UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
DIRECCIÓN DE DOCENCIA

EJERCICIOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAL:

TEXTO DE APOYO AL ESTUDIANTE, TOMO 1.

AUTOR: FRANCISCO TOLEDO OÑATE

CONCEPCIÓN-CHILE

A: 2019

Índice general

Introducción.

Este texto fue creado como una ayuda para el estudiante que enfrenta las matemáticas de primer año de Universidad. La dinámica consiste fundamentalmente en explicar los contenidos a través de ejercicios, los cuales el estudiante debe ir resolviendo en la medida que lee el texto. La idea es ir resolviendo estos ejercicios en base a la intuición y a algunos conocimientos previamente adquiridos. La buena comprensión de la resolución de los ejercicios permite luego generalizar lo aprendido, estableciendo definiciones y teoremas. El texto pretende que el estudiante use mecanismos lo menos posible, privilegiando el desarrollo de los problemas de forma razonada e intuitiva. Se pretende también en el texto, usar la formalidad matemática justa y necesaria, adoptando un lenguaje más cercano a aquella persona que no sabe Matemática, y que desea aprenderla. En definitiva, se busca acercar la Matemática a la gente.

En este primer tomo, el texto trata las siguientes 6 unidades:

- Capítulo 1: Lógica y Conjuntos
- Capítulo 2: Conjuntos numéricos
- Capítulo 3: Proporcionalidad
- Capítulo 4: Números reales y lenguaje algebraico
- Capítulo 5: Inducción Matemática, progresiones y teorema del binomio
- Capítulo 6: Geometría Analítica

En el capítulo 1, se aborda fundamentalmente todo el formalismo matemático necesario para unidades posteriores. En los capítulos 2 y 3, el centro son los conjuntos numéricos y su operatoria, más aplicaciones. En los capítulos 4, 5 y 6 ya nos adentramos en el mundo del Álgebra, sin olvidar lo aprendido en los capítulos anteriores, comprendiendo y luego aplicando las técnicas aprendidas en diversas situaciones, algunas de índole matemática y otras en situaciones de contexto. Además, al final del texto aparecen las respuestas de los ejercicios propuestos.

Finalmente quisiera agradecer a la Dirección de Docencia, a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas y a todas aquellas personas que me ayudaron a realizar este texto, sin ustedes este proyecto no hubiese llegado a buen puerto.

Espero disfruten este texto, el sacrificio del autor está plasmado en estas páginas.

Francisco Toledo Oñate.

Capítulo 1

Lógica y Conjuntos.

1.1. Introducción.

En este capítulo, en primer lugar, abordaremos la lógica proposicional, cuyo concepto fundamental es el de proposición. Dos ejemplos de proposiciones, las cuales son denotadas por p y por q respectivamente, son

$$p: \text{29 es un número primo,}$$

y

$$q: \text{Ningún número natural impar es múltiplo de 2.}$$

También estudiaremos los conectivos lógicos, los cuales nos permiten formar una proposición a partir de una o varias proposiciones. Estos se denotan por $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$ y se leen como “no”, “y”, “o”, “entonces” y “si, y sólo si”, respectivamente.

Las proposiciones formadas con conectivos lógicos, reciben el nombre de proposición compuesta. Un ejemplo es

$$p: 3^2 = (-3)^2 \rightarrow 3 = -3,$$

la cual se lee como

$$\textit{si } 3^2 = (-3)^2 \textit{ entonces } 3 = -3.$$

A continuación, estudiaremos las funciones proposicionales, Un ejemplo es la función proposicional denotada por $p(x)$, la cual es

$$p(x) : x^2 > 0,$$

siendo x un número real. Junto con ellas, abordaremos los cuantificadores lógicos, los cuales nos permiten expresar si una función proposicional es verdadera para algún, sólo uno, o para todos los elementos de un determinado conjunto universo. Cabe mencionar que todo el simbolismo estudiado aquí es la base de la sintáxis matemática, por lo que su buena comprensión es importante para el estudio de unidades posteriores.

En segundo lugar, estudiaremos todo lo vinculado a conjuntos, las relaciones entre ellos y algunos ejemplos particulares. Estudiaremos cómo obtener la intersección, unión y diferencia de conjuntos, también el complemento de un conjunto. Un problema interesante abordado en esta sección, es determinar el conjunto intersección, o sea de los elementos comunes, de

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 4\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 6\},$$

mencionando la característica que define a los elementos de este conjunto, es decir, definiéndolo por comprensión.

Además, entre otras cosas, analizaremos cuando un conjunto es subconjunto de otro, y demostraciones de propiedades vinculadas con conjuntos.

1.2. Proposiciones.

Ejemplos de proposiciones:

- Hoy es Sábado.
- $(-4)^2 = 16$.
- $-4^2 = 16$.
- 29 es un número primo.
- $\frac{2}{0} = 0$.

Ejemplos de sentencias que no son proposiciones:

- ¿Cómo te llamas?
- ¡Calláte!
- Buenas tardes a todos.

Definición 1.2.1. *Una **proposición** es una aseveración que posee un único valor de verdad. Es decir, es una aseveración que, o bien es verdadera, o bien es falsa. Una proposición se denota usualmente por alguna de las letras minúsculas p, q, r, s, etc.*

Ejercicio 1.2.1. *Determine el valor de verdad de las proposiciones del ejemplo inicial:*

- *Hoy es Sábado.*

  Solución. Depende del día en que lo leas. Yo lo estoy escribiendo un día sábado, por lo que para mí es verdadero. El valor de verdad que tú le das dependerá del día en que lo estás leyendo.

- $(-4)^2 = 16$.

  Solución. Note que $(-4)^2 = -4 \cdot -4 = 16$, por lo que la aseveración es verdadera.

- $-4^2 = 16$.

  Solución. Note que $-4^2 = -(4 \cdot 4) = -16 \neq 16$, por lo que la aseveración es falsa.

- 29 *es un número primo.*

  Solución. Recordemos que un número primo es número natural mayor a 1, el cual es sólo divisible por 1 y por sí mismo. El número 29 cumple esta condición. De este modo, la aseveración es verdadera.

- $\dfrac{2}{0} = 0$.

  Solución. Para analizar su valor de verdad, consideremos el siguiente razonamiento. Si tenemos la división:

  - $\dfrac{15}{5}$, para obtener su resultado, nos preguntamos ¿cuántos 5 debo sumar para obtener 15? La respuesta es 3, por lo que $\frac{15}{5} = 3$.
  - $\dfrac{0}{2}$, para resolverlo nos preguntamos,¿cuántos 2 debo sumar para obtener un 0? La respuesta es 0, es decir, $\frac{0}{2} = 0$.
  - $\dfrac{2}{0}$, para resolverlo nos preguntamos, ¿cuántos 0 debo sumar para obtener un 2? Sin importar las veces que se sume 0, el resultado siempre será 0, por lo que podemos de este modo argumentar que $\dfrac{2}{0}$ no está definido. Así, nuestra aseveración es falsa.

$\square$

1.3. Conectivos lógicos.

A partir de una o varias proposiciones dadas, se puede formar una proposición, usando alguno de los llamados **conectivos lógicos**. La proposición obtenida recibe el nombre de **proposición compuesta**. Cuando una proposición no tiene conectivos lógicos, recibe el nombre de **proposición simple** (como las estudiadas hasta ahora en este capítulo). Analizaremos todo esto a continuación.

1.3.1. Negación.

Consideremos la proposición

$$p : \text{Superman tiene capa roja.}$$

La negación de p, la cual es denotada por $\sim p$, es

$$\sim p : \text{Superman no tiene capa roja.}$$

En general, tenemos que

Definición 1.3.1. *Dada una proposición simple p, su* ***negación*** *es la proposición denotada por $\sim p$, la cual es falsa si p es verdadera y es verdadera si p es falsa.*

Ejercicio 1.3.1. *Determine el valor de verdad y escriba la negación de cada proposición siguiente.*

a) p : *París está en América.*

   Solución. Su valor de verdad es falso y su negación, la cual es verdadera, es

$$\sim p : \text{París no está en América.}$$

b) $r : 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100 = 5050.$

   Solución. Para determinar el valor de verdad de r, razonemos como lo hizo el pequeño Gauss: agrupamos los sumandos en parejas, específicamente, el 1 con el 100, el 2 con el 99, el 3 con el 98, ..., el 48 con el 53, y el 49 con el 52, y el 50 con el 51. Es decir, formamos 50 parejas, donde cada una de ellas suma 101. Luego

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100 \\
&= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (49 + 52) + (50 + 51) \\
&= 50 \cdot 101 \\
&= 5050.
\end{aligned}$$

De este modo, r es verdadera y su negación, la cual es simplemente

$$\sim r : 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100 \neq 5050,$$

es falsa.

c) *q: todas las ciudades de Chile tienen mall.*

Solución. La proposición es falsa. Su negación es

$$\sim q : \text{no todas las ciudades de Chile tienen mall},$$

o también puede ser

$$\sim q : \text{existen ciudades de Chile que no tienen mall.}$$

Con cualquiera de las dos formas expuestas, su negación es falsa. $\square$

Podemos completar la denominada **tabla de verdad** de la negación. Para comenzar, consideramos una tabla, en la cual en la primera columna tenemos una proposición p cualquiera, y hacia abajo las opciones de valores de verdad que ésta tiene: verdadero (V) o falso (F). En la segunda columna, consideramos su negación $\sim p$:

p	$\sim p$
V	
F	

Ahora completamos cada fila. En la primera fila, si p es V, entonces su negación es F:

p	$\sim p$
V	F
F	

En la segunda fila, si p es F, entonces $\sim p$ es V, con lo que la tabla queda completa:

p	$\sim p$
V	F
F	V

1.3.2. Conjunción.

Considere las proposiciones

$$p : \text{Neruda es chileno}$$

y

$$q : \text{García Márquez es colombiano}$$

La **conjunción** de p y q, la cual es denotada por $p \wedge q$, y es leída como "p y q", es la proposición

$$p \wedge q : \text{Neruda es chileno y García Márquez es colombiano.}$$

Definición 1.3.2. *Dadas dos proposiciones p y q, la* ***conjunción*** *de ellas es la proposición denotada por $p \wedge q$, la cual se lee como "p y q", y es verdadera sólo cuando ambas proposiciones p y q son verdaderas.*

Ejercicio 1.3.2. *Sean p : 6 es múltiplo de 12 y q : 6 es múltiplo de 3. Obtenga la conjunción $p \wedge q$ y determine su valor de verdad.*

Solución. Se tiene que

$$p \wedge q : \text{6 es múltiplo de 12 y de 3.}$$

Como p es verdadera y q es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa. □

Completemos la tabla de verdad de la conjunción. Sean p y q dos proposiciones cualesquiera. En este caso, consideramos tres columnas, una para p, otra para q y la última para $p \wedge q$. Los casos posibles son 4: ambas verdaderas, sólo una de ellas verdadera, o ambas falsas. Para escribir de forma ordenada los casos, en la columna de p, consideramos dos V y dos F hacia abajo; y en la columna de q los V y F van de uno en uno. Así obtenemos:

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Para completar la tercera columna, completamos esta observando lo que pasa con p y q en cada fila. De acuerdo a la definición, sólo en la primera fila va un V, en todas las otras va un F, obteniendo

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.3.3. Disyunción.

Considere las proposiciones

$$p : \text{Neruda es chileno}$$

y

$$q : \text{Neruda es boliviano.}$$

La **disyunción** de p y q, la cual es denota por $p \vee q$, y es leída como “p o q", es la proposición

$$p \vee q : \text{Neruda es chileno o boliviano.}$$

Definición 1.3.3. *Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de ellas es la proposición denotada por $p \vee q$, la cual se lee como “p o q", y es verdadera sólo cuando al menos una de las proposiciones p y q es verdadera.*

Ejercicio 1.3.3. *Sean $p : 6 > 1$ y $q : 6 = 1$. Obtenga la disyunción $p \vee q$ y determine su valor de verdad.*

Solución. Note que p es verdadera y q es falsa. Su disyunción es

$$p \vee q : 6 > 1 \ \vee \ 6 = 1,$$

la cual es verdadera. Esta disyunción se puede simbolizar como

$$p \vee q : 6 \geq 1.$$

□

Observación 1.3.1. En general, para x e y números reales, la expresión

$$x \geq y$$

representa la disyunción

$$x > y \ \vee \ x = y.$$

Ejercicio 1.3.4. *Determine el valor de verdad de*

a) $4 \geq 4$.

Solución. La proposición es equivalente a

$$4 > 4 \ \vee 4 = 4.$$

Note que $4 = 4$ es verdadera. De este modo, $4 \geq 4$ es verdadera.

b) $3 \geq 5$.

Solución. La proposición es equivalente a

$$3 > 5 \ \vee 3 = 5.$$

Como ninguna de las dos proposiciones que componen la disyunción es verdadera, entonces $3 \geq 5$ es falsa. □

Obtengamos la tabla de verdad de la disyunción. Sean p y q dos proposiciones simples. Las dos primeras filas son idénticas a la tabla de la conjunción:

p	q	$p \vee q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Completamos por fila, teniendo en cuenta que $p \vee q$ es verdadera sólo cuando al menos una de las proposiciones p y q es verdadera:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.4. Condicional.

Considere las proposiciones

$$p : \text{el dado cayó en 6}$$

y

$$q : \text{el dado cayó en un número par.}$$

La proposición condicional $p \to q$, la cual se lee como "si p entonces q", es

$$p \to q : \text{Si el dado cayó en 6 entonces cayó en un número par.}$$

En este caso, p se denomina **antecedente** y q se denomina **consecuente**.

Por otro lado, consideremos las proposiciones

$$p : \text{el dado cayó en 6}$$

y

$$r : \text{el dado cayó en un número impar.}$$

En este caso, la proposición condicional $p \to r$ es

$$p \to r : \text{Si el dado cayó en 6 entonces cayó en un número impar.}$$

Definición 1.3.4. *Dadas dos proposiciones p y q, la proposición* ***condicional*** *de p y q, en ese orden, es la proposición denotada como $p \to q$, la cual se lee como "si p entonces q", donde p recibe el nombre de* ***antecedente*** *y q recibe el nombre de* ***consecuente****. Esta proposición es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.*

Ejercicio 1.3.5. *Sean $p : (-3)^2 = 3^2$ y $q : -3 = 3$. Obtenga la condicional $p \to q$ y determine su valor de verdad.*

Solución. En este caso,

$$p \to q : (-3)^2 = 3^2 \to -3 = 3,$$

o con palabras

$$p \to q : \text{si } (-3)^2 = 3^2 \text{ entonces } -3 = 3.$$

Como el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso, entonces la proposición es falsa. □

Completamos su tabla de verdad:

p	q	$p \to q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

la cual, según lo mencionado es

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Consideremos nuevamente las proposiciones

$$p : \text{El dado cayó en 6,}$$

$$q : \text{El dado cayó en un número par}$$

y

$$p \to q : \text{Si el dado cayó en 6 entonces cayó en un número par.}$$

Si suponemos que el antecedente es verdadero, entonces el consecuente es verdadero, por lo que esta proposición es verdadera.

El **recíproco** de $p \to q$ es la proposición

$$q \to p : \text{Si el dado cayó en un número par entonces cayó en 6,}$$

Note que en este caso, si suponemos que el antecedente es verdadero, entonces el consecuente puede ser verdadero o falso, por lo que esta aseveración puede ser verdadera o falsa.

Por otro lado, el **contrarecíproco** de $p \to q$, es la proposición

$$\sim q \to \sim p : \text{Si el dado no cayó en un número par entonces no cayó en 6,}$$

la cual es siempre verdadera, al igual que $p \to q$.

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.3.5. *Sean p y q dos proposiciones simples. Dada la proposición condicional $p \to q$. Se tiene que:*

- *su* ***recíproco*** *corresponde a la proposición $q \to p$.*
- *su* ***contrarecíproco*** *corresponde a la proposición $\sim q \to \sim p$.*

Observación 1.3.2. Observando el ejemplo anterior, dadas dos proposiciones p y q, pareciera que $p \to q$ y su contrarecíproco $\sim q \to \sim p$ tienen siempre el mismo valor de verdad. ¿Será esto siempre así? Recordemos que la tabla de verdad de $p \to q$ es

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(1.3.1)

Completemos la tabla de verdad de su contrarecíproco $\sim q \to \sim p$. Para ello consideramos la tabla

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \to \sim p$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

La tercera columna, corresponde a la negación de p, por lo tanto sus valores de verdad en cada fila, corresponden al valor de verdad opuesto de la proposición p, análogamente para $\sim q$. De este modo, obtenemos:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \to \sim p$
V	V	F	F	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

La quinta columna la completamos con la información obtenida en la tercera y cuarta columna, tomando en cuenta que una proposición condicional es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Así, la tabla queda como

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F

(1.3.2)

Observamos que las tablas (**??**) y (**??**) son idénticas en su última columna, por lo que las proposiciones $p \rightarrow q$ y $\sim q \rightarrow \sim p$ tienen el mismo valor de verdad. Por esta razón, decimos que $p \rightarrow q$ y $\sim q \rightarrow \sim p$ son **proposiciones equivalentes**.

Definición 1.3.6. *Sean A y B dos proposiciones compuestas, cada una construida con las proposiciones simples $p_1, p_2, \dots p_n$. Se dice que A y B son **equivalentes**, si A y B poseen los mismos valores de verdad, independiente de los valores de verdad fijos de $p_1, p_2, \dots p_n$.*

1.3.5. Bicondicional.

Consideremos las proposiciones

$$p : \text{la moneda cae en cara}$$

y

$$q : \text{la moneda no cae en sello.}$$

La proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ es

$$p \leftrightarrow q : \text{la moneda cae en cara si, y sólo si, no cae en sello.}$$

Definición 1.3.7. *Dadas dos proposiciones p y q, la proposición **bicondicional** de p y q, es la proposición denotada como $p \leftrightarrow q$, la cual se lee como "p si, y sólo si, q". Esta proposición es verdadera sólo cuando tanto p como q poseen el mismo valor de verdad, es decir, cuando ambos son verdaderos, o ambos son falsos.*

Según lo mencionado en la definición, la tabla de verdad de $p \leftrightarrow q$ es

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Para las proposiciones

$$p : \text{la moneda cae en cara}$$

y

$$q : \text{la moneda no cae en sello,}$$

formamos

$$p \to q : \text{si la moneda cae en cara, entonces no cae en sello}$$

y

$$q \to p : \text{si la moneda no cae en sello, entonces cae en cara.}$$

Luego, formamos la proposición

$$(p \to q) \ \wedge \ (q \to p),$$

la cual en nuestro caso es,

$$(p \to q) \ \wedge \ (q \to p) :$$

$$\text{(si la moneda cae en cara, entonces no cae en sello)}$$

$$\text{y (si la moneda no cae en sello, entonces cae en cara).}$$

Veremos que esta proposición es equivalente a

$$p \leftrightarrow q : \text{la moneda cae en cara si, y sólo si, no cae en sello.}$$

En realidad, probaremos en general que, dadas dos proposiciones p y q, se tiene que $p \leftrightarrow q$ es equivalente a $(p \to q) \ \wedge \ (q \to p)$. Veamos cómo hacerlo. Construimos la tabla de verdad de

$$(p \to q) \ \wedge \ (q \to p).$$

Se tiene que

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \ \wedge \ (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Vemos que los valores de verdad obtenidos en la última columna, son los mismos que los valores de verdad de $p \leftrightarrow q$, más específicamente,

$$(p \to q) \ \wedge \ (q \to p),$$

es verdadero, sólo cuando p y q tienen el mismo valor de verdad. De este modo, las proposiciones en cuestión son equivalentes.

Ejercicio 1.3.6. *Sean $p : (-3)^2 = 3^2$ y $q : -3 = 3$. Obtenga el bicondicional $p \leftrightarrow q$ y determine su valor de verdad.*

Solución. La bicondicional pedida es

$$p \leftrightarrow q : (-3)^2 = 3^2 \leftrightarrow -3 = 3,$$

la cual es falsa, dado que p es verdadero y q es falsa. Otra forma de determinar el valor de verdad de $p \leftrightarrow q$, es escribirla como

$$p \to q \ \wedge \ q \to p,$$

lo cual en este caso corresponde a

$$((-3)^2 = 3^2 \to -3 = 3) \ \wedge \ (-3 = 3 \to (-3)^2 = 3^2).$$

Como

$$(-3)^2 = 3^2 \to -3 = 3$$

es falsa, entonces $p \leftrightarrow q$ es falsa. $\square$

Observación 1.3.3. Anteriormente, vimos que $p \to q$ y su contrarecíproco $\sim q \to \sim p$ tienen el mismo valor de verdad, por lo que se dicen proposiciones equivalentes. De este modo, el bicondicional

$$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p),$$

siempre es verdadero, dado que $p \to q$ y $\sim q \to \sim p$ son o ambas verdaderas, o ambas falsas, según sea el caso. Análogamente el bicondicional

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \left[(p \to q) \ \wedge \ (q \to p)\right],$$

es siempre verdadero, dado que las proposiciones que lo componen son equivalentes.

