $D = [1, 2[$.

- $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{(4-x^2)\sqrt{x-1}}{x^2}$ con dominio $X = [1, 2[$.

21. *a*)
    - $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-1}$ con dominio $A = [-2, -1[\cup]-1, +\infty[$
    - $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}$ con dominio $B = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup]-1, +\infty[$

    b)
    - $(f \circ g)(x) = 4 - \sqrt{36x^2 - 24x + 3}$ con dominio $A = \left]-\infty, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
    - $(g \circ f)(x) = 11 - 3\sqrt{4x^2 - 1}$ con dominio $B = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

    c)
    - $(f \circ g)(x) = \sqrt{5 - \sqrt{\frac{1}{x}}}$ con dominio $A = \left[\frac{1}{25}, +\infty\right[$.
    - $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{x}}}$ con dominio $B = [0, 25[$

22. a) 22.1) Kilos de pan k y el precio por comprarlos c

    22.2) la variable independiente es k y la variable dependiente es c

    22.3) $c(k) = 350k$

    b) 22.1) Tiempo t y distancia recorrida d

    22.2) la variable independiente es t y la variable dependiente es d

    22.3) $d(t) = 40t$

    c) 22.1) Tiempo t y la cantidad de bacterias c

    22.2) la variable independiente es t y la variable dependiente es c

    22.3) $c(t) = 2^t$

    d) 22.1) Longitud de la arista l y el volumen del cubo V

    22.2) la variable independiente es l y la variable dependiente es V

    22.3) $V(l) = l^3$

    e) 22.1) Cantidad de generaciones g y la cantidad de hijos h

    22.2) la variable independiente es g y la variable dependiente es h

    22.3) $h(g) = 3^g$

    f) 22.1) Minutos hablados m y precio total a cancelar p

    22.2) la variable independiente es m y la variable dependiente es p

    22.3) $p(m) = 50m + 20000$

g) 22.1) Número de elección n y año en el cual se realizó t

22.2) la variable independiente es n y la variable dependiente es t

22.3) $t(n) = 1788 + 4n$

23. Si x corresponde al número de empanadas fabricadas, entonces

a) la función gasto es $g(x) = 80x + 400$

b) la función ingreso es $I(x) = 500x$

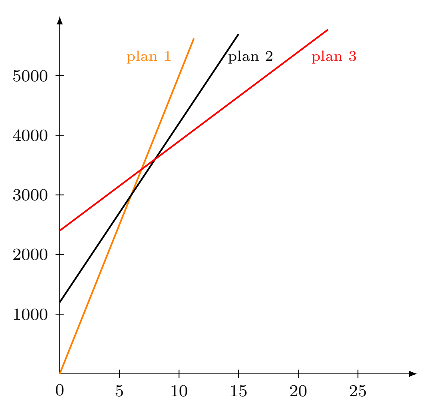
c) la función utilidad es $U(x) = I(x) - g(x) = 420x - 400$

d) la respuesta es 70 empanadas

24. *a*) Si C es el precio a pagar por arrendar p películas en el año, entonces

- plan 1: $C(p) = 5000p$
- plan 2: $C(p) = 3000p + 12000$
- plan 3: $C(p) = 1500p + 24000$

b)



c) el plan 3, dado que su gráfico crece más lento, porque es la semirecta de menor pendiente.

25. a) Si, porque cuando los minutos hablados varían de 100 en 100, entonces la tarifa varía en forma constante de 4000 en 4000

b) $P(m) = 40m + 2000$

c) \$26000

26. *a)* Si $p(t)$ es la población chilena t años transcurridos desde 1990 en adelante, entonces el modelo lineal es $p(t) = 0{,}1865t + 13{,}24$, donde la pendiente 0,0185 representa el hecho que por cada año transcurrido desde 1990, la población aumentó en promedio en aproximadamente 186500 personas

b) $p(40) = 20{,}7$ millones de personas

c) a partir del año 2054

d) $t = \frac{p-13{,}24}{p}$, la cual nos permite calcular en qué año la población chilena será de p personas

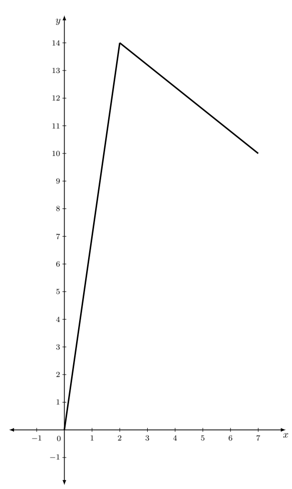
27. *a)* $7\frac{mm}{seg}$

b) $-\frac{4}{5}\frac{mm}{seg}$

c) $d(t) = 7t$

d) $d(t) = \frac{78}{5} - \frac{4}{5}t$

e)



f) la mayor distancia a la que estuvo del inicio, y el momento en el cual llegó a esa distancia

28. *a*) $h(t) = 30t - 5t^2$

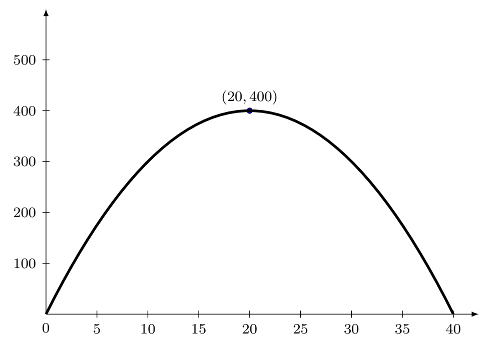
    b) a los 6 segundos

    c) 45 metros

29. a) $A(x) = x(40 - x)$

    b) $0 < x < 40$

    c)



    a) 20 metros de largo y 20 de ancho, es decir un terreno cuadrado

    b) 35 metros de ancho y 5 de largo, o 5 metros de largo y 35 de ancho

30. a) $p(x) = 14000 - 40x$

    b) $I(x) = 14000x - 40x^2$

    c) debe vender 175 pasteles en el mes para que su ingreso sea máximo, y este corresponde a 1 millón 250 mil pesos

    d) \$7000

31. *a*) Si el estanque posee l litros de agua, entonces la concentración c de sal en el estanque, viene dada por

$$c(l) = \frac{200}{l}$$

    con $Domc = [50, 100]$ y $Recc = [2\,\%, 4\,\%]$

    b) $l(t) = 50 + 2t$ con $Doml = [0, 25]$ y $Recl = [50, 100]$

c) $c(t) = \dfrac{200}{50 + 2t}$ con $Domc = [0, 25]$ y $Recc = [2\,\%, 4\,\%]$

d) a los 8 minutos y 20 segundos

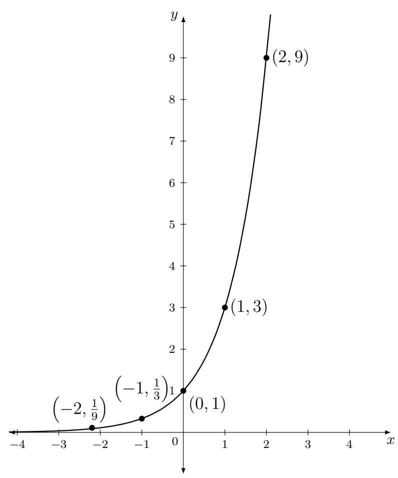
32. *a*) $V(x) = x(144 - 2x)^2$

b) $0 < x < 72$

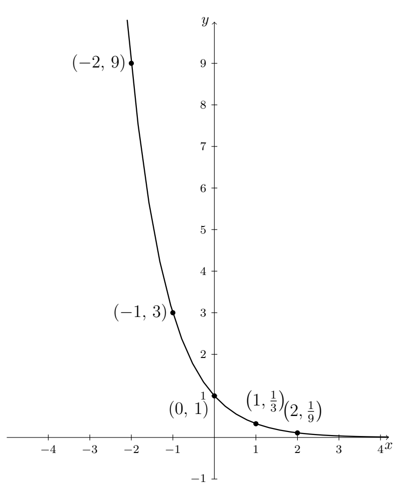
c) no

8.2. Función exponencial y logarítmica.

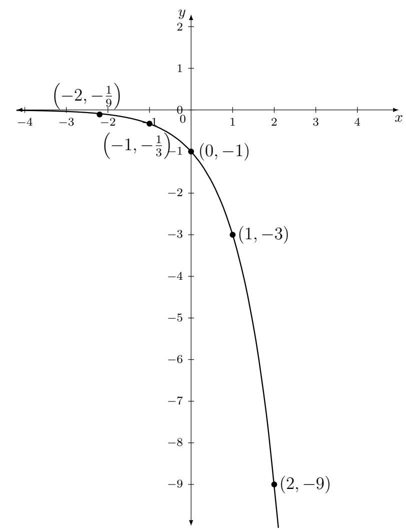
1. a)



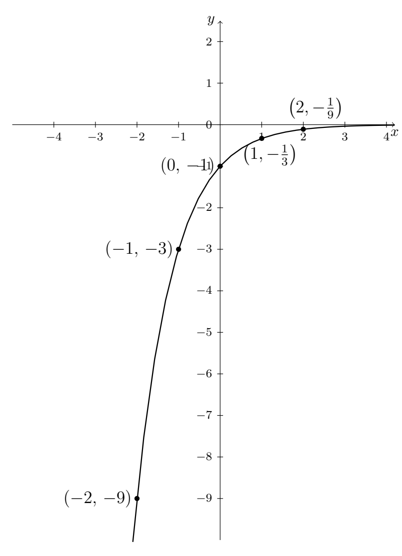
b)



c)



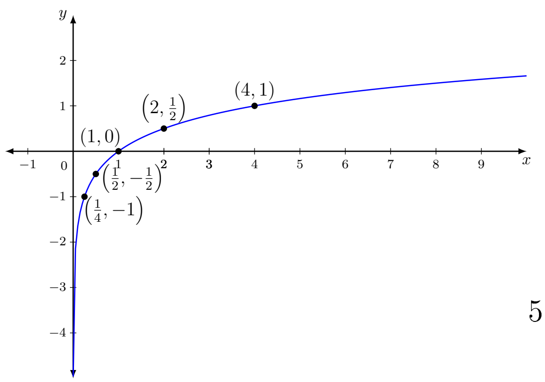
d)



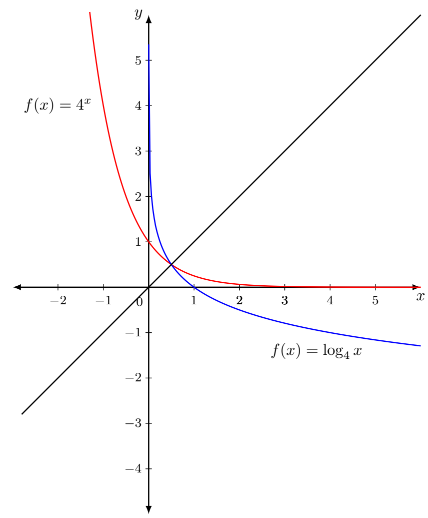
2. ▪ Con el gráfico de $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ es simétrico con respecto al eje y.

- con el gráfico de $h(x) = -3^x$ es simétrico con respecto al eje x
- con el gráfico de $l(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ es simétrico con respecto al origen

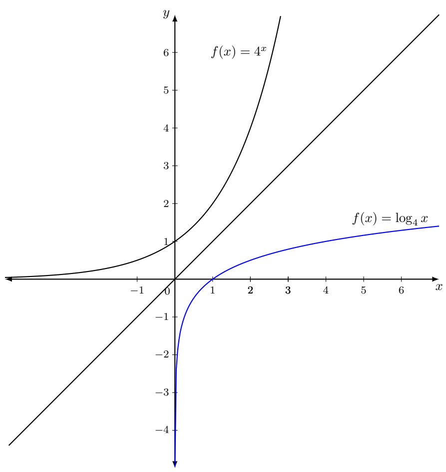
3.



5.



4.