Generalizamos la idea expresada en la observación anterior, obteniendo otra forma de probar que dos proposiciones son equivalentes.

Proposición 1.3.8. *Dos proposiciones A y B se dicen **equivalentes** si, y sólo si,*

$$A \leftrightarrow B,$$

es siempre verdadero, independiente de los valores de verdad de A y de B.

Definición 1.3.9. *Una proposición compuesta, independiente de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen, se dice:*

- ***Tautología**, si ella es siempre verdadera.*
- ***Contradicción**, si ella es siempre falsa.*
- ***Contigencia**, si no es tautología ni contradicción.*

Observación 1.3.4. Se tiene que:

- Si la proposición $A \to B$ es una tautología, se escribe $A \Rightarrow B$ y se lee "A implica B".
- Si la proposición $A \leftrightarrow B$ es una tautología, se escribe $A \Leftrightarrow B$ y en este caso A es equivalente a B.

Observación 1.3.5. En base a la observación anterior, se puede afirmar que

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p),$$

y que

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow p)] \, .$$

1.3.6. Algunas equivalencias importantes.

Considere la proposición

$$\sim (p \rightarrow q)$$

y la proposición

$$p \wedge \ \sim q.$$

Proponemos verificar que estas dos proposiciones son equivalentes, es decir, que

$$\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \ \sim q) \tag{1.3.3}$$

es una tautología. Para comprobar esto, hacemos la tabla de verdad de (**??**), la cual es:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$A :\sim (p \rightarrow q)$	$B : p \wedge \ \sim q$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V

De este modo, las proposiciones $\sim (p \rightarrow q)$ y $p \wedge \ \sim q$ son equivalentes. O sea,

$$\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \ \sim q), \tag{1.3.4}$$

Esta equivalencia la interpretamos del siguiente modo: la negación de una proposición condicional corresponde a la conjunción entre el antecedente y la negación del consecuente.

Ejercicio 1.3.7. *Considere las proposiciones p : Chile está en Sudamérica y q : Santiago está en Sudamérica. Obtenga $p \to q$, su valor de verdad y su negación.*

Solución. Se tiene que

$$p \to q : \text{Si Chile está en Sudamérica, entonces Santiago también lo está,}$$

la cual es verdadera, dado que p y q son ambas verdaderas. Por otro lado, dado que

$$\sim (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \ \sim q), \tag{1.3.5}$$

entonces la negación de nuestra proposición es

$$\sim (p \to q) : \text{ Chile está en Sudamérica y Santiago no lo está,}$$

la cual es evidentemente falsa. □

Teorema 1.3.10. *(Resumen con algunas equivalencias importantes)*

- *Negación de la negación:* $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
- *Idempotencia:* $p \wedge p \Leftrightarrow p, \ p \vee p \Leftrightarrow p$
- *Conmutatividad de la conjunción:* $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- *Conmutatividad de la disyunción:* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
- *Conmutatividad del bicondicional:* $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$
- *Asociatividad de la conjunción:* $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- *Asociatividad de la disyunción:* $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- *Asociatividad del bicondicional:* $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
- *Distributividad de la conjunción con respecto a la disyunción:*

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- *Distributividad de la disyunción con respecto a la conjunción:*

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

- *Negación de la conjunción:* $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

- *Negación de la disyunción:* $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

- *Negación del condicional:* $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Veamos cómo demostrar propiedades de la lógica proposicional, similares a las vistas recién.

Ejercicio 1.3.8. *Demuestre que*

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q).$$

Solución. Podemos demostrar de dos formas:

- Primera forma: hacemos la tabla de verdad de

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q), \tag{1.3.6}$$

y en la última columna de la derecha debemos obtener sólo valores V.

Como tenemos dos proposiciones simples p y q, entonces tenemos $2^2 = 4$ casos (en general, si tenemos n proposiciones simples, entonces tenemos 2^n casos). La tabla inicialmente queda como

p	q	$\sim p$	$A : p \rightarrow q$	$B : \sim p \vee q$	$A \leftrightarrow B$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Observando la tabla anterior, vemos que para llevar un orden, en la primera fila consideramos de izquierda a derecha:

- Primero las proposiciones simples.
- Después las negaciones de estas proposiciones, si es que las hay.
- Después las proposiciones compuestas que están entre paréntesis.
- Finalmente la proposición completa.

(Estas observaciones son útiles, en general, para cualquier tabla de verdad que usted realice).

Completamos cada columna, de acuerdo a los valores de verdad p y q, o de alguna otra columna anterior, y además considerando el conectivo lógico en cuestión. La tabla completada es

p	q	$\sim p$	$A : p \to q$	$b :\sim p \vee q$	$A \leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

De este modo, (**??**) es una tautología, y nuestra aseveración queda demostrada.

- Segunda forma: usamos propiedades. Partimos de un miembro de la equivalencia

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q),$$

para llegar al otro miembro a través de una cadena de equivalencias.

Partimos desde $\sim p \vee q$. De la negación del conectivo "o", se tiene que $\sim p \vee q$ es equivalente a

$$\sim (p \wedge \sim q). \tag{1.3.7}$$

Pero la proposición que está dentro de este último paréntesis, corresponde a la negación de $p \to q$, por lo que (**??**) es equivalente a

$$\sim (\sim (p \to q)).$$

Es decir, es equivalente a

$$p \rightarrow q,$$

tal como queríamos. Todo lo hecho, se resume del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\sim p \vee q &\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \text{ (Negación de la conjunción)}\\
&\Leftrightarrow \sim (\sim (p \rightarrow q)) \text{ (Negación del condicional)}\\
&\Leftrightarrow p \rightarrow q \text{ (Negación de una negación).}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.3.9. *Demuestre que*

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r).$$

Solución. Debemos probar que

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

es una tautología. Para ello construimos su tabla de verdad. Como tenemos 3 proposiciones simples (p, q y r), entonces tenemos 2^3 casos. La tabla, en una primera etapa, corresponde a

p	q	r	$A : p \rightarrow q$	$B : q \rightarrow r$	$A \wedge B$	$C : p \rightarrow r$	$(A \wedge B) \rightarrow C$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Para ser ordenado en los casos, en la columna de p, se colocan los V y F de 4 en 4; en la columna de q, se colocan los V y F de 2 en 2; y en la columna de r se colocan de 1 en 1. Luego, completamos cada columna, de acuerdo a los valores de verdad de p, q y r según corresponda, y según los valores de verdad de acuerdo al conectivo lógico respectivo. Luego, la tabla queda como

p	q	r	$A : p \to q$	$B : q \to r$	$A \wedge B$	$C : p \to r$	$(A \wedge B) \to C$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Como en la última columna tenemos sólo V, entonces nuestra aseveración es una tautología. $\square$

1.4. Función proposicional.

Considere el conjunto $U = \{2, 7, 8, 17, 21\}$. Consideramos la expresión

$$p(x) : x \text{ es un número primo.}$$

Cada vez que reemplazamos x por un elemento de U, obtenemos una proposición, la cual es verdadera o falsa, según sea el caso. Así, tenemos

- $p(1)$: 2 es un número primo, la cual es verdadera.
- $p(7)$: 7 es un número primo, la cual es verdadera.
- $p(8)$: 8 es un número primo, la cual es falsa.
- $p(17)$: 17 es un número primo, la cual es verdadera.

- $p(21)$: 21 es un número primo, la cual es falsa.

De este modo, el conjunto de todos los elementos x de U que hacen verdadera $p(x)$, es

$$V_p = \{2, 7, 17\}.$$

La expresión $p(x)$ se denomina **función proposicional** y V_p se denomina **conjunto de validez** de p con respecto al conjunto U.

Definición 1.4.1. *Una* ***función proposicional*** *p es una expresión que depende de una o más variables, y que se transforma en una proposición cuando reemplazamos cada variable por algún elemento de un determinado conjunto universo U. El* ***conjunto de validez*** *de p, denotado por V_p, consiste en todos los elementos de U que hacen verdadera la función proposicional p.*

Ejercicio 1.4.1. *Sea $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Para cada función proposicional siguiente, determine su conjunto de validez en U.*

a) $p(x) : \dfrac{x}{2} \in \mathbb{Z}$.

   Solución. Se tiene que $V_p = \{-2, 0, 2\}$. Es decir, efectivamente existen elementos de U para los cuales la función proposicional es verdadera. Para denotar este hecho, usamos el **cuantificador existencial** denotado por $\exists$. Es decir, decimos que

   $$\exists x \in U : \frac{x}{2} \in \mathbb{Z},$$

   lo cual se lee como

   "Existe al menos un elemento x de U, tal que $\dfrac{x}{2}$ es un número entero."

b) $q(x) : x^2 < 16$.

   Solución. Se tiene que

   $$V_q = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} = U.$$

De este modo, todos los elementos de U hacen verdadera la función proposicional. Para representar este hecho, usamos el **cuantificador universal** denotado por $\forall$. Decimos entonces que

$$\forall x \in U : x^2 < 16,$$

lo cual se lee como

"Para todo elemento x de U, se tiene que x^2 es menor que 16."

c) $r(x) : x^2 = 0$.

Solución. La ecuación $x^2 = 0$ tiene como única solución a $x = 0$. De este modo,

$$V_r = \{0\}.$$

En este caso, usamos el **cuantificador existencial** denotado por $\exists!$. Decimos que

$$\exists! x \in U : x^2 = 0,$$

lo cual se lee como

"Existe un único elemento x de U tal que $x^2 = 0$."

□

1.4.1. Cuantificadores lógicos.

Definición 1.4.2. *Para indicar que una función proposicional es verdadera para:*

- *todos los elementos de un determinado conjunto U se usa el **cuantificador universal** denotado por $\forall$, el cual se lee como "para todo" o "cualquiera sea".*

  Ejemplo: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

- *algún elemento de un determinado conjunto U se usa el **cuantificador existencial** denotado por $\exists$, el cual se lee como "existe un", "existe al menos un" o "existe algún".*

  Ejemplo: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$.

- *un único elemento de un determinado conjunto U se usa el* ***cuantificador existencial*** *denotado por $\exists!$, el cual se lee como "existe un único".*

Ejemplo: $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 0.$

Ejercicio 1.4.2. *Obtenga el valor de verdad de*

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$

Solución. La aseveración nos dice que todos los números reales cumplen que su cuadrado es positivo. Note que, si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$. De este modo, la proposición es falsa.
En este caso, decimos que $x = 0$ es un **contraejemplo** para la aseveración dada.
Por otro lado, note que la proposición

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0,$$

es verdadera.

b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x.$

Solución. Buscamos números reales cuyo cuadrado sea menor que el mismo número. Si $x = \frac{1}{2} = 0.5$, entonces

$$x^2 = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Es decir, cuando $x = \frac{1}{2}$, entonces $x^2 < x$. De este modo, la aseveración es verdadera.

c) $\exists n \in \mathbb{N} : n < 1.$

Solución. Note que no existe ningún número natural menor que 1. Por lo tanto, la aseveración es falsa. La aseveración

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$$

si es verdadera.

d) $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$.

Solución. Note que $x^2 = 4$ cuando $x = 2$ o $x = -2$. De este modo, la aseveración es falsa. En este caso, es verdadera la proposición

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \neq y \ \wedge \ (x^2 = 4 \ \wedge \ y^2 = 4),$$

dado que esta se cumple con $x = 2$ e $y = -2$.

e) $\exists! n \in \mathbb{N} : n + 2 = 0$.

Solución. Note que $n + 2 = 0$ cuando $n = -2$. De este modo, la proposición es falsa. Es verdadera la proposición

$$\forall n \in \mathbb{N} : n + 2 \neq 0.$$

□

Ejercicio 1.4.3. *Determine el valor de verdad de cada proposición siguiente.*

a) $\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 5 \to x = 2$.

Solución. Para la función proposicional

$$2x + 1 = 5 \to x = 2, \tag{1.4.1}$$

suponemos que el antecedente es verdadero, para $x \in \mathbb{R}$. Es decir, suponemos que

$$2x + 1 = 5 \tag{1.4.2}$$

para algún $x \in \mathbb{R}$. Resolviendo la ecuación (**??**), obtenemos que $x = 2$, es decir, que el consecuente es verdadero. De este modo, nuestra proposición es verdadera, dado que cada vez que el antecedente es verdadero, el consecuente también lo es. Note que no nos interesa analizar los casos en los cuales el antecedente de (**??**) es falso, dado que en este caso nuestra proposición será verdadera. Como nuestra proposición es siempre verdadera, la podemos denotar como

$$\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2.$$

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x = 2 \to 2x + 1 = 5$.

Solución. Para la función proposicional

$$x = 2 \to 2x + 1 = 5, \tag{1.4.3}$$

suponemos que el antecedente es verdadero, es decir, suponemos que efectivamente x vale 2. Reemplazando este valor en la expresión $2x + 1$, obtenemos que en este caso

$$2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

De este modo, el consecuente es verdadero y así, nuestra proposición es verdadera, dado que la combinación $V \to F$ no es posible (permitiéndonos el abuso de notación). Dado que esta proposición es verdadera, la denotamos como

$$\forall x \in \mathbb{R} : x = 2 \Rightarrow 2x + 1 = 5.$$

c) $\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 5 \leftrightarrow x = 2$.

Solución. La proposición dada puede ser expresada como

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x = 2 \to 2x + 1 = 5) \ \wedge \ (\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 5 \to x = 2).$$

Según los dos últimos ejercicios, las dos proposiciones que componen esta conjunción son verdaderas, por lo que la proposición en cuestión es verdadera. De este modo, la escribimos como

$$\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2.$$

Es decir, $2x + 1 = 5$ es equivalente a $x = 2$. $\square$

Ejercicio 1.4.4. *Considere la proposición*

“Todos los estudiantes del curso hoy usan corbata”

Supongamos que es falsa ¿por qué ocurriría esto?

Solución. Porque hay estudiantes del curso que hoy no llevan corbata. Es decir, existe al menos un estudiante que hoy no lleva corbata. Note que si
$U = \{x : x$ es un estudiante del curso$\}$, entonces nuestra proposición puede ser escrita como

$$\forall x \in U : x \text{ usa corbata.}$$

En este caso, decimos que su **negación** es

$$\exists x \in U : x \text{ no usa corbata.}$$

□

Definición 1.4.3. *Dada la proposición*

$$\forall x \in U : p(x),$$

su negación es

$$\exists x \in U : \sim p(x).$$

Observación 1.4.1. Es decir, para negar una proposición que contiene el cuantificador "para todo", cambiamos éste por el cuantificador "existe", y además negamos la función proposicional.

Ejercicio 1.4.5. *Considere la proposición*

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 1 \to x = 1.$$

a) *¿Cuál es su valor de verdad?*

   Solución. Note que si $x^2 = 1$, entonces no necesariamente $x = 1$, específicamente se tiene que $x = 1$ o $x = -1$. Es decir, $x = -1$ hace verdadero el antecedente $x^2 = 1$ y hace falso el consecuente $x = 1$. Así, para $x = -1$, la función proposicional

   $$x^2 = 1 \to x = 1$$

   es falsa. De este modo, nuestra proposición es falsa.

b) *¿Cuál es su negación?*

Solución. Su negación es

$$\exists x \in \mathbb{R} :\sim (x^2 = 1 \rightarrow x = 1),$$

o sea

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1 \wedge x \neq 1.$$

Note que la negación es verdadera, dado que la proposición original es falsa, pero también dado que $x = -1$ cumple que $(x^2 = 1 \wedge x \neq 1)$. □

Ejercicio 1.4.6. *Considere la proposición*

"Existe un estudiante del curso que hoy usa corbata."

Si esta aseveración es falsa, ¿por qué ocurriría esto?

Solución. Porque ningún estudiante hoy usa corbata. Es decir, todos los estudiantes del curso no usan corbata. Note que si $U = \{x : x \text{ es un estudiante del curso}\}$, entonces nuestra proposición puede ser escrita como

$$\exists x \in U : x \text{ usa corbata.}$$

En este caso, decimos que su **negación** es

$$\forall x \in U : x \text{ no usa corbata.}$$

Definición 1.4.4. *Dada la proposición*

$$\exists x \in U : p(x),$$

su negación es

$$\forall x \in U :\sim p(x).$$

Observación 1.4.2. Es decir, para negar una proposición que contiene el cuantificador "existe", cambiamos éste por el cuantificador "para todo", y además negamos la función proposicional.

Ejercicio 1.4.7. *Considere la proposición*

$$\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 = x.$$

a) *¿Cuál es su valor de verdad?*

Solución. Note que al resolver la ecuación $x + 1 = x$, obtenemos que $1 = 0$. Por lo tanto, nuestra aseveración es falsa.

b) *¿Cuál es su negación?*

Solución. Su negación es

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq x,$$

la cual es verdadera. □

Ejercicio 1.4.8. *Considere la proposición*

Existe un único estudiante del curso que usa corbata.

Si esto no fuera así ¿Qué debería ocurrir?

Solución. Tenemos dos opciones:

- Ningún estudiante del curso usa corbata, es decir, todos los estudiantes no usan corbata.
- Hay al menos dos estudiantes que usan corbata.

Si $U = \{x : x \text{ es un estudiante del curso}\}$, entonces nuestra proposición puede ser escrita como

$$\exists! x \in U : x \text{ usa corbata}.$$

En este caso, decimos que su **negación** es

$$(\forall x \in U : x \text{ no usa corbata}) \vee (\exists x \in U, \exists y \in U : x \neq y \wedge (x \text{ usa corbata} \wedge y \text{ usa corbata})).$$

□

Definición 1.4.5. *Dada la proposición*

$$\exists! x \in U : p(x).$$

Su negación es

$$(\forall x \in A : \sim p(x)) \vee (\exists x \in A, \exists y \in A : x \neq y \ \wedge \ (p(x) \wedge p(y))).$$

Ejercicio 1.4.9. *Considere la proposición*

$$\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 = x.$$

a) *¿Cuál es su valor de verdad?*

   Solución. Note que los números reales que son iguales a su cuadrado son 0 y 1. De este modo, la aseveración es falsa.

b) *¿Cuál es su negación?*

   Solución. Su negación es

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq x) \vee (\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \neq y \ \wedge \ (x^2 = x \wedge y^2 = y))$$

   la cual es verdadera, dado que

$$\exists x = 1 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R} : x \neq y \ \wedge \ (x^2 = x \wedge y^2 = y).$$

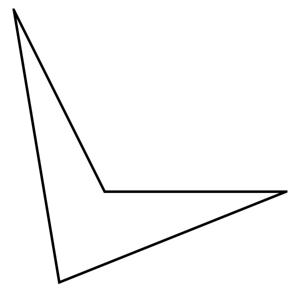
□

Estudiemos algunas proposiciones que contienen más de un cuantificador:

Ejercicio 1.4.10. *Determine el valor de verdad de la proposición:*

"Todos los cuadriláteros tienen al menos un par de lados paralelos"

Solución. La proposición dada es falsa, si pensamos en el cuadrilátero



Intuitivamente, su negación sería

Existen cuadriláteros los cuales no tienen ningún par de lados paralelos

o también

Existen cuadriláteros para los cuales todos sus pares de lados no son paralelos.

□

Observación 1.4.3. En general, consideremos una proposición de la forma

$$\forall x \in A, \exists y \in B : p(x, y), \tag{1.4.4}$$

la cual podemos interpretar como

$$\forall x \in A : [\exists y \in B : p(x, y)] \, .$$

Su negación es

$$\exists x \in A :\sim [\exists y \in B : p(x, y)] \, .$$

Es decir

$$\exists x \in A : [\forall y \in B :\sim p(x, y)] \, .$$

Análogamente, la negación de una proposición de la forma

$$\exists x \in A, \forall y \in B : p(x, y), \tag{1.4.5}$$

es una proposición de la forma

$$\forall x \in A, \exists y \in B :\sim p(x, y).$$

En resumen, para negar proposiciones como (**??**) y (**??**), cambiamos cada "para todo" por un "existe" y viceversa, además de negar la función proposicional.