6. Sus gráficos son simétricos con respecto al eje x.

7. a) -2, d) $\frac{2}{3}$ g) -18

   b) $\frac{3}{4}$ e) -3 h) 4

   c) $\frac{6}{5}$ f) 3

8. a) $x = \frac{1}{16}$ c) $x = 27$

   b) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = \frac{5}{4}$

9. *a*) $\left(\frac{1}{a}\right)^y = x$ *c*) $\log_a x = -y$

   b) $a^{-y} = x$ *d*) $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

10.
a) $x = -\frac{2}{3}$
b) $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $x = 2$
d) $x = \frac{1}{2}$
e) $x = \frac{4}{3}$
f) $x = -1$
g) $x = 0,$
h) $x = 0$
i) $x = -2$
j) $x = 8$
k) $x = 7$
l) $x = 3,\ x = \frac{1}{27}$
m) $x = 1,\ x = 16$
n) $x = 6,\ x = 4$
ñ) $x = 1$

11.
a) $x = \frac{\log_3 4}{1-\log_3 5}$
b) $x = \frac{\log_5 4}{\log_5 3-1}$
c) cambiando ambas soluciones a base 10, obtenemos que ambas corresponden a $x = \frac{\log 4}{\log 3-\log 5}$

12.
a) $\mathbb{R} - \{1\}$
b) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$
c) $]-\infty, \log_3 2]$
d) $]-4, -3[$
e) $\left]-\infty, -\frac{3}{4}\right[$

13.
a) Se tiene que
13.1) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$
13.2) $f : \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$
13.3) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[, x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{2^x + 1}}{2}$
b) Se tiene que
13.1) $]0, e]$
13.2) $f :]0, e] \to]0, +\infty[$
13.3) $f^{-1} :]0, +\infty[\to]0, e]\,,\ x \mapsto f^{-1}(x) = e^{1-x^2}$

14.
a) $]0, 1[$
b) $x = \frac{1}{2}$
c) si

15. *a)* $]0, +\infty[$

    b) $(f \circ g)(x) = \log_2(\sqrt{2^x - 1})$

16. a) $\lambda = \ln\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{30}}$

    b) A partir del año 2031

18. a) \$39040

    b) 9 %

19. 4 veces mayor

20. Aproximadamente 1313 años

21. a) 2,4

    b) si, dado que su pH es más cercano a 0 que el pH de la leche

8.3. Funciones circulares.

1. a) $\alpha = 135°$
   b) $\alpha = 330°$
   c) $\alpha = 225°$
   d) $\alpha = 300°$
   e) $\alpha = 630°$
   f) $\alpha = 90°$
   g) $\alpha = 240°$
   h) $\alpha = 120°$
   i) $\alpha = 150°$

2. a) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$
   b) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$
   c) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$
   d) $\alpha = \frac{\pi}{12}$
   e) $\alpha = \frac{7\pi}{12}$
   f) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$
   g) $\alpha = \frac{\pi}{3}$
   h) $\alpha = -\frac{5\pi}{12}$
   i) $\alpha = \frac{\pi}{4}$
   j) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

3. a) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \tan\alpha = -\sqrt{3}$

b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = -\frac{1}{2}\ \ \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \tan\alpha = -1$

d) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{1}{2}\ \ \tan\alpha = -\sqrt{3}$

e) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \tan\alpha = 1$

f) $\cos\alpha = -1, \sin\alpha = 0\ \ \tan\alpha = 0$

g) $\cos\alpha = 0, \sin\alpha = -1\ \ \tan\alpha$ no existe

h) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\alpha = \frac{1}{2}\ \ \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

i) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \ \tan\alpha = -\sqrt{3}$

j) $\cos\alpha = 0, \sin\alpha = 1\ \ \tan\alpha$ no existe

k) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \tan\alpha = -\sqrt{3}$

l) $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \tan\alpha = \sqrt{3}$

4. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

c) $-\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5. a) $t = \frac{3\pi}{2}$

b) $t = \frac{\pi}{6},\ t = \frac{11\pi}{6}$

c) $t = \frac{\pi}{6},\ t = \frac{5\pi}{6}$

d) $t = \frac{3\pi}{4},\ t = \dfrac{5\pi}{4}$

e) $t = 0,\ t = \pi$

f) $t = \frac{\pi}{3},\ t = \frac{4\pi}{3}$

g) $t = \frac{5\pi}{6},\ t = \frac{11\pi}{6}$

h) $t = \frac{\pi}{3},\ t = \frac{5\pi}{3}$

i) $t = \frac{7\pi}{6},\ t = \frac{11\pi}{6}$

6. a) 6.1) $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

6.2) $t = \frac{\pi}{6} + k\pi$ o $t = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

b) 6.1) $t = 0, \pi, 2\pi$

6.2) $t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) 6.1) $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

6.2) $t = 2k\pi$ o $t = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$

d) 6.1) $t = \frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}$

6.2) $t = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e) 6.1) $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

6.2) $t = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

f) 6.1) $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

6.2) $t = \frac{\pi}{6} + k\pi$ o $t = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

i) 6.1) $t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$

6.2) $t = 2k\pi$ o $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

k) 6.1) $t = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

6.2) $t = 2k\pi$ o $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

l) 6.1) $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

6.2) $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

m) 6.1) $t = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

6.2) $t = k\pi$ o $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

n) 6.1) $t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

6.2) $t = \frac{\pi}{6} + k\pi$ o $t = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

7. a)

$$\frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t} = \frac{2}{1-\sin^2 t} = 2\sec^2 t$$

b)

$$\frac{\tan t + \cot t}{\sec t \cdot \csc t} = \frac{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos t \sin t}}{\frac{1}{\cos t \sin t}} = 1$$

c)

$$\cos^2 t + \cot^2 t \cdot \cos^2 t = \cos^2 t\left(1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\right) = \cos^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}\right) = \cot^2 t$$

d)

$$\sec^2 t + \csc^2 t = \frac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = \sec^2 t \cdot \csc^2 t$$

e)

$$\frac{\sin t}{1+\cos t}+\frac{1+\cos t}{\sin t}=\frac{2+2\cos t}{\sin t(1+\cos t)}=2\csc t$$

f)

$$\sin^2 t\cos^2 t+\cos^4 t=\cos^2 t=\frac{1}{\sec^2 t}$$

g)

$$\cot t+\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{\cos t}{\sin t}+\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{\cos t+1}{\sin t(\cos t+1)}=\csc t$$

8. a) Se usa la fórmula de $\cos(\alpha+\beta)$.
   b) se usa la fórmula de $\sin(\alpha+\beta)$
   c) se usa la fórmula de $\sin(\alpha+\beta)$
   d) se usa la fórmula de $\tan(\alpha-\beta)$

9. a) $y=\sqrt{3}x$
   b) $y=-x+1$

10. a) $y=2\frac{\sqrt{3}}{3}x$
    b) $y=\sqrt{3}x$
    c) no

11.

$$f^{-1}:[0,1]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$x\mapsto f^{-1}(x)=\arccos(\sqrt{x})$$

12. a) $\frac{\pi}{3}$
    b) $\frac{3\pi}{2}$
    c) $\frac{\pi}{2}$
    d) $\frac{7\pi}{12}$
    e) $\dfrac{2\pi}{3}$
    f) $\frac{7\pi}{12}$

13. a) Si $\arcsin x=\alpha$, entonces $\sin\alpha=x$, de donde $\csc\alpha=\frac{1}{x}$, y así se obtiene lo pedido
    b) si $\arccos x=\beta$, entonces $\cos\beta=x$, de donde $\sec\beta=\frac{1}{x}$, y así se obtiene lo pedido

14. a) $x=0$ o $x=1$
    b) $x=-\frac{1}{2}$

15. a) $x=1{,}09$
    b) $x=4{,}44$
    c) $90°$

16. $15\dfrac{grados}{hr}$

17. 86,5°

18. 55.9 metros

19. aproximadamente 98 metros

20. 45°

21. a) Si se puede, y la distancia es de 1,03 metros

    b) si se puede, y la distancia es de 1,03 metros

    c) si se puede. Note que el triángulo que forma la escalera y el piso es isósceles. Denotamos por x a la distancia desde cada pie de la escalera hasta el punto medio de la base. Proyectando la altura hasta la base, se forman dos triángulos rectángulos, cada cual tiene hipotenusa de longitud 2, un ángulo de 75°, y el cateto adyacente a este ángulo que mida x unidades. Fijándonos en uno de estos triángulos, se tiene que $\cos 75° = \frac{x}{2}$, de donde obtenemos el valor de x, y finalmente el valor de la distancia pedida.

22. La estatua mide 1 metro y 70 cms, y el pedestal 80 cms

23. $3{,}16\frac{m}{s}$

24. *a*) 5 veces la masa de la pelota

    b) 8.5 veces la masa de la pelota. No es el doble

    c) 45°

    d) se acerca a ser equivalente al peso de la pelota

25. Al pueblo Q, dado que está a 14 kms del campamento C y por otro lado el pueblo P está a 16,4 kms de C

26. A la isla A, dado que está a 3894 metros de ella, mientras que está a 9880 metros de la isla B

27. a) En la primera observación está a 46,9 metros de su casa, y en la segunda a 49,6 metros

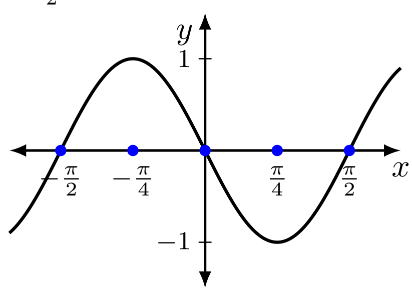
    b) a 34,7 metros

28. 46,8 metros

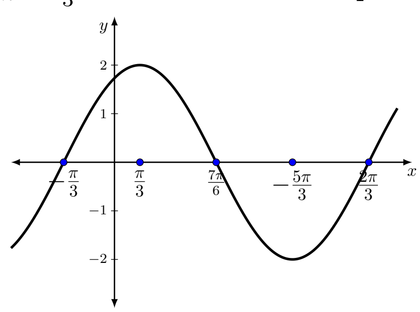
29. 6,6 kms

30. 29,9 metros

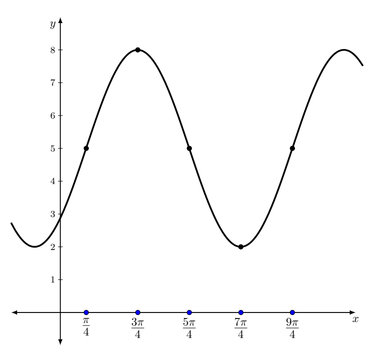
31. a) $|a| = 1, p = \frac{\pi}{2}, d_h = \frac{\pi}{2}$unidades hacia la izquierda, $d_v = 0$



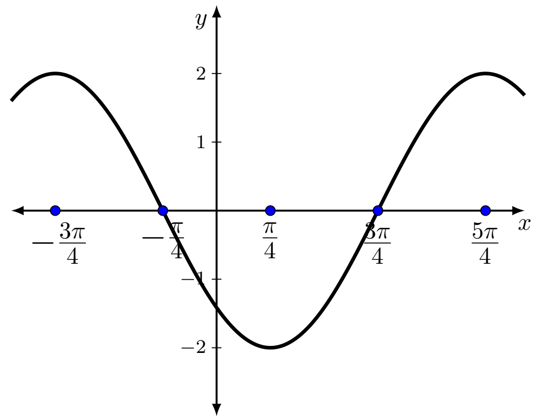
    b) $|a| = 2, p = 2\pi, d_h = \frac{\pi}{3}$unidades hacia la izquierda, $d_v = 0$