Ejercicio 1.4.11. *Considere los conjuntos* $A = \{-3, -2, -1, 0\}, B = \{2, 3\}$ *y la aseveración*

a) $\forall x \in A, \exists y \in B : x + y > 0.$

a1) *¿Cuál es su valor de verdad?*

Solución. En la proposición

$$\forall x \in A, \exists y \in B : x + y > 0$$

el "para todo" antes del "existe" se entiende como un "para cada". Es decir, nos preguntamos si es cierto que para cada elemento $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$ existe un elemento $y \in \{2, 3\}$ de modo que su suma $x + y$ sea positiva. Para $x = -3$, si $y = 2$ o $y = 3$, en ninguno de los dos casos $x + y > 0$. De este modo, nuestra aseveración es falsa.

a1) *¿Cuál es su negación?*

Solución. Su negación es

$$\exists x \in A, \forall y \in B : \sim (x + y > 0),$$

es decir

$$\exists x \in A, \forall y \in B : x + y \leq 0. \tag{1.4.6}$$

la cual debe ser verdadera, dado que la proposición es falsa.

Argumentemos de otra forma que su negación es verdadera. La aseveración (**??**) nos dice que debemos encontrar un elemento $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$, de modo que cualquiera sea el elemento $y \in \{2, 3\}$ escogido, se tiene que su suma $x + y$ no es positiva. Y ese elemento es claramente $x = -3$. Por lo tanto, nuestra negación es verdadera. $\square$

b) $\exists x \in A, \forall y \in B : x + y > 0$.

b1) *¿Cuál es su valor de verdad?*

Solución. Debemos encontrar un elemento $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$, de modo que cualquiera sea el elemento $y \in \{2, 3\}$ que elijamos, entonces su suma es positiva. Ese elemento buscado puede ser $x = 0$ (también $x = -1$, pero nos basta con uno sólo), dado que si $y = 2$ o $y = 3$, entonces $x + y > 0$. Por lo tanto nuestra aseveración es verdadera.

b2) *¿Cuál es su negación?*

Solución. Su negación es

$$\forall x \in A, \exists y \in B : x + y \leq 0$$

la cual es falsa. $\square$

c) $\exists! x \in A, \forall y \in B : x + y > 0$.

c1) *¿Cuál es su valor de verdad?*

Solución. Debemos verificar si es verdad que existe un único elemento $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$ para el cual dado cualquier elemento $y \in \{2, 3\}$, se tiene que su suma $x + y$ es positiva. Para $x = 0$ y $x = -1$ esto se cumple, por lo que nuestra aseveración es falsa.

c2) *¿Cuál es su negación?*

Solución. La proposición es

$$(\exists! x \in A) \left[(\forall y \in B)(x + y > 0) \right],$$

por lo que su negación es

$$((\forall x \in A) \sim [(\forall y \in B)(x + y > 0)]) \vee$$

$$(\exists x \in A)(\exists z \in A)(x \neq z \ \wedge \ ((\forall y \in B)(x + y > 0) \ \wedge \ (\forall y \in B)(z + y > 0))).$$

Es decir, corresponde a

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x + y \leq 0) \vee$$

$$(\exists x \in A)(\exists z \in A)(x \neq z \ \wedge \ ((\forall y \in B)(x + y > 0) \ \wedge \ (\forall y \in B)(z + y > 0))),$$

la cual debe ser verdadera. Comprobemos esto. La razón es que la segunda parte de la disyunción es verdadera, dado que existen $x = 0$ y $z = -1$ distintos, de modo que, para cada uno de ellos, cualquiera sea $y \in B$ escogido, se tiene que $x + y$ y $z + y$ son positivos. $\square$

1.5. Conjuntos.

Un ejemplo de conjunto es

$$A = \{a, e, i, o, u\},$$

el cual consiste en las vocales del abecedario. Sus elementos son a, e, i, o, u. Como por ejemplo o es un elemento del conjunto A, entonces decimos que $o \in A$, lo que se lee como "o pertenece a A". Dado que se nombra explícitamente a cada uno de sus elementos, se dice que este conjunto está definido por **extensión**.

Otro conjunto es

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 3\},$$

donde no nombramos explícitamente cada uno de sus elementos, si no que lo definimos como todos los elementos de un conjunto universo (en este caso $\mathbb{N}$), los cuales tienen una característica común (ser múltiplos de 3). En este caso, se dice que este conjunto está definido por **comprensión**. Este conjunto tiene infinitos elementos, por lo que no es posible definirlo por extensión, pero si nombrar algunos de sus elementos, diciendo que

$$B = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}.$$

Note que el conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, en particular tiene 5 elementos. Por otro lado, el conjunto B tiene infinitos elementos, sin embargo los podemos enumerar. Esto último no siempre se puede hacer en un conjunto. En efecto, consideramos el intervalo

$$C = [0, 4] .$$

En este conjunto "viven" todos los números reales que están entre 0 y 4, por ejemplo, 0,1,2,3,4, y también otros como 2.1, 2.11 $2.\overline{1}$, los cuales evidentemente no se pueden enumerar.

Definición 1.5.1. *Llamaremos **conjunto** a cualquier colección bien determinada de objetos. Un conjunto se denota por una letra mayúscula tal como $A, B, \ldots$ Los objetos del conjunto son llamados elementos, y se denotan por letras minúsculas, tales como $a, b, c, \ldots$. El hecho que x sea elemento de A se denota por $x \in A$ y se lee "x pertenece a A". En caso contrario se escribe $x \notin A$, lo cual se lee "x no pertenece a A".*

Observación 1.5.1. Dos conjuntos importantes son el **conjunto vacío**, que no tiene elementos y se denota por $\emptyset$, y el **conjunto universo**, que tiene a todos los elementos dentro de un determinado contexto, y se denota por U.

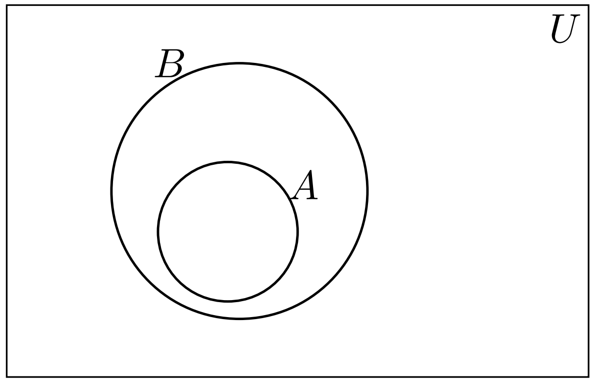
Definición 1.5.2. *Se tiene que*

- *si un conjunto se presenta nombrando sus elementos en forma explícita, decimos que el conjunto está definido por **extensión.***
- *si un conjunto se presenta de la forma*

  $$\{x \in U : P(x)\},$$

  *es decir, como el conjunto de todos los elementos x del conjunto universo U que cumplen con una característica $P(x)$, entonces decimos que el conjunto está definido por **comprensión.***

1.5.1. Subconjunto de un conjunto.



Se tiene que

- $\{1,3,5\}$ es subconjunto de $\{1,2,3,4,5\}$.
- $\{a,b,c\}$ es subconjunto de $\{x : x \text{ es una letra del abecedario}\}$.
- $\{-2,-1,1,2\}$ no es subconjunto de $\{1,2,3\}$.

En base a estos ejemplos, ¿qué debe ocurrir para que un conjunto A sea subconjunto de un conjunto B?

Definición 1.5.3. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es* ***subconjunto*** *de B, lo que se denota como $A \subseteq B$, si cualquier elemento de A también pertenece a B, esto es:*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in U : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Observación 1.5.2. Es decir, si A y B son conjuntos, cada vez que nos preguntamos si

$$A \subseteq B, \tag{1.5.1}$$

debemos inspeccionar si es verdad que cualquier elemento del conjunto de la izquierda en (**??**), en este caso A, es elemento del conjunto de la derecha en (**??**), en este caso B.

Observación 1.5.3. Note que $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ no es subconjunto de $B = \{1, 2, 3\}$. Esto ocurre porque existen elementos de A, en este caso -2 y -1, los cuales no pertenecen a B. Para dos conjuntos A y B cualesquiera, se dice que A **no es subconjunto** de B, si

$$\exists x \in U : x \in A \ \wedge \ x \notin B.$$

Esta última aseveración no es otra cosa que la negación de la definición de subconjunto.

Ejercicio 1.5.1. *Dados* $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 8\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 4\}$. *Determine si:*

a) $A \subseteq B$.

Solución. A y B, representados con algunos de sus elementos, son

$$A = \{8, 16, 24, 32, \ldots\}$$

y

$$B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \ldots\}.$$

Visualmente podemos conjeturar que cualquier elemento de A es también elemento de B, o sea que $A \subseteq B$. Más formalmente, si $x \in A$, es decir si x es múltiplo de 8, entonces x puede ser escrito como $x = 8n$, con n un número natural. De este modo,

$$x = 8n = 4 \cdot (2n) = 4m, \text{ con } m = 2n.$$

Note que m es un número natural. Así, x es múltiplo de 4, quedando demostrada nuestra conjetura.

b) $B \subseteq A$.

Solución. Note que 4 es múltiplo de 4, es decir pertenece a B, pero no es múltiplo de 8, por lo que no pertenece a A. De este modo, B no es subconjunto de A y nuestra aseveración es falsa.

Observación 1.5.4. Consideremos el conjunto vacío, el cual denotamos por $\emptyset$ y un conjunto A cualquiera. Si $\emptyset$ no fuera subconjunto de A, entonces

$$\exists x \in U : x \in \emptyset \ \wedge \ x \notin A.$$

Pero esta última aseveración es falsa, dado que $\emptyset$ no tiene elementos, por lo que no es posible que algún x de U cumpla que $x \in \emptyset$. Por lo tanto,

$$\emptyset \subseteq A.$$

Es decir, $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto A.

Observación 1.5.5. Es evidente que

$$A \subseteq A,$$

dado que todo elemento del conjunto de la izquierda, también es elemento del conjunto de la derecha. De este modo, todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Observación 1.5.6. Consideremos la ecuación cuadrática

$$(x-3)^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, las cuales son ambas $x = 3$. Alguien podría escribir su conjunto solución como

$$\{3, 3\},$$

pero la verdad es que este conjunto es simplemente $\{3\}$. Es decir,

$$\{3, 3\} = \{3\}$$

En general, dos conjuntos son **iguales** cuando tienen los mismos elementos.

Definición 1.5.4. *Dados dos conjuntos A y B, se dice que A y B son* ***iguales****, y se escribe $A = B$, si A y B tienen los mismos elementos, esto es:*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Ejercicio 1.5.2. *Determine si cada una de las aseveraciones siguientes es verdadera o falsa. Justifique.*

a) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$.

Solución. Para que esta aseveración sea cierta, se debe cumplir que cualquier elemento del conjunto de la izquierda es también un elemento del conjunto de la derecha. Los elementos del conjunto de la izquierda son a y b. Estos dos elementos también pertenecen al conjunto de la derecha, dado que sus elementos son a, b y además c. Por lo tanto, la aseveración es verdadera.

b) $\{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, c\}$.

Solución. Análogamente al ejercicio a), para que b) sea verdadera, se debe cumplir que cualquier elemento del conjunto de la izquierda debe ser elemento del conjunto de la derecha. En este caso, a y b son los elementos del conjunto de la izquierda, pero ni a ni b son elementos del conjunto de la derecha (sus elementos son $\{a, b\}$ y c). De este modo, esta aseveración es falsa. Note que es verdadera la aseveración

$$\{\{a, b\}\} \subseteq \{\{a, b\}, c\}.$$

c) $\{a\} \in \{\{a\}\}$.

Solución. En este caso, dado que aparece el símbolo "pertenece", y más allá de las llaves que aparecen, entendemos que lo que está a la izquierda es un objeto, y lo que está a la derecha es un conjunto (cuando aparece el símbolo subconjunto es distinto, en ese caso entendemos que tanto lo que está a la izquierda como lo que está a la derecha es un conjunto). Para que esta aseveración sea cierta, $\{a\}$ debe ser elemento del conjunto de la derecha. Justamente el único elemento de este conjunto es $\{a\}$ (dado que aparece inmediatamente a continuación de las primeras llaves), por lo cual la aseveración es verdadera.

d) $\{\emptyset\} \subseteq \{a, b\}$.

Solución. Alguien podría decir que esta aseveración es verdadera, dado que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. Pero el conjunto $\{\emptyset\}$ que está a la izquierda tiene 1 elemento, el cual corresponde a $\emptyset$, por lo tanto no es el conjunto vacío. De este modo, el argumento mencionado es incorrecto.

Análogamente a como se razonó en a) y en b), nuestra aseveración es falsa, dado que el único elemento del conjunto de la izquierda, o sea $\emptyset$, no pertenece al conjunto de la derecha (sus elementos son a y b).

1.5.2. Operaciones entre conjuntos.

Ejercicio 1.5.3. *Considere los conjuntos*

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \textit{ es un número primo } \wedge \ n < 8\}$$

y

$$B = \{2, 6, 7, 8\}.$$

a) *Obtenga el conjunto A por extensión.*

Solución.

$$A = \{2, 3, 5, 7\}.$$

b) *¿Qué elementos en común tienen A y B?*

Solución. Los elementos en común son 2 y 7. Con estos dos elementos, formamos el conjunto

$$A \cap B = \{2, 7\},$$

el cual se denomina conjunto **intersección** de A y B.

c) *¿Que elementos pertenecen a al menos uno de los conjuntos A o B?*

Solución. Los elementos que cumplen con esta condición son 2,3,5,6,7,8. Con ellos formamos el conjunto

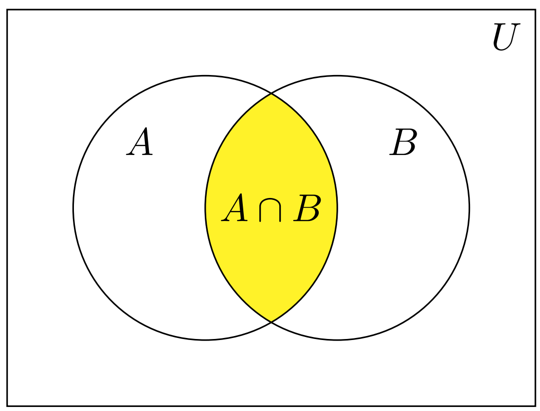
$$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\},$$

el cual es llamado conjunto **unión** de A y B. □

Definición 1.5.5. *Sea U el conjunto universo, y sean A, B subconjuntos de U.*

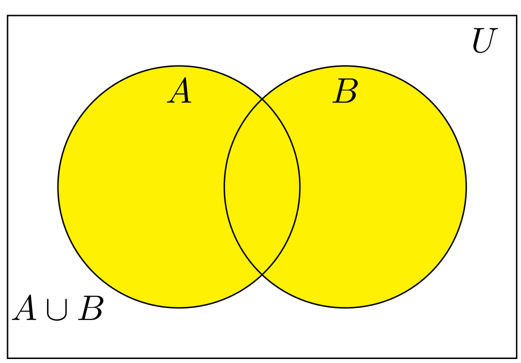
- *La* ***intersección*** *entre A y B, la cual se denota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos comunes de A y B en el universo, esto es*

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}.$$



- *La* ***unión*** *entre A y B, la cual se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos del universo que están en A o en B, esto es*

$$A \cup B := \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}.$$



Ejercicio 1.5.4. *Considere los conjuntos* $A = \{x \in \mathbb{N} : x \textit{ es múltiplo de } 4\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{N} : x \textit{ es múltiplo de } 6\}$.

a) *Obtenga* $A \cap B$ *por comprensión.*

Solución. Note que A y B, representados con algunos de sus elementos, son

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$$

y

$$B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}.$$

Por lo tanto, $A \cap B$ representado con algunos elementos, es

$$A \cap B = \{12, 24, 36, \ldots\}.$$

Podemos ver que $A \cap B$ definido por comprensión es

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 12\}.$$

Note que $12 = MCM(4, 6)$.

b) *¿Qué relación de inclusión existe entre* $C = \{x \in \mathbb{N} : x \textit{ es múltiplo de } 2\}$ *y* $A \cup B$*?*

Solución. El conjunto $A \cup B$ representado con algunos elementos, es

$$A \cup B = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, \ldots\}$$

y C es

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

Informalmente vemos que cualquier elemento de $A \cup B$ también es elemento de C, por lo que

$$A \cup B \subseteq C.$$

Por otro lado, note que $2 \in C$ pero $2 \notin A \cup B$, por lo que es falso que

$$C \subseteq A \cup B.$$

$\square$

Ejercicio 1.5.5. *Considere el conjunto universo* $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ *y los conjuntos*

$$A = \{x \in U : -2 \leq x < 2\}$$

y

$$B = \{x \in U : x^2 = 9 \ \vee \ x + 1 > 0\}.$$

a) *Obtenga* A *y* B *por extensión.*

Solución. Tenemos que

$$A = \{-2, -1, 0, 1\}$$

y

$$B = \{-3, 0, 1, 2\}.$$

b) *¿Qué elementos pertenecen a* A *y no pertenecen a* B*?*

Solución. Los elementos -2 y -1. Estos elementos forman el conjunto

$$A - B = \{-2, -1\},$$

el cual es llamado conjunto **diferencia** de A con B, en ese orden.

c) *¿Qué elementos del conjunto universo* U *no están en* A*?*

Solución. Los elementos son -3 y 2. Estos elementos forman el conjunto

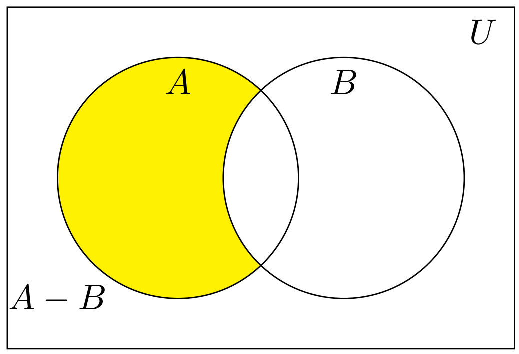
$$A^c = \{-3, 2\},$$

el cual se denomina conjunto **complemento** de A con respecto a U. $\square$

Definición 1.5.6. *Sea U el conjunto universo, y sean A y B subconjuntos de U.*

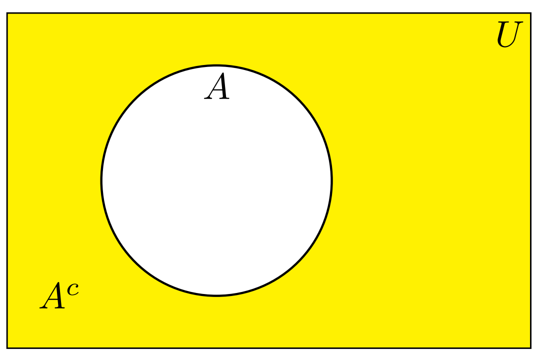
- *La **diferencia** de A y B es el conjunto de todos los elementos del universo que pertenecen a A y que no pertenecen a B, es decir*

$$A - B := \{x \in U : x \in A \land x \notin B\}$$



- *El **complemento** de A con respecto a U, el cual se denota A^c, es el conjunto de todos los elementos del universo que no pertenecen a A, es decir,*

$$A^c := \{x \in U : x \notin A\}.$$



Ejercicio 1.5.6. *Considere los conjuntos* $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 2\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 4\}$.

a) *Obtenga* $A - B$ *y* $B - A$ *por comprensión. ¿Son iguales estos dos conjuntos?*

Solución. Note que A y B representado con algunos de sus elementos, son

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots\}$$

y

$$B = \{4, 8, 12, 16, 20 \ldots\}.$$

De este modo,

$$A - B = \{2, 6, 10, 14, \ldots\}.$$

El conjunto $A - B$, definido por comprensión, corresponde a todos los números naturales que al ser divididos por 4 tienen resto 2. Es decir,

$$A - B = \{4n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$$

(o sea, múltiplos de 4 excedidos en 2 unidades). Por otro lado, para calcular $B - A$, necesitamos obtener todos los múltiplos de 4 que no son múltiplos de 2. No hay ningún número natural que cumpla con esto, por lo que

$$B - A = \emptyset.$$

De este modo $A - B$ es distinto a $B - A$.

b) *Obtenga* A^c *por comprensión.*

Solución. Como el conjunto universo corresponde a los números naturales, entonces

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

Este conjunto corresponde al conjunto de números impares, lo que por comprensión se define como

$$A^c = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ejercicio 1.5.7. *En el ejercicio anterior, A corresponde al conjunto de los números pares y A^c al conjunto de los números impares. ¿A qué conjunto corresponde*

a) $A \cap A^c$*?*

Solución. Como no existe un número natural que sea par e impar a la vez, entonces

$$A \cap A^c = \emptyset.$$

b) $A \cup A^c$?