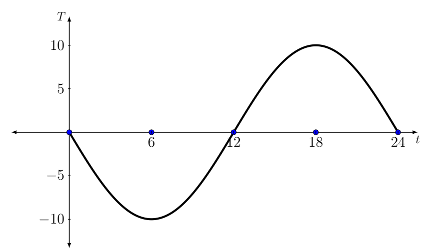
    c) $|a| = 3, p = 2\pi, d_h = \frac{\pi}{4}$unidades hacia la derecha, $d_v = 5$unidades hacia arriba



d) $|a| = 2, p = 2\pi, d_h = \frac{3\pi}{4}$unidades hacia la derecha, $d_v = 0$



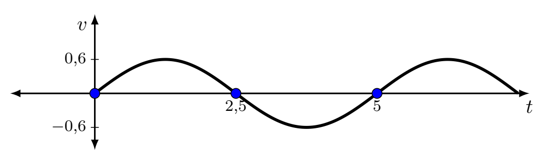
32. a)



b) a las 6 de la mañana, y corresponde a $-10°$

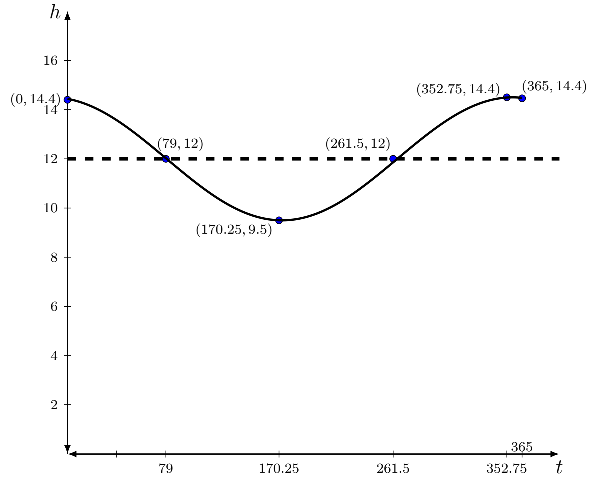
c) a las 18 horas

33. a)



b) la inhalación ocurre entre los 0 y 2,5 segundos de iniciado el ciclo. La exhalación ocurre entre los 2,5 y 5 segundos de iniciado el ciclo. El ciclo respiratorio dura 5 segundos

34 a)



b) aproximadamente entre el día 79 y el día 261 del año 2018. Según el calendario, esto será desde el 20 de Marzo al 18 de Septiembre

8.4. Números Complejos.

1. a)
- Par ordenado: $(1, 1)$
- forma polar: $\sqrt{2}cis(\frac{\pi}{4})$
- forma exponencial: $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b)
- par ordenado:$(1, -1)$
- forma polar: $\sqrt{2}cis(\frac{7\pi}{4})$
- forma exponencial: $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$

c)
- par ordenado:$(0, 2)$
- forma polar: $2cis(\frac{\pi}{2})$
- forma exponencial: $2e^{i\frac{\pi}{2}}$

d)
- par ordenado:$(0, -\frac{1}{4})$
- forma polar: $-\frac{1}{4}cis(\frac{3\pi}{2})$
- forma exponencial: $-\frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{2}}$

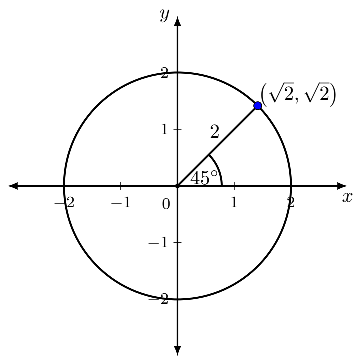
e)
- par ordenado:$(-3, 0)$
- forma polar: $3cis(\pi)$
- forma exponencial: $3e^{i\pi}$

f)
- par ordenado:$(3, -\sqrt{3})$
- forma polar: $2\sqrt{3}cis(\frac{11\pi}{6})$
- forma exponencial: $2\sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}$

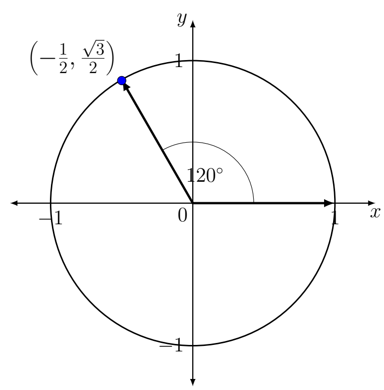
g)
- par ordenado:$(-\sqrt{3}, 3)$
- forma polar: $2\sqrt{3}cis(\frac{2\pi}{3})$
- forma exponencial: $2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

h)
- par ordenado:$(-\sqrt{3}, -1)$
- forma polar: $2cis(\frac{7\pi}{6})$
- forma exponencial: $2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

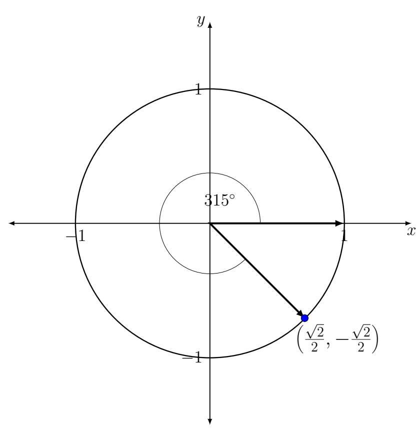
2. a) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$



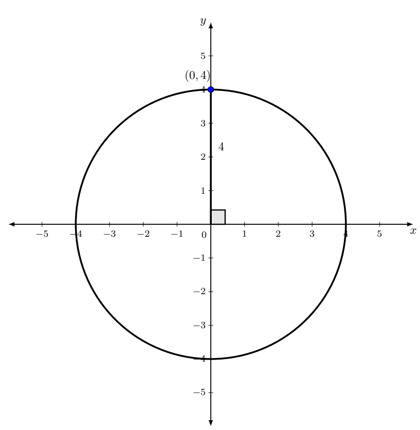
b) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$



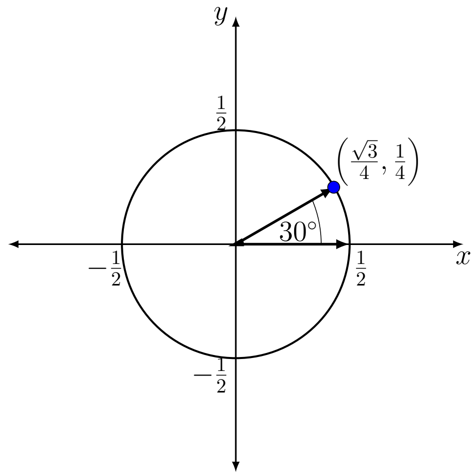
c) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$



d) $z = 4i$



e) $z = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$



3. *a*) 7
   b) $4i$
   c) 20
   d) $\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$
   e) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$
   f) -2
   g) $\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$
   h) $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$

4. a) Se deduce del hecho que $(a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b - d)i$

   b) Se deduce del hecho que $(a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad - bc)i$

5. Se deduce del hecho que $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2}$

6. a) $z \cdot w = 2\sqrt{3} - 2i$

   b) $z = 2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right), w = 2cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ y $z \cdot w = 4cis\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ de donde probamos que

   - el módulo de $z \cdot w$ es el producto entre el módulo de z y el módulo de w
   - el argumento de $z \cdot w$ es la suma del argumento de z con el argumento de w

7. Se deduce del hecho que

$$z \cdot w = (r_1 cos\theta_1 + r_1 sen\theta_1 i)(r_2 cos\theta_2 + r_2 sen\theta_2 i)$$

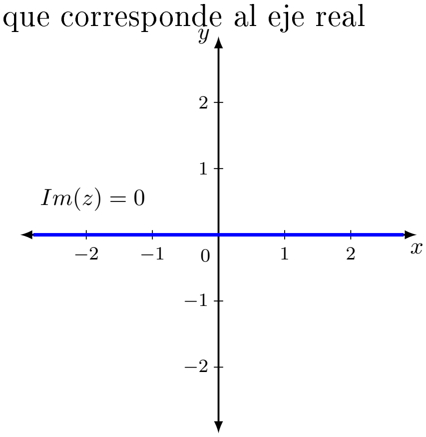
$$= r_1 r_2 cos(\theta_1 + \theta_2) + r_1 r_2 sen(\theta_1 + \theta_2)$$

8. a) $z \cdot w = 6cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$ b) $z \cdot w = 6$

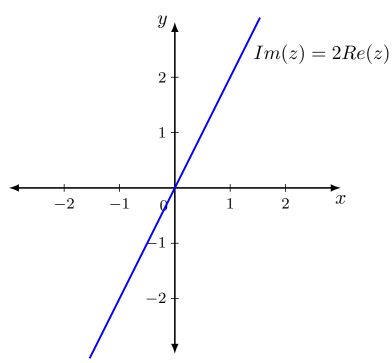
9. En cualquier caso, $z^3 = -i$

10. En cada caso, si $x + yi$ es un número complejo cualquiera, entonces el conjunto es caracterizado por:

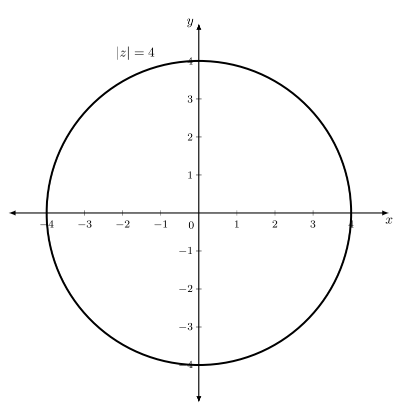
    a) $y = 0$, ecuación que corresponde al eje real



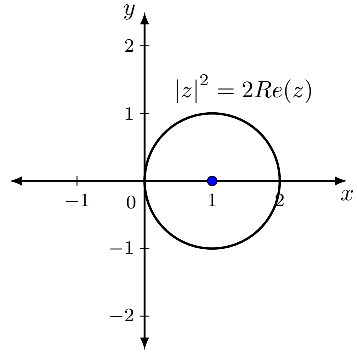
    b) $y = 2x$, ecuación que corresponde a la recta de pendiente 2 y que pasa por el origen



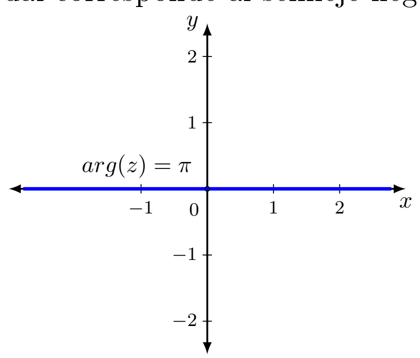
    c) $x^2 + y^2 = 16$ ecuación que corresponde a la circunferencia de centro en $(0, 0)$ y radio 4



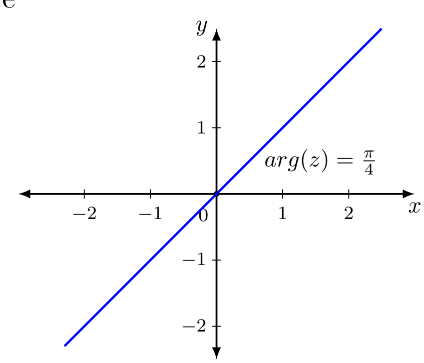
d) $x^2 + (y-1)^2 = 1$, la cual corresponde a una circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1



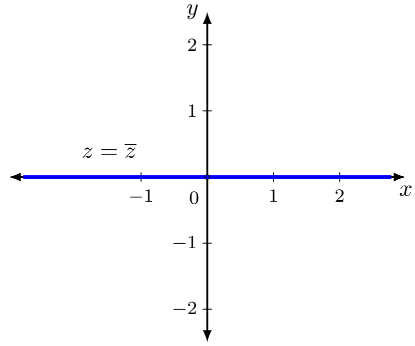
e) $y = 0, x \leq 0$, lo cual corresponde al semieje negativo



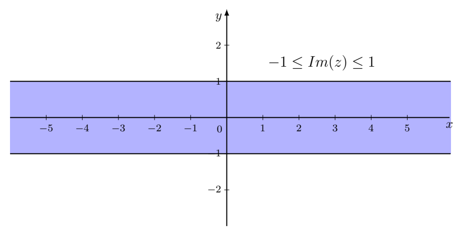
f) $y = x, x \geq 0$, lo cual corresponde al trozo de la recta $y = x$ que está en el primer cuadrante



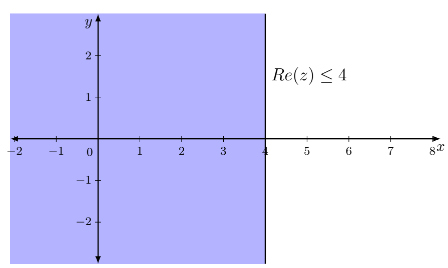
g) $x = 0$, ecuación que corresponde al eje imaginario



h) $-1 \leq y \leq 1$, la región que corresponde a la franja entre las rectas $y = -1$ e $y = 1$



i) $x \leq 4$, región que corresponde al semiplano izquierdo determinado por la recta $x = 4$, incluyendo a esta recta.