Solución. Como cualquier número natural es o par o impar, entonces

$$A \cup A^c = \mathbb{N} = U.$$

c) $(A^c)^c$*?*

Solución. Como el complemento de los números impares corresponde a los números pares, entonces

$$(A^c)^c = A.$$

Teorema 1.5.7. *(Propiedades) Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Se tiene que*

1) $A \cup A^c = U$

2) $\emptyset^c = U,\ U^c = \emptyset$

3) $(A^c)^c = A$

4) $A \cap A^c = \emptyset$

5) $A \cap \emptyset = A,\ A \cup \emptyset = A$

6) $A - B = A \cap B^c$

7) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$*. Es decir, todo conjunto intersectado o unido con sí mismo, es el mismo conjunto.*

8) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$. *Es decir, tanto la unión como la intersección de conjuntos es conmutativa.*

9) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. *Es decir, la unión de conjuntos es asociativa.*

10) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. *Es decir, la intersección de conjuntos es asociativa.*

11) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. *Es decir, la unión de conjuntos es distributiva con respecto a la intersección.*

12) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. *Es decir, la intersección de conjuntos es distributiva con respecto a la unión.*

13) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. *Es decir, el complemento de la unión es la intersección de los complementos.*

14) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. *Es decir, el complemento de la intersección es la unión de los complementos.*

Observación 1.5.7. Las propiedades 13) y 14) del teorema anterior se denominan Leyes de Morgan.

Observación 1.5.8. Existen conjuntos cuya intersección es $\emptyset$, como por ejemplo, los números pares con los impares. En general, si A y B son dos conjuntos tales que

$$A \cap B = \emptyset,$$

entonces A y B se dicen **disjuntos**.

Ejercicio 1.5.8. *Determine todos los subconjuntos de:*

a) $A = \{a, b, c\}$.

Solución. Note que

- Los subconjuntos de A de un sólo elemento son $\{a\}, \{b\}$ y $\{c\}$.
- Los subconjuntos de A de dos elementos son $\{a, b\}, \{a, c\}$ y $\{b, c\}$.

- Son también subconjuntos el conjunto vacío $\emptyset$ y el mismo conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Es decir, $\{a, b, c\}$ tiene 8 subconjuntos. Con estos 8 subconjuntos, podemos formar un conjunto de conjuntos, llamado **conjunto de partes** de $\{a, b, c\}$, el cual es denotado por $P(\{a, b, c\})$. Es decir,

$$P(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

b) $\emptyset$.

Solución. En este caso, el único subconjunto es el mismo conjunto, es decir $\emptyset$. De este modo, análogamente al ejercicio anterior, podemos formar el conjunto de partes del conjunto vacío, el cual corresponde a

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

y tiene un sólo elemento, o sea $P(\emptyset)$ no es vacío. $\square$

Definición 1.5.8. *Dado un conjunto A, se define el* ***conjunto de partes*** *de A, el cual es denotado por $P(A)$, como el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, esto es:*

$$P(A) := \{X : X \subseteq A\}.$$

Observación 1.5.9. Se tiene que

- Si un conjunto tiene n elementos, entonces su conjunto de partes tiene 2^n elementos.
- Para cualquier conjunto A, se tiene que $P(A) \neq \emptyset$.

Ejercicio 1.5.9. *Sea* $A = \{2,3\}$ *y* $B = \{2,3,5\}$. *Determine si cada una de las aseveraciones es verdadera o falso.*

a) $\{3,5\} \in P(A)$.

Solución. Se tiene que

- Primera forma: Note que

$$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}.$$

De este modo, $\{3,5\} \notin P(A)$, por lo que la aseveración es falsa.

- Segunda forma: Se debe cumplir que

$$\{3,5\} \subseteq A = \{2,3\}.$$

Como $5 \in \{3,5\}$ y $5 \notin A$, entonces la aseveración es falsa.

b) $\{3\} \subseteq P(B)$.

Solución. Note que

$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{2,5\}, \{2,3,5\}\}$$

Como $3 \in \{3\}$ y $3 \notin P(B)$, entonces nuestra aseveración es falsa.

c) $P(A) \subseteq P(B)$.

Solución. Se tiene que

$$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$$

y

$$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{2,5\}, \{2,3,5\}\}.$$

Vemos que todo elemento de $P(A)$, también pertenece a $P(B)$, por lo que la aseveración es verdadera. $\square$

Observación 1.5.10. En general, si $A \subseteq B$, entonces todo subconjunto de A también está contenido en B, por lo que $P(A) \subseteq P(B)$.

Definición 1.5.9. *El número de elementos de un conjunto finito A se llama **cardinalidad** de A y se denota por $|A|$ (o por $Card(A)$ o por $\#A$).*

Ejercicio 1.5.10. *En una encuesta sobre preferencias de los canales de T.V., 7, 9 y 13, a la hora del noticiero, se obtuvo la siguiente información:*

- *55 encuestados ven el canal 7.*
- *46 ven el canal 9.*
- *33 ven el canal 7 y el canal 13.*
- *2 sólo ven el canal 13 y el canal 9.*
- *15 sólo ven el canal 7 y el canal 9.*
- *3 sólo ven el canal 13.*
- *25 ven los tres canales.*
- *6 no ven T.V.*

Determine:

a) La cantidad de personas encuestadas.

b) La cantidad de personas que ven sólo el Canal 9.

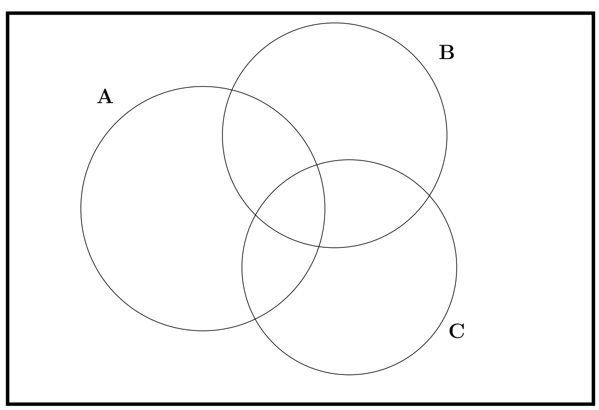
Solución. Los conjuntos de base son

$$U = \{encuestados\}$$
$$A = \{x \in U : x \text{ ven el canal } 7\}$$
$$B = \{x \in U : x \text{ ven el canal } 9\}$$
$$C = \{x \in U : x \text{ ven el canal } 13\}.$$

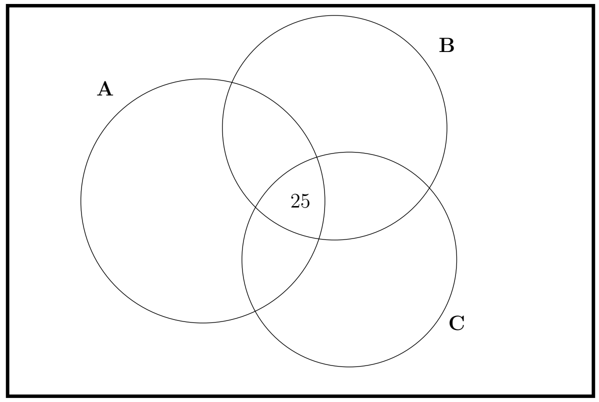
Note que

- Los 55 encuestados que ven el canal 7 corresponden a A. Es decir, $|A| = 55$.
- Los 46 que ven el canal 9 corresponden a B. Es decir, $|B| = 46$.
- Los 33 que ven el canal 7 y el canal 13, corresponden a $A \cap C$. O sea, $|A \cap C| = 33$.
- Los 2 que sólo ven el canal 13 y el canal 9, se entiende que no ven el canal 7, por lo que corresponden a $(B \cap C) - A$. Es decir, $|(B \cap C) - A| = 2$.
- Los 15 que sólo ven el canal 7 y el canal 9, se entiende que no ven el canal 13, por lo que corresponden a $(A \cap B) - C$. Así, $|(A \cap B) - C| = 15$.
- Los 3 que sólo ven el canal 13, se entiende que no ven el canal 7 ni el 9, por lo que corresponden a $C - (A \cup B)$. De este modo, $|C - (A \cup B)| = 3$.
- Los 25 que ven los tres canales, corresponden a $A \cap B \cap C$. O sea, $|A \cap B \cap C| = 25$.
- Los 6 que no ven T.V. corresponden a $(A \cup B \cup C)^c$. Es decir, $|(A \cup B \cup C)^c| = 6$.

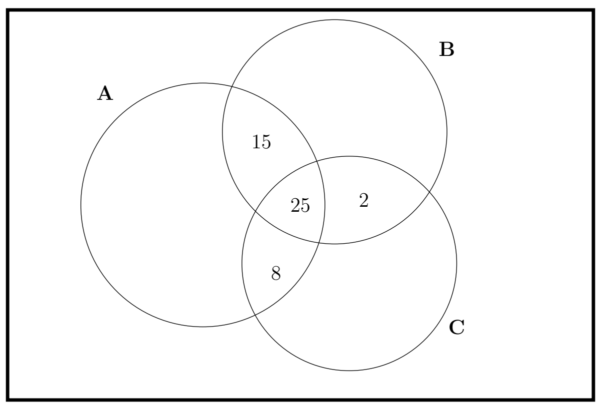
Para resolver este tipo de problemas, usamos un diagrama de Venn como:



- Partimos completando éste con la cantidad de elementos de la triple intersección, es decir, $|A \cap B \cap C| = 25$:

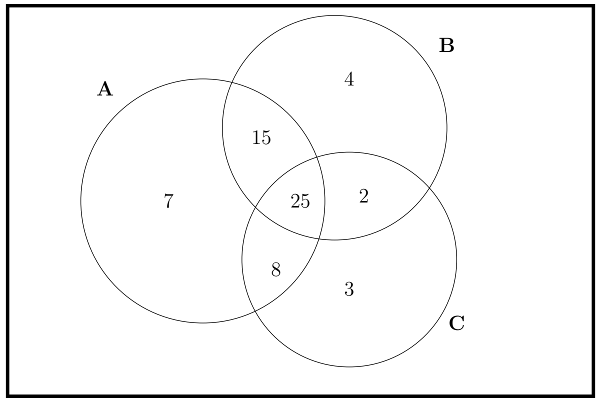


- Luego, seguimos con cada intersección entre dos conjuntos, teniendo en cuenta que $|(B\cap C)-A|=2, |(A\cap B)-C|=15$ y que $|A\cap C|=33$:

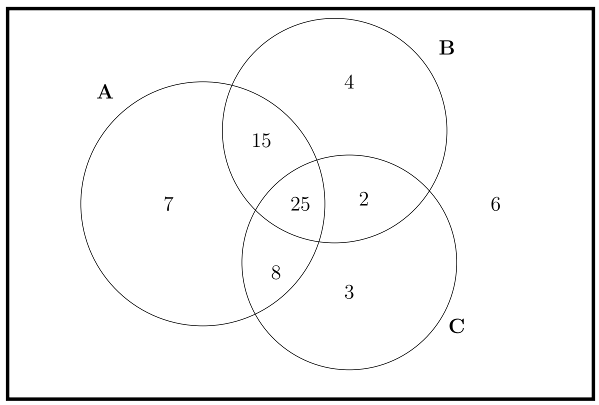


Note que los 8 nacen del hecho que $|A\cap C|=33$, y de que un elemento de $A\cap C$ también puede pertenecer a B, es decir, puede ser parte de los 25 de la triple intersección.

- Continuamos con los conjuntos de base, notando que $|A| = 55, |B| = 46$, $|C-(A\cup B)|=3$. Note que los 55 elementos de A no son sólo de A y los 46 elementos de B no son sólo de B, pues también pueden pertenecer a los conjuntos restantes. El diagrama de Venn queda como:



- Finalmente completamos con $|(A \cup B \cup C)^c| = 6$:



De este modo, sumando los números obtenidos, vemos que la cantidad de personas encuestadas son 70 (respuesta de a)), y los que sólo ven el canal 9 son 4 (respuesta de b)). $\square$

Para resolver problemas de cardinalidad, no es necesario usar siempre un diagrama de Venn, también lo podemos hacer usando las siguientes propiedades:

Proposición 1.5.10. *Se tiene que:*

- *si A y B son conjuntos disjuntos, entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

  Es decir, si A y B no se intersectan, entonces la cantidad de elementos de la unión es la suma de la cantidad de elementos de cada conjunto.

- *si A y B son conjuntos arbitrarios, entonces*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Es decir, la cantidad de elementos de su unión, es la suma de los elementos de cada uno de los conjuntos menos la cantidad de elementos de la intersección. Observemos que si no restamos esta cantidad, estaríamos contando dos veces los elementos comunes a ambos conjuntos.

- *Si A, B y C son conjuntos arbitrarios, entonces*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

- *Si A es un conjunto arbitrario, entonces*

$$|A^c| = |U| - |A|.$$

Apliquemos estas propiedades a un problema de cardinalidad, queda como ejercicio hacerlo con un diagrama de Venn.

Ejercicio 1.5.11. *De un total de 250 personas encuestadas sobre su desayuno diario se obtuvieron las siguientes respuestas: 30 personas toman té con leche, 40 personas toman café con leche, 80 personas toman leche, 130 personas toman té o leche y 150 toman café o leche.*

a) ¿Cuántas personas toman té?

b) ¿Cuántas personas no toman ninguna de estas tres bebidas al desayuno?

Solución. Los conjuntos de base son

$$U = \{\text{encuestados}\}$$

$$T = \{x \in U : x \text{ toma té}\}$$

$$L = \{x \in U : x \text{ toma leche}\}$$

$$C = \{x \in U : x \text{ toma café}\}$$

Según los datos

- $|U| = 250$.
- $|T \cap L| = 30$.
- $|C \cap L| = 40$.
- $|T \cap C| = 0$, dado que asumimos que nadie toma té mezclado con café.
- $|T \cap C \cap L| = 0$, dado que nadie toma té con café y leche.
- $|L| = 80$.
- $|T \cup L| = 130$.
- $|C \cup L| = 150$.

Respondamos a): Como

$$|T \cup L| = |T| + |L| - |T \cap L|,$$

entonces reemplazando, obtenemos que

$$130 = |T| + 80 - 30,$$

de donde $|T| = 80$. O sea, los que toman té (tal vez algunos con leche), son 80 encuestados.

Respondamos b): Los encuestados que no toman ninguna de estas bebidas, corresponden a $|(T \cup C \cup L)^c|$. De este modo, determinamos primero $|T \cup C \cup L|$. Se tiene que

$$|T \cup C \cup L| = |T| + |L| + |C| - |T \cap L| - |T \cap C| - |L \cap C| + |T \cap C \cap L|.$$

Reemplazando los datos que tenemos, se logra que

$$|T \cup C \cup L| = 80 + |C| + 80 - 30 - 0 - 40 + 0.$$

O sea,

$$|T \cup C \cup L| = 90 + |C|. \tag{1.5.2}$$

De este modo, si obtenemos $|C|$, obtendremos $|T \cup C \cup L|$. Note que

$$|C \cup L| = |C| + |L| - |C \cap L|,$$

de donde reemplazando lo necesario, obtenemos que

$$150 = |C| + 80 - 40.$$

De este modo, $|C| = 110$. Reemplazando este valor en (**??**), obtenemos que

$$|T \cup C \cup L| = 200.$$

Como $|U| = 250$, entonces $|(T \cup C \cup L)^c| = 50$. Por lo tanto, sólo 50 personas no toman ninguna de las tres bebidas. □

1.5.3. Demostraciones de propiedades de conjuntos.

Usando las definiciones y propiedades vistas de conjuntos, se pueden demostrar otras propiedades. A continuación mostramos algunos ejemplos.

Ejercicio 1.5.12. *Demuestre que* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solución. Escogemos un elemento x que pertenece al conjunto de la izquierda, en este caso $x \in (A \cup B)^c$. Debemos probar, a través de una cadena de equivalencias, que tal x pertenece al conjunto de la derecha, es decir, que $x \in A^c \cap B^c$ (también lo podemos hacer al revés, es decir, partir de un $x \in A^c \cap B^c$ y probar que $x \in (A \cup B)^c$). Lo hacemos. El hecho que

$$x \in (A \cup B)^c,$$

por definición de complemento de un conjunto, es equivalente a

$$x \notin A \cup B. \tag{1.5.3}$$

La aseveración (**??**) corresponde a la negación de $x \in A \cup B$. Es decir, (**??**) es equivalente a

$$\sim (x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow \sim (x \in A \ \vee \ x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A \ \wedge \ x \notin B).$$

Pero

$$x \notin A \ \wedge \ x \notin B$$

es equivalente a su vez a

$$x \in A^c \ \wedge \ x \in B^c,$$

esto debido a la definición de complemento de un conjunto. Finalmente, por definición de intersección, (**??**) equivale a

$$x \in A^c \cap B^c,$$

obteniendo lo pedido.

Lo realizado, en resumen corresponde a

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \text{ (definición de complemento de un conjunto)}\\
&\Leftrightarrow \sim (x \in (A \cup B)) \text{ (definición de no pertenencia a una unión)}\\
&\Leftrightarrow \sim (x \in A \ \vee \ x \in B) \text{ (definición de unión)}\\
&\Leftrightarrow x \notin A \ \wedge \ x \notin B \text{ (negación de la definición de unión)}\\
&\Leftrightarrow x \in A^c \ \wedge \ x \in B^c \text{ (definición de complemento de un conjunto)}\\
&\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c \text{ (definición de intersección).}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.13. *Demuestre que*

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B). \tag{1.5.4}$$

Solución. Esta vez no lo hacemos escogiendo un elemento del conjunto de la izquierda y mostrando, a través de una cadena de equivalencias, que éste pertenece al conjunto de la derecha (también se puede hacer de esta forma, queda como ejercicio). El método que escogemos, es simplemente partir de un miembro de (**??**) para llegar al otro, a través de una cadena de igualdades, y usando propiedades de conjuntos. En este caso, partimos del miembro derecho, para llegar al miembro izquierdo. Se tiene que

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c,$$

por propiedad 6) de conjuntos. En el miembro derecho de la última igualdad, podemos aplicar una de las leyes de Morgan, quedando

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c). \tag{1.5.5}$$

En el miembro derecho de (**??**), distribuimos $(A \cup B)$ "hacia dentro"del otro paréntesis (esto lo podemos hacer dado que $(A^c \cup B^c)$ corresponde a una unión, y además afuera de este paréntesis hay una intersección), deduciendo que

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = [(A \cup B) \cap A^c] \cup [(A \cup B) \cap B^c].$$

En cada corchete de la derecha en la igualdad anterior, aplicamos nuevamente distributividad, obteniendo que

$$[(A \cup B) \cap A^c] \cup [(A \cup B) \cap B^c] = [(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)] \cup [(A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)].$$

Como cualquier conjunto intersectado con su complemento es igual a $\emptyset$, entonces

$$[(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)] \cup [(A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)] = [\emptyset \cup (A^c \cap B)] \cup [(A \cap B^c) \cup \emptyset].$$

Además, todo conjunto unido con $\emptyset$ es igual al mismo conjunto, por lo que

$$[\emptyset \cup (A^c \cap B)] \cup [(A \cap B^c) \cup \emptyset] = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = (B - A) \cup (A - B) = (A - B) \cup (B - A),$$

donde usamos las propiedades 6) y 8). De este modo, hemos demostrado nuestra propiedad, lo que se resume como

$$\begin{aligned}
(A\cup B)-(A\cap B) &= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c \text{ (Propiedad 6))}\\
&= (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c) \text{ (Propiedad 14))}\\
&= [(A\cup B)\cap A^c]\cup[(A\cup B)\cap B^c] \text{ (Distributividad)}\\
&= [(A^c\cap A)\cup(A^c\cap B)]\cup[(A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)] \text{ (Distributividad)}\\
&= [\emptyset\cup(A^c\cap B)]\cup[(A\cap B^c)\cup\emptyset] \text{ (Propiedad 4))}\\
&= (A^c\cap B)\cup(A\cap B^c) \text{ (Propiedad 5))}\\
&= (B-A)\cup(A-B) \text{ (Propiedad 6))}\\
&= (A-B)\cup(B-A) \text{ (Conmutatividad).}
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.5.14. *Demuestre que*

$$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A.$$

Solución. Cada vez que tenemos una implicancia, el antecedente (o sea lo que está antes del símbolo $\Rightarrow$) será nuestra hipótesis. Es decir, corresponderá a los datos que tenemos, para probar lo que dice el consecuente (o sea lo que está después del símbolo $\Rightarrow$), el cual llamaremos tesis. O sea, en nuestro caso, nuestra hipótesis es

$$A\subseteq B.$$

y nuestra tesis es

$$A\cap B=A.$$

Al observar la tesis, vemos que corresponde a una igualdad de conjuntos. Para probarla, esta vez probaremos ambas inclusiones. Es decir, probaremos que

a) $A\cap B\subseteq A$.

b) $A\subseteq A\cap B$.

(No olvidemos que en alguna parte de esta demostración, debemos usar la hipótesis). Lo hacemos:

a) $A \cap B \subseteq A$:

Según la definición de subconjunto, debemos escoger un elemento x que pertenezca al conjunto de la izquierda $A \cap B$, y probar que éste pertenece al conjunto de la derecha A. Se tiene que, si

$$x \in A \cap B,$$

entonces, por definición de intersección de conjuntos,

$$x \in A \ \wedge \ x \in B.$$

Como la última aseveración es verdadera, entonces por definición del conectivo lógico $\wedge$, ambas aseveraciones que la componen deben ser verdaderas. En particular, es verdadero que

$$x \in A,$$

y así probamos lo que pretendíamos. Un resumen de lo que acabamos de probar es

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \text{ (definición de intersección)} \\ &\Rightarrow x \in A \text{ (definición del conectivo lógico } \wedge). \end{aligned}$$

b) $A \subseteq A \cap B$:

Como no hemos usado la hipótesis, seguramente será en esta etapa donde la usaremos. Como lo que debemos probar es nuevamente una inclusión, entonces escogemos un elemento x del conjunto de la izquierda A, y debemos probar que pertenece al conjunto de la derecha $A \cap B$. Hagamos esto. Sea

$$x \in A. \tag{1.5.6}$$

Debemos llegar a que x pertenece a la intersección de dos conjuntos, por lo que necesitamos dos conjuntos en nuestro análisis, y no 1 como dice (**??**). Se tiene que (**??**) implica que

$$x \in A \ \wedge \ x \in A,$$

lo cual es cierto por la propiedad de idempotencia (Teorema 1.4.4). Como por hipótesis, $A \subseteq B$, entonces la aseveración anterior implica que

$$x \in A \ \wedge \ x \in B,$$

lo cual a su vez implica, por definición de intersección, que

$$x \in A \cap B,$$

tal como queríamos probar. En resumidas cuentas, lo que hicimos en esta etapa fue

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in A \text{ (idempotencia)} \\ &\Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \text{ (hipótesis)} \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \text{ (definición de intersección).} \end{aligned}$$

De este modo, hemos probado nuestra tesis, y así la implicancia en cuestión. □

Ejercicio 1.5.15. *Demuestre que*

$$A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Solución. Como debemos probar una equivalencia, entonces debemos demostrar dos implicancias:

a) $A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$.

Lo hacemos:

a) $A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Vamos a realizar la demostración de esta implicancia, probando que su negación es falsa (Este método se llama **método de reducción a lo absurdo**). Como la negación de $p \to q$ es $p \wedge \sim q$, entonces, en nuestro caso, la negación es

$$A - B = A \ \wedge \ A \cap B \neq \emptyset. \tag{1.5.7}$$

Probamos que (**??**) es falsa. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A \cap B$. Note que

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \text{ (definición de intersección)} \\ &\Leftrightarrow x \in A - B \ \wedge \ x \in B \text{ (usando (\textbf{??}))} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ x \in B \text{ (definición diferencia de conjuntos)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \notin B) \text{ (asociatividad).} \end{aligned}$$

En la última línea, tenemos entre otras cosas la aseveración $(x \in B \ \wedge \ x \notin B)$, la cual es falsa, dado que no es posible que un elemento pertenezca y no pertenezca a un conjunto a la vez. De este modo, la aseveración (1.7.17) no es verdadera, por lo que el hecho que existe $x \in A \cap B$ no es cierto. Así $A \cap B \neq \emptyset$ es falso, y por lo tanto la negación (**??**) es falsa. Concluimos finalmente que nuestra implicancia es verdadera.

b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$.

En este caso, la hipótesis es que $A \cap B = \emptyset$ y la tesis que $A - B = A$. La tesis corresponde a una igualdad de conjuntos, por lo cual debemos probar dos inclusiones:

b1) $A - B \subseteq A$.

b2) $A \subseteq A - B$.

Probamos cada una de ellas:

b1) $A - B \subseteq A$

Escogemos $x \in A - B$. Debemos mostrar que $x \in A$. Se tiene que

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Rightarrow x \in A \ \wedge \ x \notin B \text{ (definición de diferencia de conjuntos)} \\ &\Rightarrow x \in A \text{ (definición del conectivo lógico } \wedge\text{).} \end{aligned}$$

De este modo, probamos lo pedido.

b2) $A \subseteq A - B$.

Análogamente a lo hecho en la inclusión anterior, escogemos $x \in A$. Note que, con respecto a B, x tiene dos opciones: $x \in B$ o $x \notin B$. Así, la aseveración $(x \in B \ \vee \ x \notin B)$ es verdadera, dado que al menos una de las proposiciones que la componen es verdadera. De este modo,

$$x \in A \Rightarrow x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \notin B). \tag{1.5.8}$$

Note que el consecuente de (**??**) es verdadero, dado que es una conjunción. De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in A &\Rightarrow x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \notin B) \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \text{ (distributividad)} \\
&\Rightarrow x \in A \cap B \ \vee \ x \in (A - B) \text{(definición de intersección y de diferencia de conjuntos)} \\
&\Rightarrow x \in \emptyset \ \vee \ x \in (A - B) \text{ (hipótesis)} \\
&\Rightarrow x \in (A - B) \text{ (definición del conectivo lógico } \vee \text{)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos lo pedido.

Finalmente, nuestra equivalencia queda demostrada.

□

1.5.4. Producto cartesiano.

Consideremos el siguiente ejercicio

Ejercicio 1.5.16. *Sean $A = \{5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dos conjuntos.*

a) *Determine el conjunto de todos los pares ordenados (a, b), con $a \in A$ y $b \in B$. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto?*

Solución. El conjunto pedido, se denomina **producto cartesiano** entre A y B, en ese orden, y es denotado por $A \times B$. Es decir,

$$A \times B = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4)\}.$$

Este conjunto tiene 12 elementos. Note que 12 corresponde a la multiplicación de la cantidad de elementos de A, es decir 3, con la cantidad de elementos de B, es decir 4.

b) *Determine el subconjunto S de $A \times B$, de modo que cada elemento $(x, y) \in S$, cumple que $x - y$ es un número par.*

Solución. Se tiene que

$$S = \{(5,1),(5,3),(6,2),(6,4),(7,1),(7,3)\}.$$

Definición 1.5.11. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. El* ***producto cartesiano*** *entre A y B, en ese orden, corresponde al conjunto*

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Observación 1.5.11. Es decir, para dos conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano $A \times B$ corresponde a todos los pares ordenados (a, b) tales que el primer elemento a pertenece al primer conjunto A y el segundo elemento pertenece al segundo conjunto B.

Observación 1.5.12. En general, si A y B son conjuntos no vacíos, donde cada conjunto tiene una cantidad finita de elementos, entonces

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Es decir, la cantidad de elementos de $A \times B$, corresponde a la cantidad de elementos de A por la cantidad de elementos de B.

Veamos cómo demostrar algunas propiedades:

Ejercicio 1.5.17. *Demuestre que $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.*

Solución. Lo hacemos escogiendo un elemento (x, y) del conjunto de la derecha, y probando, a través de una cadena de equivalencias, que (x, y) pertenece al conjunto de la izquierda. Sea

$$(x, y) \in (A - B) \times C.$$

En este caso, por definición de producto cartesiano,

$$x \in A - B \ \wedge \ y \in C.$$

De este modo, por definición de diferencia de conjuntos,

$$(x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ y \in C \tag{1.5.9}$$

Como debemos llegar a la diferencia de dos productos cartesianos, la cual es $(A \times C) - (B \times C)$, entonces necesitamos otra expresión $y \in C$. Usando idempotencia, tenemos que (**??**) es equivalente a

$$(x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ (y \in C \wedge \ y \in C).$$

Conmutando y asociando, lo anterior queda como

$$(x \in A \ \wedge \ y \in C) \ \wedge \ (x \notin B \wedge \ y \in C)$$

Como $x \in A \ \wedge \ y \in C$, entonces $(x, y) \in A \times C$. Como $x \notin B \wedge \ y \in C$, esto no es suficiente para que $(x, y) \in B \times C$, por lo que $(x, y) \notin B \times C$. De este modo, tenemos que

$$(x, y) \in A \times C \ \wedge \ (x, y) \notin B \times C.$$

Así,

$$(x, y) \in (A \times C) - (B \times C),$$

como deseábamos. Lo hecho lo podemos resumir del siguiente modo

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A - B) \times C &\Rightarrow x \in A - B \ \wedge \ y \in C \text{ (definición producto cartesiano)} \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ y \in C \text{ (definición diferencia de conjuntos)} \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ y \in C \wedge \ y \in C \text{ (idempotencia)} \\
&\Rightarrow (x \in A \ \wedge \ y \in C) \ \wedge \ (x \notin B \ \wedge \ y \in C) \text{(conmut.y asoc.)} \\
&\Rightarrow (x, y) \in A \times C \ \wedge \ (x, y) \notin B \times C \text{ (definición producto cartesiano)} \\
&\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) - (B \times C) \text{ (definición diferencia de conjuntos).}
\end{aligned}$$

1.6. Ejercicios propuestos.

1. Suponga que $p \to q$ es falsa. Determine el valor de verdad de

    a) $\sim q \to \sim p$

    b) $p \to (p \to q)$

    c) $\sim p \vee q$

    d) $q \to p$

2. En cada caso, si es posible, determine el valor de verdad de la proposición dada, usando los datos propuestos.

    a) $p \to (q \vee r)$, sabiendo que r es verdadero.

    b) $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \to \sim q)$, sabiendo que q es falso.

    c) $\sim q \to p$, sabiendo que $p \vee q$ es falso.

3. En cada caso, determine, si es posible, el valor de verdad de p, si

    a) $p \leftrightarrow q$ es falso y $\sim q$ es verdadera.

    b) $(p \wedge q) \to r$ es falso.

    c) $(p \to q) \ \vee \ (\sim q \to r)$ es falso.

4. Demuestre, usando una tabla de verdad, cada proposición siguiente

    a) $\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \ \vee \ (q \wedge \sim p)]$

    b) $[(p \to q) \ \wedge \ (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$

    c) $[(p \leftrightarrow q) \ \wedge \ (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$

5. Demuestre, usando equivalencias lógicas, cada proposición siguiente

    a) $[(p \to q) \vee \sim p] \Leftrightarrow (p \to q)$

    b) $(q \to \sim p) \Leftrightarrow (\sim p \vee \ \sim q)$

    c) $\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \ \vee \ (q \wedge \sim p)]$

6. Determine si cada una de las siguientes aseveraciones es tautología, contradicción o contingencia.

   a) $p \wedge \sim p$

   b) $p \vee \sim p$

   c) $p \rightarrow \sim p$

   d) $p \leftrightarrow \sim p$

   e) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

7. Sea $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Considere la función proposicional

   a) $p(x) : x + 2 > 0$

   b) $p(x) : \dfrac{1}{x}$ es un número entero

   c) $p(x) : x^2 = 0$

   d) $p(x) : x^2 = 4$

   e) $p(x) : x^2 < 16$

   7.1) Obtenga su conjunto de validez en U.

   7.2) En base a lo obtenido en 7.1), concluya cuál(es) de las siguientes aseveraciones es(son) verdadera(s):

   1) $\forall x \in U : p(x)$

   2) $\exists x \in U : p(x)$

   3) $\exists ! x \in U : p(x)$

8. Sea $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Para cada proposición siguiente:

   a) $\forall x \in B : x + 5 \geq 12$

   b) $\forall x \in B : x \text{ } es \text{ } par$

   c) $\exists ! x \in B : x \text{ } es \text{ } impar$

   d) $\exists x \in B : x \text{ } es \text{ } primo$

   e) $\exists x \in B : x^2 > 100$

   f) $\exists ! x \in B : x^2 = 9$

   8.1) Determine, justificadamente, su valor de verdad.

   8.2) Escriba su negación.

9. Sea $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

   a) Determine el conjunto de validez de

   $$p(x) : x^3 < 200 \ \vee \ \frac{120}{x} \in \mathbb{N}$$

   en B.

   b) En base lo obtenido en a), ¿Es verdadera la proposición

   $$\forall x \in B : p(x)?$$

   c) Niegue la proposición

   $$\forall x \in B : p(x),$$

   y determine su valor de verdad.

10. Considere las proposiciones

   a) $\forall n \in \mathbb{N} : n - 3 > -2$

   b) $\exists! n \in \mathbb{N} : n^2 = 1$

   c) $\exists! x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1$

   d) $\forall x \in \mathbb{R} : -x < 0$

   e) $\exists x \in \mathbb{R} : x^3 < x^2$

   f) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \ \vee \ 2x = 0$

   g) $\forall n \in \mathbb{N} : n$ es múltiplo de $8 \rightarrow n$ es múltiplo de 2

   h) $\forall n \in \mathbb{N} : n$ es múltiplo de $2 \rightarrow n$ es múltiplo de 8

   i) $\forall n \in \mathbb{N} : n$ es múltiplo de $2 \leftrightarrow n$ es múltiplo de 8

   j) $\forall x \in \mathbb{R} : 2x + 4 = 0 \leftrightarrow x = -2$

   10.1) Determine, justificadamente, su valor de verdad.

   10.2) Escriba su negación.

11. Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{5, 6, 7\}$ y las proposiciones

   a) $\forall x \in A, \exists y \in B : x + y < 10$

   b) $\exists x \in A, \forall y \in B : x + y < 10$

   c) $\exists! x \in A, \forall y \in B : x + y < 10$

   11.1) Determine, justificadamente, su valor de verdad.

   11.2) Escriba su negación.

12. Considere el conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Determine, justificadamente, el valor de verdad de:

   a) $\forall x \in A, \exists y \in A : x^2 + y^2 < 9$

   b) $\forall x \in A, \forall y \in A : x^2 + y^2 < 9$

   c) $\exists x \in A, \forall y \in A : x^2 + y^2 < 10$

   d) $\exists! x \in A, \forall y \in A : x^2 + y^2 < 10$

   e) $\exists x \in A, \exists y \in A : x^2 + y^2 > 16$

13. Considere la proposición

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} : m < n.$$

   a) Justifique por qué es falsa.

   b) Obtenga su negación y justifique por qué esta es verdadera.

14. Considere la proposición

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n \leq x \leq n + 1.$$

   a) ¿Cuál es su valor de verdad?

   b) Escriba su negación y compruebe que tiene el valor de verdad opuesto a la proposición dada.

15. Considerando el conjunto universo $U = \mathbb{N}$, escriba por comprensión los conjuntos dados.

    a) $A = \{4, 8, 12, 16\}$

    b) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

    c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

16. Escriba por extensión los siguientes conjuntos.

    a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$

    b) $B = \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = -5\}$

    c) $H = \{x : x \; es \; una \; letra \; de \; la \; palabra \; EDUCACION\}$

17. Determine si cada una de las siguientes aseveraciones es verdadera o falsa.

    a) $\{a, b\} \subseteq \{a\}$

    b) $\{a\} \subseteq \{a, b\}$

    c) $\{a\} \subseteq \{a\}$

    d) $\{a\} \in \{a\}$

    e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$

    f) $\{a\} \subseteq \emptyset$

    g) $\emptyset \subseteq \{a\}$

    h) $\{\emptyset\} \subseteq \{a\}$

    i) $\{a, b\} \in \{\{a, b\}, c\}$

    j) $\{\{a, b\}\} \subseteq \{\{a, b\}, c\}$

18. Considere los conjuntos

    - $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 5\}$
    - $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 10\}$
    - $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 4\}$
    - $D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 6\}$
    - $E = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 2\}$

    a) Decida si $A \subseteq B$ y si $B \subseteq A$.

b) Defina por comprensión los conjuntos $C \cap D$, $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$ y $B \cap C \cap D$.

c) Decida si $(C \cup D) \subseteq E$. Justifique.

19. Sea $U = \mathbb{N}$. Si

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un número primo } \wedge \ n < 8\}$$

y $B = \{2, 6, 7, 8\}$, determine $(A \cup B) - (A \cap B)$

20. Sea $U = \{x \in \mathbb{Z} : -4 < x \leq 3\}$ y $A = \{x \in U : x^2 \leq 4\}$. Determine A^c.

21. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 - 5n + 6 = 0\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$. Determine la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $B \subseteq A$

b) $\{3, 5\} \in P(A)$

c) $\{\{3\}\} \subseteq P(B)$

d) $P(A) \subseteq P(B)$

e) $\{\emptyset\} \in P(B)$

22. Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, ¿cuál(es) de las siguientes aseveraciones no es siempre verdadera?

a) $A \cup A^c = U$

b) $A - B = B - A$

c) $A \cap \emptyset = \emptyset$

d) $\emptyset \subseteq A$

e) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

23. Demuestre que

a) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

b) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

c) $B \subseteq A \Rightarrow B = A - (A - B)$

d) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

e) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

f) $A - B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = A$

g) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

24. Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

    a) Determine el conjunto $A \times B$.

    b) Defina por extensión el conjunto

    $$C = \{(x, y) \in A \times B : x + y \text{ es un múltiplo de } 3\}.$$

    c) ¿A qué conjunto corresponde

    $$D = \{(x, y) \in A \times B : x + y \text{ es un número impar}\}?$$

25. Dados A y B dos conjuntos cualesquiera,¿Es cierto que $A \times B = B \times A$? Justifique.

26. Demuestre que

    a) $A \times \emptyset = \emptyset$

    b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

    c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

    d) $A \subseteq B \ \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$

27. En una encuesta sobre deportes preferidos, los 32 encuestados manifestaron que les gusta el fútbol o tenis. Si a 30 de ellos les gusta el fútbol, y 10 les gustan ambos deportes ¿A cuántos encuestados les gusta el tenis?

28. A un vacunatorio de Concepción acudieron durante el día de ayer 14000 lactantes, de los cuales 2420 se vacunaron contra la Hepatitis, 5080 contra la Varicela, 6100 contra la Fiebre Tifoidea, 50 contra la Varicela y la Fiebre Tifoidea, 70 contra la Hepatitis y la Varicela, 30 contra la Hepatitis y la Varicela, pero no contra la Fiebre Tifoidea, 50 contra la Hepatitis y la Fiebre Tifoidea pero no contra la Varicela. ¿Cuántos lactantes no fueron vacunados?

29. Se quiere determinar el grupo sanguíneo de 1000 personas. Para ello se analiza la presencia o ausencia de tres antígenos en la sangre de estas personas. Estos antígenos son A, B y R_h. Una persona pertenece al grupo sanguíneo:

- A^+: si en su sangre sólo están presentes los antígenos A y R_h,
- A^-: si en su sangre sólo está presente el antígeno A,
- B^+: si en su sangre sólo están presentes los antígenos B y R_h,
- B^-: si en su sangre sólo está presente el antígeno B,
- AB^+: si en su sangre están presentes los tres antígenos A, B y R_h,
- AB^-: si en su sangre sólo están presenten los antígenos A y B,
- O^+: si en su sangre sólo está presente el antígeno R_h,
- O^-: si en su sangre no se encuentra ninguno de los tres antígenos buscados.

Sabiendo que de las 1000 personas estudiadas: 40 tienen grupo sanguíneo AB^+, 400 tienen grupo sanguíneo A^+, 200 tienen grupo sanguíneo O^+, 220 tienen grupo sanguíneo O^-, 40 tienen grupo sanguíneo A^-, 10 tienen grupo sanguíneo B^-, 700 poseen el antígeno R_h y 180 poseen el antígeno B. Responda

a) ¿Cuántas personas tienen grupo sanguíneo B^+?

b) ¿Cuántas personas tienen grupo sanguíneo AB^-?