11. Con cualquiera de las formas propuestas, las soluciones son:

a) $x = \pm 3i$

b) $x = \pm 4\sqrt{2}i$

c) $x = \pm\sqrt{a^2}i$

d) $x = -1 \pm 3i$

e) $x = 2 \pm 5i$

f) $x = 3 \pm i$

g) $x = \frac{1}{2} \pm i$

h) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

i) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$

j) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$

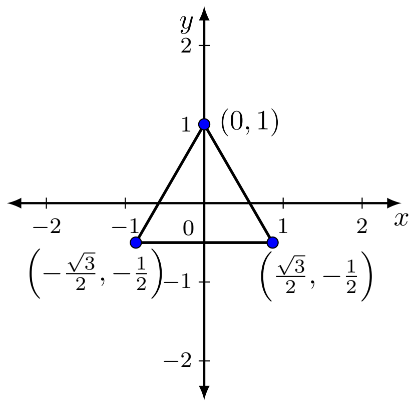
12. a) $x^2 - 2x + 10 = 0$

    b) $x^2 - 4x + 5 = 0$

    c) $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$

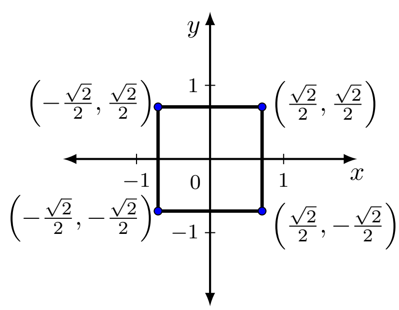
13. Las soluciones son $1, -1 \pm 2i$

14. a) $i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$



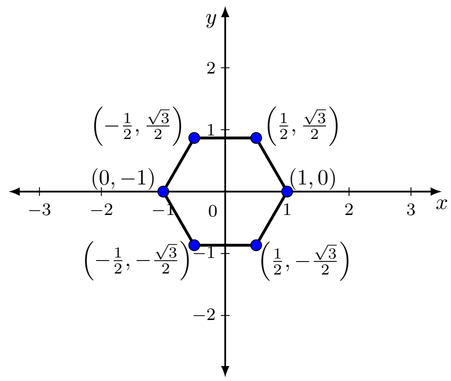
    b) el perímetro es $3\sqrt{3}u$ y el área es $\frac{3}{4}u^2$

15. a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$



    b) el perímetro es $4\sqrt{2}u$ y el área es $2u^2$

16. a) $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$



b) el hexágono se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de lado 1. De este modo, su área es $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$

17. $\bar{z} = rcis(2\pi - \theta)$

18. Se deduce del hecho que

$$\left| \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right) i \right| = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}}$$

19.

$$H.I : \overline{z^k} = (\overline{z})^k,\ T.I. : \overline{z^{k+1}} = (\overline{z})^{k+1}$$

Se tiene que

$$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k} \cdot \overline{z} = \overline{z}^k \cdot \overline{z} \text{ (por H.I.)} = (\overline{z})^{k+1}$$

8.5. Polinomios.

1. a) $p(x) = (x-1)(x-2)(x+3)^3$

   b) $p(x) = (x^2-2x+5)^2(x^2-2x+5)^2$

   c) $p(x) = x^2(x^2-2x-2)$

   d) $p(x) = (x^6-1)(x+1)$

2. a) sólo basta probar que $p(2) = 0$

b) dividimos $p(x)$ entre $x-2$, obteniendo resto 0

c) dividimos $p(x)$ entre $x-2$, obteniendo resto 0

3. a) dividimos $p(x)$ entre x^2+1, obteniendo resto 0

b) $x = 1+2i, 1-2i, i, -i$ todas de multiplicidad 1

4. a) $q(x) = x^2 - 6x + 10$

b) $q(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$

5. a) dividimos $p(x)$ entre $x^2 - 6x + 10$, obteniendo resto 0

b) $x = 3+i, 3-i, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ todas de multiplicidad 1

6. a) $p(x) = x^2 - 2x - 1$

b) $p(x) = x^2 - 2ax + (a^2 - b)$

7. a) Los candidatos a raíces racionales son 1 y -1, pero se prueba que no son raíces de $p(x)$

b) basta dividir $p(x)$ entre $x^2 - 2x - 1$, de donde se obtiene resto 0

c) sus raíces complejas son $x = 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, i, -i$. Su factorización en $\mathbb{Q}[x]$ es $p(x) = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 1)$. Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es
$p(x) = (x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2}))(x^2+1)$. Su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es
$p(x) = (x - (1+\sqrt{2}))(x - (1-\sqrt{2}))(x-i)(x+i)$

8. a) Sus raíces son $x = 0$ de multiplicidad 1, y $x = -1$ de multiplicidad 3. Su factorización en en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ es $p(x) = x(x+1)^3$

b) sus raíces son $x = 8i, -8i$ ambas de multiplicidad 2. Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es $p(x) = (x^2+8)^2$. Su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es $p(x) = (x-8i)^2(x+8i)^2$

c) sus raíces son $x = 1, i, -i$ todas de multiplicidad 1. Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es $p(x) = (x-1)(x^2+1)$. Su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es $p(x) = (x-1)(x-i)(x+i)$

d) sus raíces son $x = \frac{1}{2}$ de multiplicidad 2 y $x = \frac{3}{2}$ de multiplicidad 1. Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ es $p(x) = (x - \frac{1}{2})^2(x - \frac{3}{2})$

e) sus raíces son $x = 1, -3$ ambas de multiplicidad 1, y $x = -2$ de multiplicidad 2. Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$ es $p(x) = (x-1)(x+2)^2(x+3)$

f) sus raíces son $x = 1, -1, i, -i$ de multiplicidad 1, y $x = -3$ de multiplicidad 2. Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x+3)^2(x^2+1)$$

. Su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x+3)^2(x-i)(x+i)$$

g) sus raíces son $x = -2, 2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i$, todas de multiplicidad 1. Su factorización en $\mathbb{R}[x]$ es

$$p(x) = (x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4).$$

Su factorización en $\mathbb{C}[x]$ es

$$p(x) = (x-2)(x+2)(x-(1+\sqrt{3}i))(x-(1-\sqrt{3}i))(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))$$

9. a) $k = \frac{7}{3}$ b) $k = 3$

10. 4 cms

11. 2 unidades

12. a) Sólo basta hacer división sintética con $c = 1$ y probar que el resto obtenido es 0

 b) $x = 1$, $x = 1{,}58$, $x = 2{,}3$

 c) aproximadamente a 1 metro y 58 centímetros

13. a) $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+4}$

 b) $\dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)^3}$

 c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

d) $\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4(x^2+4)}$

e) $1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

f) $\frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$

g) $\frac{1}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} + \frac{x}{x^2+1}$

h) $-\frac{2}{3(x-1)} + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{3(x+2)}$

i) $\frac{x^3+4-3}{x^2-x}$

j) $\frac{3}{x} - \frac{3x+2}{x^2+x+1}$

8.6. Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones.

1. a)
   - $A : 2 \times 2$
   - $B : 3 \times 1$
   - $C : 3 \times 3$
   - $D : 2 \times 3$
   - $E : 4 \times 4$
   - $F : 1 \times 3$
   - $G : 3 \times 3$
   - $H : 3 \times 2$
   - $I : 3 \times 3$

   b) A, C, E, G, I

   c) c1) B

   c2) F

   c3) E

   c4) C, E, G

   c5) I

2. $$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 6 & -\frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4. a)
   $$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

   por lo que la respuesta es no

b)

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (A-B)(A+B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

por lo que la respuesta es no

5.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 15 & 0 & -3 \\ -3 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ AC = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 15 & 0 & -3 \\ -3 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Si

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

satisface que la ecuación dada, entonces obtenemos las ecuaciones

$$a^2 + bc = 1, \ ab + bd = 0, \ ac + cd = 0, \ bc + d^2 = 4$$

de donde se obtienen las 4 soluciones planteadas

8. a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ -2 & 4 & -13 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} \text{ no existe}, \ E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, F^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 11 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. $|A| = 160$, luego

   - $B = A^t$, por lo que $|B| = 160$
   - C se obtiene haciendo $f_3 \to -3f_3$ en A, por lo que $|C| = -480$
   - D se obtiene haciendo $f_1 \to f_2$ en A, por lo que $|D| = -160$
   - E se obtiene haciendo $c_2 \to -2c_2$ y $c_3 \to -2c_3$ en A, por lo que $|C| = 640$
   - F se obtiene haciendo $f_2 \to f_2 - f_1$ en A, por lo que $|F| = 160$
   - $G = A^{-1}$, por lo que $|G| = \frac{1}{160}$
   - $|H| = 160^3$
   - $|J| = 20000$

10. $|A| = -1, \; |B| = 0, \; |C| = -112, \; |D| = -68$

11. a) Sí, dado que $|A| = 6$

   b y c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

   d) $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$

12. *a*) -8.

   b) 32

   c) -8

   d) 8

13. $\lambda \neq 6, \;$ y $\lambda \neq 11$

14. $\lambda = 3$ o $\lambda = 0$

15. $\lambda = 1$

16.
   - $ran(A) = 2$
   - $ran(B) = 1$

- $ran(C) = 3$
- $ran(D) = 3$
- $ran(E) = 3$

17. - $ran(A) = 3$, si y sólo si $k \neq 2$ y $k \neq 1$
    - $ran(A) = 2$, si y sólo si, $k = 2$ o $k = 1$
    - no es posible que $ran(A) = 1$

18. *a*) No tiene solución

    b) $x = 4, y = 2$

    c) $x = 1, y = \frac{1}{5}, z = -\frac{2}{5}$

    d) $x = \frac{10}{17},\ y = -\frac{4}{17},\ z = \frac{1}{17}$

    e) $x = \frac{4}{9},\ y = \frac{20}{9},\ z = t - \frac{5}{3},\ w = t$ con $t \in \mathbb{R}$

    f) $x = -t,\ y = t,\ z = t,\ w = 0$ con $t \in \mathbb{R}$

    g) $x = \frac{11}{2},\ y = -\frac{38}{5},\ z = \frac{1}{10},\ w = 2$

19. a) $x = \frac{21}{2}, y = -4, z = -\frac{11}{2}$

    b) $x = -2, y = 5, z = 7$

    c) $x = 2, y = -2, z = 3, w = -1$

20. - El sistema tiene solución única cuando $\lambda = 1$ o $\lambda = -2$
    - el sistema tiene infinitas soluciones cuando $\lambda = -2$
    - el sistema no tiene solución cuando $\lambda = 1$

21. Pablo recibió 60 millones, Francisco 10 millones y Felipe 50 millones

22. En el banco A invirtió 20 millones, en el banco B 15 millones, y en el banco C 5 millones

23. a) Si c es la producción de carbón, t de transporte y e de energía eléctrica, entonces el sistema es

$$
\begin{aligned}
0{,}8c - 0{,}1t - 0{,}2e &= 1{,}2\\
-0{,}1c + 0{,}9t - 0{,}2e &= 0{,}8\\
-0{,}2c - 0{,}4t + 0{,}7e &= 1{,}5
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ t \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}8 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}.
$$

c) $c = 2{,}8$ millones de dólares, $t = 2{,}12$ millones de dólares, $e = 4{,}15$ millones de dólares

24. $k = 114$

Bibliografía

[1] Larson, R.; Edwards, B. (2010) *Cálculo 1 de una variable. Novena edición.* McGraw- Hill/Interamericana Editores.

[2] Lewin, R.; López, A.; Martínez, S.; Rojas, D.; Zanocco, P. (2013) *REFIP Números.* Ediciones SM Chile S.A.

[3] Swokowski, E.; Cole, J. (2011) *Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. 13a edición.* Cengage Learning Editores.

[4] Polya, G.(1981) *Cómo plantear y resolver problemas. Novena reimpresión.* Editorial Trillas.

[5] Zill, D.; Dewar, J. (2012) *Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera edición.* McGraw- Hill/Interamericana Editores.

[6] Lamon, S. (2008) *Teaching fractions and ratios for understanding. Segunda edición.* Taylor & Francis e-Library.