30. Una empresa desea capacitar a sus 235 empleados ofreciéndoles cursos de Inglés, Francés y Alemán. Con el objetivo de analizar si esta idea sería bien acogida, se aplica una encuesta entre los empleados. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

- todos los empleados manifestan interés por al menos uno de los cursos,
- 95 empleados estarían interesados en inscribirse en el curso de Francés, 85 en el de Alemán y 144 en el de Inglés,
- a 12 de ellos les interesaría aprender los tres idiomas,
- 42 aprenderían Alemán e Inglés y 37 prefieren inscribirse en los cursos de Francés y Alemán.

Responda:

a) ¿A cuántos empleados les interesaría estudiar Inglés **y** Francés?

b) ¿Cuántos empleados estarían interesados sólo en Inglés?

Justifique sus respuestas.

Capítulo 2

Conjuntos numéricos.

2.1. Introducción.

En este capítulo abordaremos el mundo de los números. Partiremos con los números naturales, los cuales usualmente usamos para contar u ordenar los elementos de un conjunto. Será un breve pincelazo, en el cual veremos problemas como

A una reunión asistieron 42 personas. Habían 5 mujeres más que hombres, y 2 niños más que mujeres ¿Cuántas mujeres, hombres y niños habían?

A primera vista uno pensaría en resolver este problema con una ecuación, sin embargo, es mucho más rápido hacerlo con un razonamiento netamente númerico.

Continuaremos con los números enteros, el cual también será un breve pincelazo. Aquí aparecen situaciones que involucran temperaturas bajo cero, estados de cuenta bancarios, o años antes y después de Cristo. Aquí, ya sea usando operaciones con enteros, o simplemente una recta númerica más alguna operación con números naturales, podremos resolver problemas como determinar la cantidad de años que pasaron desde los primeros juegos olímpicos realizados en la antigua Grecia, los cuales datan del año 776 $A.C.$, hasta el día de hoy.

Nuestro estudio más extenso será de los números racionales, en el cual abordaremos cantidades fraccionarias, operatoria de fracciones, y aplicaciones, como por ejemplo los porcentajes. Resolveremos problemas como

Carla desea vender un terreno. Logró venderlo en 3 etapas, del siguiente modo:

- *En Marzo, vendió* $\frac{2}{3}$ *del terreno.*
- *En Abril, vendió la cuarta parte de lo que vendió en Marzo.*
- *En Mayo vendió las restantes 3000 hectáreas.*

¿Cuántas hectáreas en total posee el terreno?

Solucionaremos este tipo de problemas de dos formas, una usando sólo operatoria aritmética, y otra a través de representaciones gráficas.

En las aplicaciones como lo son los porcentajes, podremos determinar qué porcentaje de la superficie de la Tierra está ocupada con agua, sabiendo que esta corresponde aproximadamente a $510,1$ millones de kms^2 y que el agua en la Tierra ocupa aproximadamente $362,17$ millones de kms^2.

El último conjunto númerico que estudiaremos en este capítulo, será el de los números irracionales, en donde aparecen conocidos números como π y e, los cuales tienen importantes aplicaciones.

Posteriormente haremos un minucioso estudio de las potencias de distinto tipo de exponentes, dándole sentido a expresiones como

$$2^3, 3^{-4} \text{ o } 64^{\frac{1}{4}}.$$

Analizaremos la operatoria con potencias y raíces, fundamental para cursar asignaturas posteriores de Matemática.

Para terminar este capítulo, usaremos lo aprendido para resolver problemas vinculados con notación científica. Por ejemplo, determinaremos a cuántas veces el volumen del Sol corresponde el volumen de la Tierra, sabiendo que el volumen del sol es de $1,4123 \cdot 10^{18}\ km^3$ y el volumen de la Tierra es de $1{,}08321 \cdot 10^{12}\ km^3$.

2.2. Números naturales.

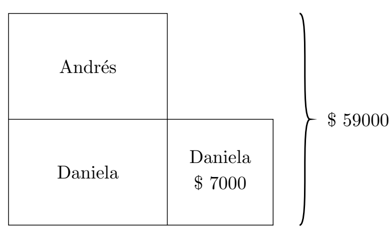
El conjunto de los números naturales, el cual es denotado por $\mathbb{N}$, consiste en los números que usualmente utilizamos para contar los elementos de un conjunto, o para describir la posición de cada elemento de una secuencia ordenada. De este modo, el conjunto $\mathbb{N}$, representado con algunos de sus elementos, corresponde a

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}.$$

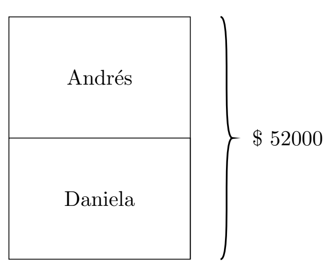
Con las 4 operaciones básicas entre números naturales: suma, resta, multiplicación y división, podemos resolver variados problemas:

Ejercicio 2.2.1. *Andrés y Daniela juntaron* \$59000 *para ir de paseo a una playa por el fin de semana. Daniela puso* \$7000 *más que Andrés. ¿Cuánto dinero aportó cada uno?*

Solución. Tenemos la siguiente representación del problema:



donde cada rectángulo corresponde al dinero que aportó la persona cuyo nombre sale en él. Si al total de dinero, es decir a \$59000, le quitamos los \$7000 de más que puso Daniela, entonces obtenemos \$52000, que sería el total de dinero que juntarían ambos, en el caso que cada uno colocara la misma cantidad:



Por lo tanto, haciendo

$$52000 \div 2 = 26000,$$

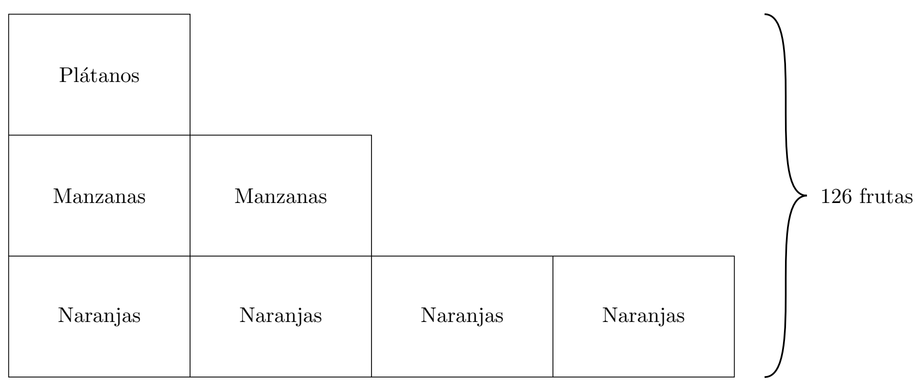
entonces obtenemos que Andrés puso \$26000 y Daniela puso

$$\$26000 + \$7000 = \$33000.$$

$\square$

Ejercicio 2.2.2. *En un cajón tengo naranjas, manzanas y plátanos. Èste tiene el doble de manzanas que de plátanos, y el doble de naranjas que de manzanas. Si en total el cajón tiene 126 frutas. ¿Cuántas frutas de cada tipo hay?*

Solución. La representación es



Dada esta representación, tenemos las frutas en 7 grupos, por lo que hacemos

$$126 \div 7 = 18,$$

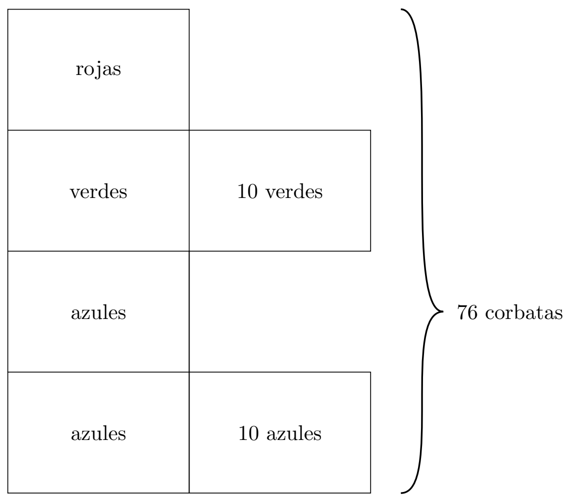
de donde se deduce en cada grupo hay 18 frutas. De este modo, tenemos

- 18 plátanos.
- $18 \cdot 2 = 20 + 16 = 36$ manzanas.
- y $18 \cdot 4 = 36 \cdot 2 = 72$ naranjas.

$\square$

Ejercicio 2.2.3. *En mi tienda vendo 76 corbatas, y tengo rojas, verdes y azules. Las corbatas verdes son 10 más que las corbatas rojas, y las corbatas azules son la misma cantidad que las corbatas rojas y verdes juntas. ¿Cuántas corbatas de cada tipo tengo para vender?*

Solución. Una representación es



Vemos que si quitamos el exceso de 20 corbatas (10 verdes y 10 azules), entonces nos quedan 4 grupos iguales, los cuales en total hacen 56 corbatas. Luego, como

$$56 \div 4 = 14,$$

entonces cada grupo tiene 14 corbatas. De este modo,

- las corbatas rojas son 14,
- las corbatas verdes son $14 + 10 = 24$,
- las corbatas rojas son $14 + 24 = 38$.

$\square$

2.3. Números enteros.

El conjunto de los números enteros, el cual es denotado por $\mathbb{Z}$, representado con algunos de sus elementos, viene dado por

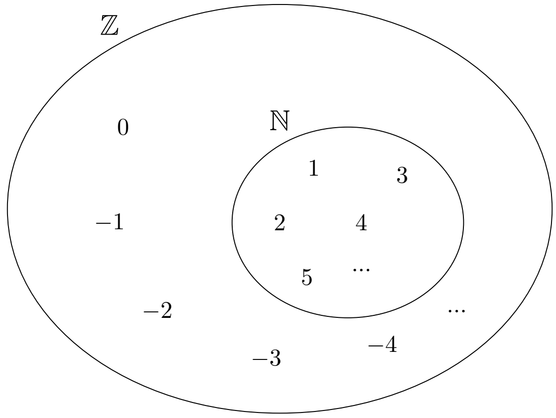
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

El conjunto de los números enteros tiene como elementos a los números naturales, al cero y los llamados opuestos aditivos de los números naturales. Más formalmente, decimos que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Los números enteros son usados para medir temperatura, altura con respecto al nivel del mar, utilidades de una empresa, etc.

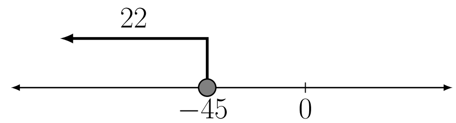
Note que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$:



Ejercicio 2.3.1. *José nació en el año* 45 *AC. Si su padre lo tuvo a los 22 años. ¿En qué año nació?*

Solución. Este problema lo podemos resolver de dos formas:

- Primera forma: Usamos una recta númerica. Ubicamos el año -45, año en el cual nació José. Como su padre lo tuvo a los 22 años, esto quiere decir que su padre nació 22 años antes, por lo que simbolizamos todo lo mencionado del siguiente modo:



Desde 0 a -45 hay 45 unidades de distancia, y si a eso le agregamos 22 unidades más hacia la izquierda, es decir, si efectuamos la suma $45 + 22 = 67$, obtenemos que el padre nació en el año 67 AC.

- Segunda forma: Usando operaciones con números enteros. Como José nació en el año -45 y su padre 22 años antes, entonces efectuamos la operación $-45 - 22 = -67$, de donde directamente deducimos que el padre nació en el año 67 AC.

$\square$

Ejercicio 2.3.2. *La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera a razón de* $1°$ *cada 154 metros. ¿A qué altura vuela un cohete si la temperatura del aire es de* $-27°$ *y la temperatura en la superficie terrestre es de* $-5°$*?*

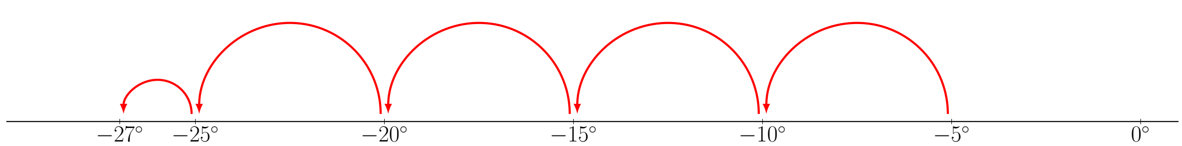
Solución. Para determinar cuánto disminuyó la temperatura desde $-5°$ a $-27°$ podemos proceder de algunas de las siguientes formas:

- La variación de temperatura corresponde a

$$\text{temperatura final} - \text{temperatura inicial} = -27 - (-5) = -22,$$

lo que quiere decir que desde la superficie terrestre hasta la altura en la que se encuentra el avión, la temperatura disminuyó en $22°$.

- Usando la recta númerica, vemos que:



por lo que entre $-5°$ y $-27°$, tenemos $22°$ de disminución.

Así, hubieron 22 disminuciones de $1°$, cada cual equivale a 154 metros. De este modo, como

$$22 \cdot 154 = 3388,$$

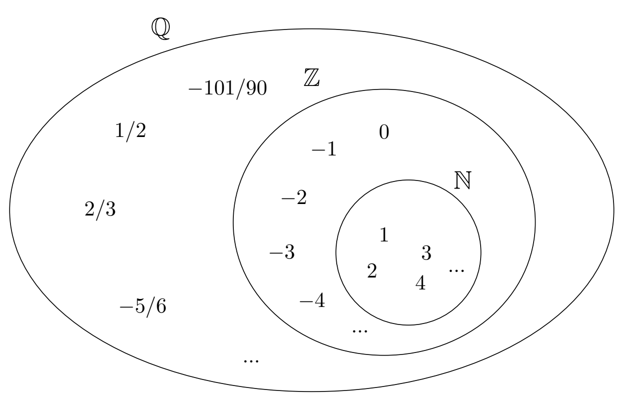
entonces el cohete vuela a una altura de 3388 metros.

2.4. Números racionales.

El conjunto de los números racionales, el cual es denotado por $\mathbb{Q}$, corresponde al conjunto de números decimales que se pueden representar como una fracción de números enteros, tales como

- 0,5, el cual puede ser expresado como $\frac{1}{2}$
- $-1{,}25$, el cual puede ser representado como $\frac{-6}{5}$ o simplemente como $-\frac{6}{5}$
- $0,\overline{3} = 0{,}333\ldots$, el cual puede ser representado como $\frac{1}{3}$
- $1{,}1\overline{2} = 1{,}1222\ldots$, el cual puede ser representado como $\frac{101}{90}$
- 5, el cual puede ser representado como $\frac{5}{1}$
- -30, el cual puede ser representado como $\frac{-30}{1}$ o simplemente como $-\frac{30}{1}$

Note que cualquier número entero a puede ser representado como $\frac{a}{1}$, por lo que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$:



En general, los números racionales corresponden a:

- Números decimales finitos:

  Ejemplos: $1{,}25; 3{,}4; -2{,}125; 7; -3$.

  Son aquellos números con una cantidad finita de cifras decimales.

- Números decimales periódicos:

  Ejemplos: $3.\overline{2} = 3{,}222...; 4.\overline{35} = 4{,}3535...$

  Son aquellos números para los cuales, en su parte decimal, se repite indefinidamente un patrón de cifras, el cual está posicionado a partir de la primera cifra decimal.

- Números decimales semiperiódicos:

  Ejemplos: $2{,}3\overline{5} = 2{,}3555...;\ 1{,}17\overline{2} = 1{,}17222...$

  Son aquellos números, para los cuales, en su parte decimal, se repite indefinidamente un patrón de cifras, el cual no está posicionado a partir de la primera cifra decimal.

Ejercicio 2.4.1. *Exprese* $1,35$ *como una fracción irreducible de números enteros.*

Solución. Sea

$$x = 1,35$$

Multiplicamos esta igualdad por una potencia de 10, de modo que $1,35$ se transforme en un número entero. Es decir, multiplicamos esta igualdad por 100. Obtenemos que

$$x = 1,35 \Leftrightarrow 100x = 135$$

Despejando x de la última igualdad, se deduce que

$$x = \frac{135}{100} \Leftrightarrow x = \frac{27}{20}.$$

Por lo tanto, $1,35$ puede ser expresado como la fracción irreducible $\frac{27}{20}$. $\square$

Ejercicio 2.4.2. *Exprese* $3,\overline{27}$ *como una fracción irreducible de números enteros.*

Solución. Sea

$$x = 3,272727... \tag{2.4.1}$$

Multiplicamos esta igualdad por una potencia de 10, de modo que el número decimal obtenido a la derecha, tenga el mismo periodo que $3,\overline{27}$. Es decir, multiplicamos (**??**) por 100, obteniendo la igualdad

$$100x = 327,272727... \tag{2.4.2}$$

Si a (**??**) le restamos (**??**), obtenemos que

$$100x - x = 327 - 3,$$

de donde se deduce que

$$99x = 327 - 3 \Leftrightarrow x = \frac{324}{99} \Leftrightarrow x = \frac{36}{11}.$$

Así, hemos probado que $3,\overline{27}$ es expresado como la fracción irreducible $\frac{36}{11}$. □

Ejercicio 2.4.3. *Exprese* $1,5\overline{4}$ *como una fracción irreducible de números enteros.*

Solución. Sea

$$x = 1,5444... \tag{2.4.3}$$

Multiplicamos (**??**) por una potencia de 10, de modo que el número decimal obtenido a la derecha sea periódico. Es decir, multiplicamos (**??**) por 10, obteniendo

$$10x = 15,444... \tag{2.4.4}$$

Ahora, multiplicamos (**??**) por una potencia de 10 , de modo que el número decimal obtenido a la derecha, tenga el mismo periodo que $15,\overline{4}$, es decir, multiplicamos (**??**) por 10, obteniendo

$$100x = 154,444... \tag{2.4.5}$$

Si a (**??**) le restamos (**??**), obtenemos $90x = 154 - 15$, de donde $x = \frac{139}{90}$. O sea, $1,5\overline{4}$ puede ser expresado como la fracción irreducible $\frac{139}{90}$. □

2.4.1. Comparación de fracciones.

Ejercicio 2.4.4. *En las elecciones de Pelotillehue, Condorito y Comegato compiten palmo a palmo por obtener el puesto de alcalde de la comuna. Condorito obtuvo* $\frac{1}{3}$ *del total de votos y Comegato* $\frac{7}{20}$*. ¿Quién ganó la elección?*

Solución. Debemos determinar quién es mayor, si $\frac{1}{3}$ o $\frac{7}{20}$. Para esto, transformamos ambas fracciones en fracciones con el mismo denominador. El denominador común, será el $M.C.M$ entre los denominadores 3 y 20, es decir 60. De este modo,

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{20}{60}$$

y

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{21}{60}$$

Así, como

$$\frac{21}{60} > \frac{20}{60},$$

entonces

$$\frac{7}{20} > \frac{1}{3},$$

por lo que Comegato es el nuevo alcalde. □

Ejercicio 2.4.5. *¿Qué número es mayor,*

a) $\frac{11}{14}$ *o* $\frac{5}{6}$*?*

Solución. Note que $MCM(14, 6) = 42$. De este modo, transformamos ambas fracciones en fracciones equivalentes con denominador 42. En efecto,

$$\frac{11}{14} = \frac{11 \cdot 3}{14 \cdot 3} = \frac{33}{42}$$

y

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42},$$

por lo que concluimos que

$$\frac{5}{6} > \frac{11}{14}.$$

□

b) $\frac{2}{5}$ *o* $\frac{3}{10}$?

Solución. Note que $M.C.M.(5, 10) = 10$. Queremos que ambas fracciones tengan denominador 10, por lo que sólo transformamos la fracción $\frac{2}{5}$. En efecto,

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10},$$

por lo que

$$\frac{2}{5} > \frac{3}{10}.$$

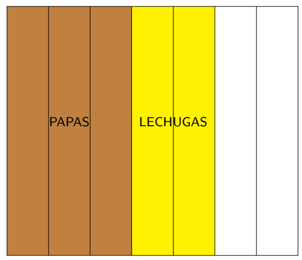
□

Observación 2.4.1. Dadas dos fracciones, para determinar cuál de ellas es mayor, o si son equivalentes, podemos transformar una o ambas fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador, según sea necesario. El denominador común escogido puede ser el MCM entre los denominadores. Una vez realizado esto, comparamos las fracciones obtenidas.

2.4.2. Suma de fracciones y resta de fracciones.

Ejercicio 2.4.6. *Don Marcelo usa $\frac{3}{7}$ de su terreno para plantar papas y luego $\frac{2}{7}$ del mismo para plantar lechugas. ¿Qué fracción del terreno ocupó para ambas plantaciones?*

Solución. Para resolver el problema, debemos calcular la suma $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$. Representamos el terreno por un rectángulo, donde las zonas achuradas corresponden a las plantaciones efectuadas:



Es evidente de la figura, que la fracción del terreno correspondiente a ambas plantaciones es $\frac{5}{7}$. Es decir,

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

$\square$

En general, tenemos que

Definición 2.4.1. *Si a, b, c son números enteros con $c > 0$, entonces*

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

y

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Observación 2.4.2. Es decir, al sumar (restar) dos fracciones del mismo denominador, obtenemos una fracción cuyo denominador es el denominador común, y cuyo numerador es la suma (resta) de los numeradores.

Ejercicio 2.4.7. *Considere la suma*

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}.$$

Responda

a) *¿cuál es el mínimo común múltiplo (MCM) entre los denominadores?*

Solución. El mínimo común múltiplo es 12.

b) *transforme cada fracción de la operación dada en una fracción equivalente, de modo que el denominador común sea el MCM calculado. Luego realice la operación.*

Solución. Note que

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}+\frac{5}{6} &= \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}\\ &= \frac{9}{12}+\frac{10}{12}\\ &= \frac{19}{12}.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.4.8. *Sean a, b, c y d números enteros, con $b, d > 0$. Considere la suma*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d},$$

Transforme cada fracción de la operación dada en una fracción equivalente, de modo que ambos sumandos tengan el mismo denominador. Luego realice la operación dada.

Solución. Pensemos en el MCM entre los denominadores como el producto bd. De este modo,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}\\ &= \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}\\ &= \frac{ad+bc}{bd}.\end{aligned}$$

□

Tenemos que

Proposición 2.4.2. *Sean a, b, c y d números enteros con $b, d > 0$. Se tiene que*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

y

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Observación 2.4.3. Para sumar o restar fracciones que tienen distinto denominador, transformamos una o varias de estas fracciones en una fracción equivalente (según sea necesario), de modo que todas tengan denominador común. Posteriormente efectuamos la operación respectiva. Usualmente el denominador común escogido es el MCM entre los denominadores.

2.4.3. Número mixto.

Ejercicio 2.4.9. *Cuatro muchachos aventureros se aprestan a realizar un trekking en el Parque Nacional Radal Siete Tazas. Desean repartir en forma equitativa los 11 litros de agua que poseen en algunos bidones. Si el grupo posee en una caja varias cantimploras de 1 litro de capacidad ¿Cuántas cantimploras le corresponden a cada uno?*

Solución. Hacemos

$$11 \div 4$$

cuyo cuociente es 2, y cuyo resto es 3. Note que, en general cuando dividimos dos números naturales, en la forma

$$\text{dividendo} \div \text{divisor}$$

entonces

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cuociente} + \text{resto}.$$

De este modo, dividiendo cada término de la igualdad anterior por el dividendo, deducimos que

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cuociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

En nuestro caso particular, esto es

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}.$$

Así, a cada muchacho le tocan 2 litros y $\frac{3}{4}$ de litro de agua, por lo que cada uno debe ocupar 3 cantímploras.

Observación 2.4.4. La igualdad

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \tag{2.4.6}$$

la podemos interpretar como que $\frac{11}{4}$ corresponde a 2 enteros y $\frac{3}{4}$. Otra forma de expresar (**??**), es

$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}. \tag{2.4.7}$$

En el caso de (**??**), decimos que $\frac{11}{4}$ está expresado como **número mixto**, donde la **parte entera** corresponde a 2, y la **parte fraccionaria** a $\frac{3}{4}$. En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.4.3. *Sean a y b números naturales, con $a > b$. Si al realizar la división*

$$a \div b$$

obtenemos cuociente c y resto r, entonces la fracción $\dfrac{a}{b}$ puede ser expresada como

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b},$$

lo cual se denota como

$$\frac{a}{b} = c\frac{r}{b}. \tag{2.4.8}$$

*La expresión del miembro derecho de (**??**), se denomina **número mixto**. Más aún c se denomina **parte entera**, y $\frac{r}{b}$ se denomina **parte fraccionaria** del número mixto.*

Ejercicio 2.4.10. *¿A qué número mixto corresponde la fracción* $\frac{15}{6}$*?*

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: Hacemos la división $15 \div 6$, obteniendo cuociente 2 y resto 3. De este modo,
$$\frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}.$$
- Segunda forma: Expresamos el numerador 15 como suma de su múltiplo de 6 más "cercano" y menor que él, con otro número natural. Es decir,
$$\frac{15}{6} = \frac{12+3}{6}.$$
Separamos la fracción del miembro izquierdo en dos fracciones, quedando
$$\frac{15}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2.4.11. *¿A qué fracción corresponde el número mixto* $5\frac{2}{3}$*?*

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: El número mixto corresponde a
$$5 + \frac{2}{3}.$$
De este modo,
$$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}.$$
- Segunda forma: Si vemos la fracción a obtener como una división, entonces de la definición de número mixto deducimos que el divisor es 3, el cuociente es 5, y el resto es 2. De este modo, el dividendo es $5 \cdot 3 + 2 = 17$. Por lo tanto, la división asociada es
$$17 \div 3$$
y la fracción es $\frac{17}{3}$. Observando el número mixto, vemos que el numerador de nuestra fracción se puede obtener multiplicando la parte entera 5, por el denominador de la parte fraccionaria 3, y a lo obtenido sumándole el numerador de la parte fraccionaria, es decir 2.

Observación 2.4.5. En general, si c, r, b son números naturales, entonces el número mixto

$$c\frac{r}{b}$$

corresponde a

$$c + \frac{r}{b} = \frac{cb}{b} + \frac{r}{b},$$

es decir a la fracción

$$\frac{cb + r}{b}.$$

O sea, el numerador de nuestra fracción, lo obtenemos multiplicando la parte entera por el denominador de la parte fraccionaria, y a eso le sumamos el numerador de la parte fraccionaria. El denominador, corresponde simplemente al denominador de la parte fraccionaria del número mixto.

Ejercicio 2.4.12. *En un restorán, un grupo de 3 amigos piden una cierta cantidad de quesadillas. Luego que el mesero les trajó la bandeja con quesadillas, éstos las repartieron equitativamente, quedando* $4\frac{2}{3}$ *para cada uno. ¿Cuántas quesadillas trajó el mesero?*

Solución. Lo resolvemos de dos formas:

- Primera forma: Vemos que la cantidad de quesadillas por persona corresponde a $4 + \frac{2}{3}$. De este modo, como son 3 amigos, la cantidad total de quesadillas es

$$3 \cdot \left(4 + \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 12 + 2 = 14.$$

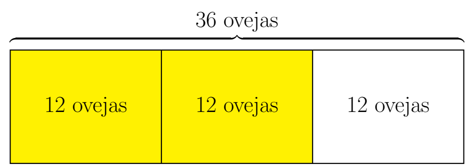
- Segunda forma: Expresamos el número mixto $4\frac{2}{3}$ como fracción, la cual es $\frac{14}{3}$. Como las quesadillas están repartidas entre 3 amigos, entonces concluimos que éstas son 14.

2.4.4. Fracción de una cantidad fija.

Ejercicio 2.4.13. *Don José tiene 36 ovejas. Debido a problemas económicos, decide vender $\frac{2}{3}$ de su rebaño. ¿Cuántas ovejas vendió?*

Solución. Calculamos los $\frac{2}{3}$ de 36. Para ello, dividimos las 36 ovejas en 3 grupos

de los cuales tomamos sólo 2:



De este modo, Don José vendió 24 ovejas. □

Ejercicio 2.4.14. *Calcule:*

a) *los $\frac{5}{7}$ de 56*

Solución. Resumimos lo hecho en el ejercicio anterior. Dividimos 56 en 7 grupos. Como

$$56 \div 7 = 8,$$

entonces cada grupo es de 8 unidades. Como necesitamos 5 de tales grupos, hacemos

$$5 \cdot 8 = 40,$$

de donde deducimos que los $\frac{5}{7}$ de 56 corresponden a 40 unidades. □

b) *los $\frac{7}{4}$ de 48*

Solución. Dividimos 48 en 4 partes, obteniendo que cada parte es de 12 unidades. Si consideramos 7 de esas partes, obtenemos que $\frac{7}{4}$ de 48 es 84. □

d) *los* $\frac{5}{6}$ *de 144*

Solución. Esta cantidad, así como también las de los ejercicios anteriores, se puede calcular simplemente realizando

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}\cdot 144 &= \frac{5\cdot 144}{6}\\ &= 120.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.4.4. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Se tiene los* $\frac{a}{b}$ *de* c *corresponden a*

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b}.$$

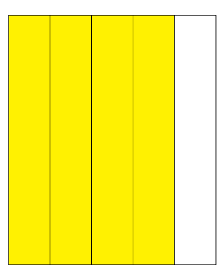
2.4.5. Multiplicación de fracciones.

Ejercicio 2.4.15. *Don José ha realizado una plantación de lechugas en las* $\frac{4}{5}$ *partes de su terreno. Luego del temporal, sólo permanecieron* $\frac{2}{3}$ *de la plantación de lechugas. ¿Qué fracción del terreno permaneció con lechugas?*

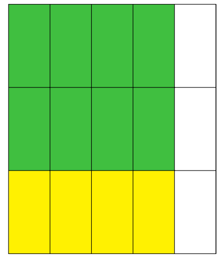
Solución. Deseamos calcular las $\frac{2}{3}$ partes de los $\frac{4}{5}$ del terreno, es decir, debemos calcular

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}.$$

Para tal efecto, usamos un rectángulo que representa el terreno, en el cual achuramos los $\frac{4}{5}$ de éste:



La fracción del terreno que permaneció con lechugas corresponde a $\frac{2}{3}$ de la zona achurada, por lo cual dividimos la zona total en 3 partes, de modo que la zona achurada también se divide en 3 partes, y tomamos sólo dos partes de ésta:



Podemos ver entonces que la zona del terreno que permaneció con lechugas corresponde a $\frac{8}{15}$ del total. O sea,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

$\square$

Definición 2.4.5. *Sean a, b, c, d números naturales. Se tiene que*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Observación 2.4.6. Es decir, al multiplicar dos fracciones, el numerador de la fracción resultante corresponde al producto de los numeradores, y el denominador resultante al producto de los denominadores.

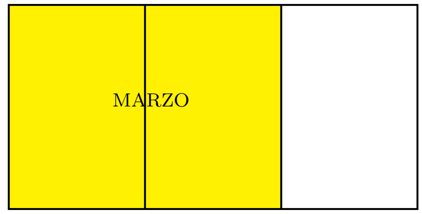
Ejercicio 2.4.16. *Carla desea vender un terreno. Logró venderlo en 3 etapas, del siguiente modo:*

- *En Marzo, vendió $\frac{2}{3}$ del terreno.*
- *En Abril, vendió la cuarta parte de lo que vendió en Marzo.*
- *En Mayo vendió las restantes 3000 hectáreas.*

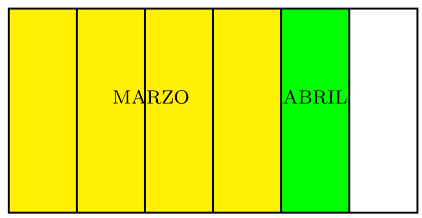
a) *¿Qué fracción del terreno vendió en el período Marzo-Abril?*

Solución. Resolvemos el problema de dos formas:

- Primera forma: Usando un diagrama. Representamos el terreno por un rectángulo, donde la zona achurada corresponde a lo vendido en Marzo:



En Abril vendió la cuarta parte de lo vendido en Marzo, por lo que necesitamos dividir la zona achurada en 4 partes. Para ello dividimos cada tercio en 2 partes, y obtenemos que



Así, lo que se vendió en Abril es $\frac{1}{6}$ del total. De este modo, según el último rectángulo, en el período Marzo-Abril se vendieron $\frac{5}{6}$ del total.

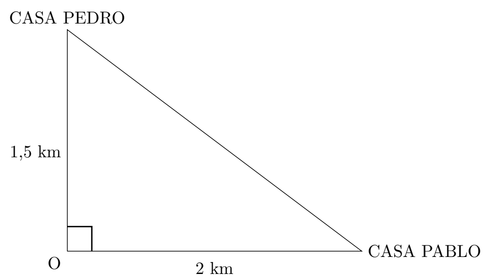
- Segunda forma: Usando operaciones con fracciones. En Abril se vendio $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ del terreno, es decir
$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$
del terreno. Por lo tanto, entre Marzo y Abril se vendieron
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
del terreno.

b) *¿Cuántas hectáreas en total posee el terreno?*

Solución. Según lo obtenido en a), las hectáreas vendidas en Mayo, es decir las restantes 3000 hectáreas, corresponden a $\frac{1}{6}$ del total, por lo que el terreno tiene $3000 \cdot 6 = 18000$ hectáreas. $\square$

Ejercicio 2.4.17. *Para ir de la casa de Pedro a la casa de Pablo, se deben recorrer en línea recta 1 km y medio hacia el sur y luego 2 km hacia el este. Si se construyera una carretera en línea recta que va desde la casa de Pedro a la casa de Pablo, ¿cuánto más corto es el recorrido?*

Solución. Un diagrama de la situación es:



Usamos el Teorema de Pitágoras y, como debemos elevar al cuadrado, es preferible expresar las distancias como fracciones. De este modo, la distancia entre la casa de Pedro y el punto O es de $\frac{3}{2}$ km. Por lo tanto, la longitud d de la nueva carretera es tal que

$$\begin{aligned} d^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 &\Leftrightarrow d^2 = \frac{9}{4} + 4 \\ &\Leftrightarrow d^2 = \frac{9}{4} + \frac{16}{4} \\ &\Leftrightarrow d^2 = \frac{25}{4} \\ &\Leftrightarrow d = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow d = 2,5 \end{aligned}$$

De este modo, la nueva carretera tendría una longitud de $2,5$ km, y como el camino actual es de 3,5 km, entonces el nuevo camino sería 1 km más corto. □

2.4.6. División de fracciones.

Ejercicio 2.4.18. *Realice la división*

$$\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}},$$

amplificando el numerador y el denominador de cada fracción siguiente por el inverso multiplicativo del denominador

Solución. Se tiene que

$$\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}}{1} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2} = \frac{2}{3}.$$

□

Ejercicio 2.4.19. *Sean a, b, c, d números naturales. Considere la división*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}.$$

Realice esta división, amplificando el numerador y el denominador por el inverso multiplicativo del denominador.

Solución. Note que

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

□

De este modo, tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.4.6. *Sean a, b, c, d números naturales. Se tiene que*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c},$$

Observación 2.4.7. Informalmente, para obtener la fracción resultante de dividir dos fracciones, multiplicamos la fracción dividendo por la fracción divisor 'invertida".

Ejercicio 2.4.20. *Una caja de detergente rinde para* 80 *copas de detergente. Si la lavadora de Daniela recomienda* 1 *copa y cuarto de detergente por lavado, ¿cuántos lavados se pueden hacer con una sóla caja?*

Solución. Para obtener la cantidad de lavados, debemos determinar cuántos grupos de 1 copa y $\frac{1}{4}$ se pueden formar con 80 copas de detergente. Luego, como $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, para obtener la cantidad de lavados, dividimos 80 entre $\frac{5}{4}$, obteniendo

$$\frac{80}{\frac{5}{4}} = 80 \cdot \frac{4}{5} = 64.$$

De este modo, con una sóla caja se pueden hacer 64 lavados. □

2.4.7. Porcentajes.

Ejercicio 2.4.21. *En una encuesta realizada en la ciudad de Concepción para analizar la gestión de la alcaldía anterior, el* 40 % *de los encuestados declaró estar conforme con la gestión y el* 45 % *declaró estar disconforme. Si la encuesta fue respondida por 50000 personas ¿cuántas personas están conformes y cuántas disconformes con la gestión del alcalde?*

Solución. Se tiene que:

- Calculemos la cantidad de personas conformes. Para ello, necesitamos determinar

  $$\text{el } 40\,\% \text{ de } 50000.$$

  Esto es equivalente a calcular

  $$\text{los } \frac{40}{100} \text{ de } 50000.$$

  Como esta cantidad corresponde a

  $$\frac{40}{100} \cdot 50000 = 20000,$$

  entonces las personas conformes corresponden a 20000 encuestados.

- Calculemos la cantidad de personas disconformes. Para ello, necesitamos determinar

$$\text{el } 45\,\% \text{ de } 50000.$$

Esto es equivalente a calcular

$$\text{los } \frac{45}{100} \text{ de } 50000.$$

De este modo, como

$$\frac{45}{100} \cdot 50000 = 22500,$$

entonces las personas disconformes corresponden a 22500 encuestados.

$\square$

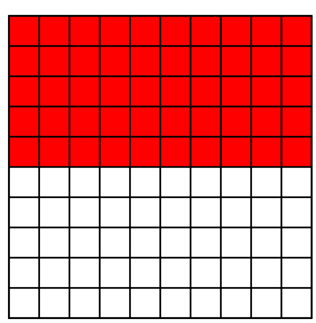
Definición 2.4.7. *Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. El* ***porcentaje*** *$a\,\%$ corresponde a la fracción*

$$a\,\% = \frac{a}{100}.$$

Observación 2.4.8. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. De la definición se desprende que, si queremos calcular el $a\,\%$ de una cantidad c, entonces calculamos los $\frac{a}{100}$ de c.

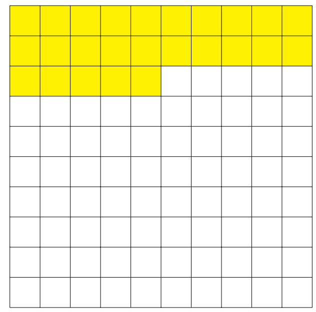
Algunos porcentajes importantes:

- El 50 % de una cantidad, corresponde a los $\frac{50}{100}$ de ésta, o sea a su mitad:



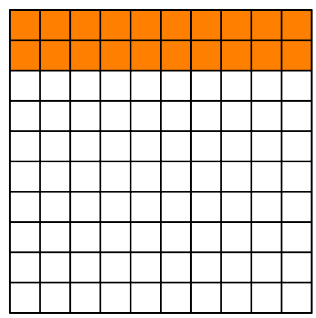
Por ejemplo, el 50 % de 3000 es 1500.

- El 25 % de una cantidad, corresponde a los $\frac{25}{100}$ de ésta, es decir, a su cuarta parte:



Por ejemplo, el 25 % de 120 es 30.

- El 20 % de una cantidad, corresponde a $\frac{20}{100}$ de esta, es decir, a su quinta parte:



Por ejemplo el 20 % de 80 es 16.

Ejercicio 2.4.22. *Calcule:*

a) *el* 75 % *de 72.*

Solución. Se tiene que:

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{x}{72} = \frac{75}{100},$$

de donde $x = 54$.

- Segunda forma: 75 % corresponde a las $\frac{3}{4}$ partes de 72, es decir, a

$$\frac{3}{4} \cdot 72 = 54.$$

- Tercera forma: Como $75\,\% = 50\,\% + 25\,\%$, la cantidad buscada es la mitad más la mitad de la mitad de 72, es decir $36 + 18 = 54$.

b) *el* $60\,\%$ *de 200.*

Solución. Se tiene que

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{x}{200} = \frac{60}{100},$$

  de donde $x = 120$.

- Segunda forma: El $10\,\%$ de 200 es 20, por lo que el $60\,\%$ de 200 es $6 \cdot 20 = 120$.

c) *el* $16\,\%$ *de 300.*

Solución. Note que el $1\,\%$ de 300 es 3, por lo que el $16\,\%$ es $16 \cdot 3 = 48$.

d) *el* $20\,\%$ *del* $80\,\%$ *de 300.*

Solución. Calculamos primero el $80\,\%$ de 300. Como el $10\,\%$ de 300 es 30, entonces su $80\,\%$ es $8 \cdot 30 = 240$.

Calculamos ahora el $20\,\%$ de 240. Como el $10\,\%$ de 240 es 24, entonces su $20\,\%$ es $2 \cdot 24 = 48$. Por lo tanto, el $20\,\%$ del $80\,\%$ de 300 es 48.

e) *qué porcentaje es 48 de 80.*

Solución. Se tiene que

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{48}{80} = \frac{x}{100},$$

  de la cual $x = 60$, por lo que 48 corresponde al $60\,\%$ de 80.

- Segunda forma: Transformamos la fracción $\frac{48}{80}$ en una fracción de denominador 100. En efecto,

$$\frac{48}{80} = \frac{8 \cdot 6}{8 \cdot 10} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\,\%,$$

por lo que 48 corresponde al 60 % de 80.

- Tercera forma: Transformamos la fracción $\frac{48}{80}$ a número decimal. Se tiene que

$$\frac{48}{80} = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

Como 0,6 es el 60 % de 1, entonces 48 corresponde al 60 % de 80. □

f) *de cual número 12 es el* 40 %.

Solución. Se tiene que

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{12}{x} = \frac{40}{100},$$

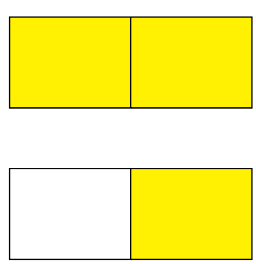
de donde $x = 30$, por lo que 12 es el 40 % de 30.

- Segunda forma: Note que como 12 es el 40 % del número buscado, entonces 3 es el 10 %. De este modo el 100 %, y en definitiva el número buscado, es $10 \cdot 3 = 30$.

□

Ejercicio 2.4.23. *En la panadería de Doña Irene hoy cuelga un cartel de venta de marraquetas, el cual dice "Lleve 2 y pague* 1 *marraqueta y media". Al comprar dos marraquetas, ¿qué porcentaje de descuento se obtiene?*

Solución. Representamos el problema con dos rectángulos



los cuales representan las marraquetas, y la zona pintada representa lo que se pagó. En esta representación, se muestra que el descuento corresponde a la cuarta parte de las dos marraquetas, es decir al 25 %. □

Ejercicio 2.4.24. *Marcelo ha decidido comprar un libro por Internet, el cual cuesta* \$60000. *Por comprarlo con la tarjeta de crédito de su banco, recibe un descuento de un* 20 %. *Sin embargo, por costos de envío debe pagar un* 15 % *adicional. ¿Qué es mejor calcular primero, el descuento o el cargo adicional?*

Solución. Se tiene que

- Calculemos primero el descuento. Note que si se descuenta el 20 %, el nuevo precio corresponde al 80 % del precio original. Como el 10 % de 60000 es 6000, entonces el 80 % es 48000.

  Calculamos ahora el cargo adicional. Como el 10 % de 48000 es 4800, y el 5 % es 2400, entonces su 15 % es
  $$4800 + 2400 = 7200.$$
  De este modo, el precio a cancelar es
  $$\$48000 + \$7200 = \$55200.$$

- Calculamos primero el cargo adicional. Como el 10 % de 60000 es 6000 y el 5 % es 3000, entonces el 15 % de 60000 es 9000, por lo que el precio queda inicialmente en \$69000.

  Calculamos ahora el descuento. Note que el 10 % de 69000 es 6900, por lo que su 20 % es 13800. De este modo, el precio a cancelar es
  $$\$69000 - \$13800 = \$55200.$$

Es decir, no importa el orden en el que calculemos el descuento y el cargo adicional, dado que el precio a cancelar será el mismo. □

Ejercicio 2.4.25. *En una tienda de ropa, Andrea se compra una chaqueta cuyo precio está con el* 10 % *de descuento. Al comprarlo con su tarjeta de crédito, recibe de parte de su banco otro* 10 % *de descuento, ahora sobre el nuevo precio. Si el precio original es de* \$80000*,*

a) *¿Cuánto debe pagar Andrea?*

Solución. Note que el 10 % de 80000 es 8000. Por lo tanto, el primer descuento es de \$8000 y de este modo, el precio queda en \$72000. Realizamos un nuevo descuento, ahora correspondiente al 10 % de 72000, el cual es 7200. De este modo, el precio final, luego de realizado ambos descuentos, es de \$64800. □

b) *¿Es correcto afirmar que el descuento total corresponde a un* 20 % *del precio original?*

Solución. El descuento total corresponde a

$$\$8000 + \$7200 = \$15200.$$

Por otro lado, el 20 % del precio original es \$16000, por lo que no es correcta la afirmación. □

2.5. Números irracionales.

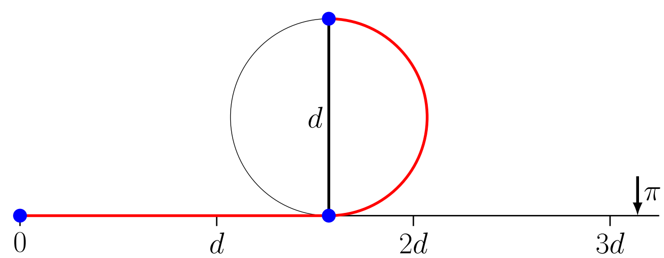
Definición 2.5.1. *Llamamos conjunto de los* ***números irracionales****, el cual denotamos por* $\mathbb{I}$*, al conjunto compuesto por todos aquellos números decimales que no pueden ser expresados como una fracción de dos números enteros.*

De lo visto en la sección de números racionales, concluimos que los números irracionales corresponden a decimales infinitos no periódicos ni semiperiódicos. Es decir, los números irracionales corresponden a números decimales que tienen infinitas cifras decimales, en la cual no se repite un patrón de cifras.

El número π es tal vez el más conocido de todos los números irracionales. Su valor, considerando sus primeras cifras decimales es

$$\pi = 3{,}141589\ldots$$

Consideremos una circunferencia de diámetro d, la cual fue formada por una cuerda atada en sus extremos. Al deslizar la circunferencia por una superficie plana, de modo que la cuerda se va desatando, entonces se aprecia que la longitud de la cuerda es aproximadamente $3,14$ veces su diámetro, tal como se observa en la figura:



Para ser más precisos, la longitud de la cuerda es π veces el diámetro de la circunferencia. De acá se deduce, que el perímetro P de una circunferencia de diámetro d es

$$P = \pi \cdot d.$$

Como d es 2 veces el radio r, entonces se deduce que

$$P = 2\pi r.$$

Planteamos la siguiente situación:

Ejercicio 2.5.1. *En la antiguedad se pensaba que la tierra era plana. En particular, Anaximandro pensaba que la Tierra era plana y circular. Bajo esta perspectiva, si un individuo se ubicará en el centro de la Tierra plana y circular, e iniciará un recorrido en línea recta. ¿Cuántos kms podría recorrer como máximo, de modo de no caerse al espacio? Use calculadora.*

Solución. Debemos determinar el radio de la tierra plana y circular. Primero calcularemos el área de la Tierra plana y circular, que es la misma área de la Tierra esférica real. Dado que el área de una esfera de radio r viene dada por

$$S = 4\pi r^2$$

y el radio de la Tierra es de 6371 km, entonces el área de la Tierra es

$$S = 4\pi \cdot 6371^2 = 510{,}1 \text{ millones de } kms^2.$$

De este modo, como el área de un circulo de radio r es

$$A = \pi r^2,$$

entonces

$$\pi r^2 = 510{,}1 \text{ millones de } kms^2$$

por lo que

$$r = \sqrt{\frac{510{,}1 \text{ millones}}{\pi}} = 12742 \ kms.$$

Es decir, el individuo debería recorrer no más de 12742 kms, de lo contrario se caería al espacio. □

Otro conocido número irracional es el número e, el cual, considerando sus primeras cifras decimales, corresponde a

$$e = 2{,}71828\ldots$$

El número e tiene aplicaciones en Economía y en fénomenos de crecimiento exponencial, temas que abordaremos más adelante en este libro. Por ahora, podemos considerar el siguiente problema, llamado el "problema de los sombreros":

Ejercicio 2.5.2. *A una fiesta asisten* 5 *invitados, cada uno de los cuales lleva un sombrero. El mayordomo de la casa recepciona los sombreros de todos ellos y coloca cada uno en un compartimento, el cual tiene el nombre de cada invitado. Sin embargo, el mayordomo no conoce a ninguno de los invitados ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los sombreros sea colocado en el compartimento correcto?*

Solución. Según la teoría de probabilidades, la probabilidad pedida es

$$P(5) = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{11}{30}.$$

Es decir, la probabilidad porcentual es de un $36.\overline{6}\,\%$. □

Observación 2.5.1. En general, según la teoría de probabilidades, si asisten n invitados a la fiesta, y el mayordomo reparte los n sombreros en n compartimentos con nombre, la probabilidad de que ninguno de los sombreros sea colocado en el compartimento correcto es

$$P(n) = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Más aún, si la cantidad de invitados es muy grande, es decir si n crece hacia $+\infty$, entonces se puede probar que $P(n)$ se acerca a $\frac{1}{e} \approx 0{,}3678$. Esto quiere decir que la probabilidad porcentual de que el suceso mencionado ocurra, es de aproximadamente $36{,}78\,\%$.

2.6. Potencias.

2.6.1. Potencia de exponente natural.

Consideremos la multiplicación

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Aquí el número 2 aparece 4 veces como factor, lo que se denota como 2^4. Es decir,

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Otros ejemplos son

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
- $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.
- $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$.

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.6.1. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la* ***potencia*** *a^n, como la multiplicación de n factores iguales a a. El número a se denomina* ***base*** *y el número n se denomina* ***exponente*** *de la potencia respectiva.*

Observación 2.6.1. Según la definición anterior, la base indica el número que se repite como factor, tantas veces como lo indica el exponente.

Ejercicio 2.6.1. *¿Verdadero o falso? Justifique.*

a) $3^2 = 2^3$.

Solución. Note que $3^2 = 9$ y $2^3 = 8$, por lo que la aseveración es falsa. Este ejercicio muestra que si intercambiamos base y exponente, el resultado no siempre es el mismo.

b) $\left(2^3\right)^2 = 2^{3^2}$.

Solución. Note que

$$\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$$

y

$$2^{3^2} = 2^9 = 512,$$

por lo que la proposición dada es falsa.

c) $(2^3)^2 = 2^6$.

Solución. Tenemos que $(2^3)^2 = 8^2 = 64$ y $2^6 = 64$, por lo que la aseveración es verdadera.

d) $2^3 + 2^4 = 2^7$.

Solución. Notamos que

$$2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24,$$

y $2^7 = 128$, por lo que la aseveración es falsa. Este ejercicio muestra que si tenemos una suma de potencias de igual base, no es válido conservar la base y sumar los exponentes.

e) $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$.

Solución. Se tiene que

$$2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128 = 2^7,$$

por lo que nuestra proposición es verdadera.

f) $\dfrac{2^6}{2^3} = 2^2$.

Solución. Note que

$$\frac{2^6}{2^3} = \frac{64}{8} = 8$$

y $2^2 = 4$. Así, la aseveración es falsa. Este ejercicio muestra que si dividimos potencias de igual base, no es siempre lo mismo que conservar la base y dividir los exponentes.

g) $\dfrac{2^6}{2^3} = 2^3$.

Solución. Se tiene que

$$\frac{2^6}{2^3} = \frac{64}{8} = 8 = 2^3,$$

por lo que afirmación es verdadera.

h) $4^2 \cdot 3^2 = 12^2$.

Solución. Note que

$$4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144 = 12^2,$$

de lo que concluimos que la aseveración es verdadera.

i) $\dfrac{12^2}{4^2} = 3^2$.

Solución. Note que
$$\frac{12^2}{4^2} = \frac{144}{16} = 9 = 3^2,$$
por lo cual la afirmación es verdadera.

j) $\dfrac{3^2}{4} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$.

Solución. Se tiene que
$$\frac{3^2}{4} = \frac{9}{4}$$
y
$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$
Así, nuestra aseveración es falsa. Este ejercicio muestra que cuando queremos escribir la potencia de una fracción, ésta debe ir entre paréntesis, de lo contrario se entiende que se está elevando sólo el numerador.

k) $(-1)^{51} = -1$.

Solución. Tenemos una multiplicación que consiste en la cual -1 aparece 51 veces como factor. Usando asociatividad, formamos 25 parejas de -1, y nos sobra un factor -1. La multiplicación de cada pareja da como resultado 1:

$$\underbrace{\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\ \dots\ \cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}}_{25\ parejas}\cdot(-1)$$

Al multiplicar todos los 1 obtenidos, nos da como resultado de nuevo 1. Multiplicando este 1 por el restante -1, vemos que el resultado final es -1. Por lo tanto, la proposición es verdadera.

l) $-3^2 = (-3)^2$.

Solución. Note que

- $(-3)^2 = -3 \cdot -3 = 9$. Es decir, $(-3)^2$ corresponde al producto de -3 por sí mismo.
- $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$. Es decir, -3^2 corresponde al opuesto aditivo de 3^2.

Por lo tanto, la aseveración es falsa. Este ejercicio muestra que para calcular la potencia de un número negativo, ésta debe ir en paréntesis. $\square$

Ejercicio 2.6.2. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos el producto $a^n \cdot a^m$. Note que*

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{m\ veces}$$

a) *¿Cuántas veces se repite a como factor en el miembro derecho?*

Solución. $n + m$ veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de a corresponde el producto $a^n \cdot a^m$?*

Solución. Se tiene que

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Proposición 2.6.2. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Observación 2.6.2. Es decir, si multiplicamos dos potencias de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes.

Ejercicio 2.6.3. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos el cuociente $\dfrac{a^n}{a^m}$, con $n > m$. Note que*

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}}} = \frac{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)\overbrace{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a})}^{m \text{ veces}}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{m \text{ veces}}}$$

a) *Según esta doble igualdad, luego de realizada la cancelación, ¿cuántas veces se repite a como factor?*

Solución. Dado que inicialmente había n factores a, y luego se cancelaron m de ellos, entonces a queda repetido $n - m$ veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de a corresponde el cuociente $\dfrac{a^n}{a^m}$?*

Solución.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Proposición 2.6.3. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Se tiene que*

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Observación 2.6.3. Es decir, al dividir potencias de igual base, conservamos la base y restamos los exponentes, específicamente, el nuevo exponente corresponde al exponente del numerador menos el exponente del denominador.

Ejercicio 2.6.4. *Sea $a \in \mathbb{R}$ $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos la potencia $(a^n)^m$. Note que*

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}}$$

a) *En el miembro derecho, ¿cuántas veces se repite a como factor?*

Solución. m veces n veces, es decir, mn veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de a corresponde el cuociente $(a^n)^m$?*

Solución. Se tiene que

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

Proposición 2.6.4. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

Observación 2.6.4. Es decir, para calcular la potencia de una potencia, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

Ejercicio 2.6.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el producto $a^n \cdot b^n$. Note que*

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{n\ veces}$$

a) *Si "juntamos" los ab del miembro derecho, ¿cuántas veces se repite ab como factor?*

Solución. n veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de ab corresponde $a^n \cdot b^n$?*

Solución.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

□

Proposición 2.6.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Observación 2.6.5. Es decir, si multiplicamos dos potencias de igual exponente, conservamos el exponente y multiplicamos las bases.

Ejercicio 2.6.6. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*, y* $n \in \mathbb{N}$*. Consideremos el cuociente* $\frac{a^n}{b^n}$*. Note que*

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ veces}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ veces}}$$

a) Si en el miembro derecho, separamos en multiplicación de fracciones, *¿Cuántas veces se repite* $\frac{a}{b}$ *como factor?*

Solución. n veces.

b) *En base a lo respondido en a), a qué potencia de* $\frac{a}{b}$ *corresponde* $\frac{a^n}{b^n}$*?*

Solución.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Proposición 2.6.6. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*, y* $n \in \mathbb{N}$*. Se tiene que*

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Observación 2.6.6. Es decir, si dividimos potencias de igual exponente, conservamos el exponente y dividimos las bases.

Teorema 2.6.7. *(Resumen de propiedades de potencias de exponente natural) Sea* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $m, n \in \mathbb{N}$*. Se tiene que*

1.1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1.2) Si $n > m$ *entonces* $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

1.3) $(a^n)^m = a^{nm}$

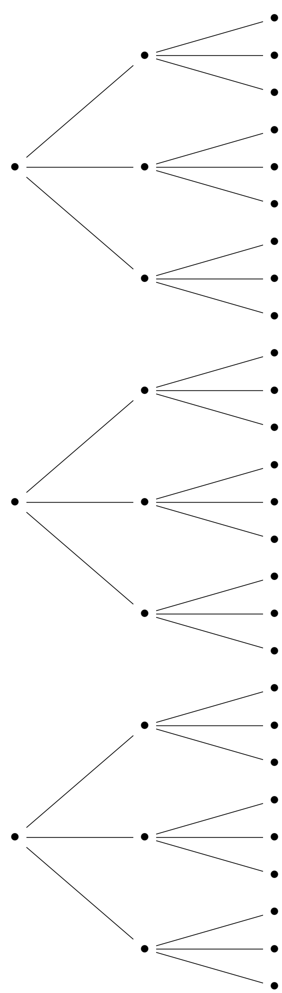
1.4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

1.5) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ *con* $b \neq 0$.

Ejercicio 2.6.7. *Tres hermanos tuvieron durante su vida 3 hijos cada uno. Cada hijo tuvo a su vez 3 hijos. Si la tradición familiar continuó,*

a) *¿Cuántos hijos en total tuvieron los integrantes de la segunda generación?*

Solución. Haciendo un diagrama de árbol,



podemos notar que los integrantes de la segunda generación tuvieron $27 = 3^3$ hijos.

b) *¿Cuántos hijos en total tuvieron los integrantes de la décima generación?*

Solución. Note que según el diagrama de árbol y si continuamos extendiéndolo, tenemos que

- Los integrantes de la generación 1 tuvieron 3^2 hijos.
- Los integrantes de la generación 2 tuvieron 3^3 hijos.
- Los integrantes de la generación 3, tuvieron 3 veces la cantidad de hijos de la generación 2, o sea $3 \cdot 3^3 = 3^4$ hijos.

Concluimos que los integrantes de la generación 10 tuvieron 3^{11} hijos.

c) *¿Cuántos hijos en total tuvieron los integrantes de la n-ésima generación?*

Solución. Dado lo expuesto en b), concluimos que los integrantes de la n-ésima generación tuvieron 3^{n+1} hijos. $\square$

2.6.2. Potencia de exponente cero y potencia de exponente entero.

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Queremos definir a^0. Note que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a^0 = a^{n-n}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.2) de potencias, entonces

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1,$$

luego

$$a^0 = 1.$$

Definición 2.6.8. ***(Definición de potencia de exponente cero:)*** *Si $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$.*

Observación 2.6.7. La expresión 0^0 no está definida, dado que si fuera así, para $n \in \mathbb{N}$

$$0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0},$$

pero la última fracción no está definida.

Observación 2.6.8. Queremos obtener un valor para la potencia 2^{-5}. Note que

$$2^{-5} = 2^{0-5}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.2) de potencias, entonces

$$2^{-5} = 2^{0-5} = \frac{2^0}{2^5}.$$

Como $2^0 = 1$, entonces

$$2^{-5} = 2^{0-5} = \frac{2^0}{2^5} = \frac{1}{2^5}.$$

En general, consideremos $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ y p un número entero y negativo, es decir, $p \in \mathbb{Z}, p < 0$. Queremos definir a^p. Note que

$$a^p = a^{0-p}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.2) de potencias, entonces

$$a^p = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^{-p}}.$$

Como $a^0 = 1$, entonces

$$a^p = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^{-p}} = \frac{1}{a^{-p}}.$$

Note que $-p$ es un número natural.

Definición 2.6.9. ***(Definición de potencia de exponente entero negativo)*** *Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ y $p \in \mathbb{Z},\ p < 0$. Se tiene que*

$$a^p = \frac{1}{a^{-p}}.$$

Observación 2.6.9. Informalmente, el valor de una potencia de exponente entero negativo, corresponde a 1 dividido por la potencia de la misma base, y exponente en el cual sólo cambia su signo, quedando positivo.

Observación 2.6.10. Se puede probar que todas las propiedades, de la 1.1) a la 1.5) de potencias para exponente natural, también siguen siendo válidas si el exponente es un número entero.

Ejercicio 2.6.8. *¿Verdadero o falso?*

a) $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$.

Solución. Notemos que
$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$
por lo que la aseveración es verdadera.

b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^3$.

Solución. Se tiene que
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{8}} = \frac{8}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$
por lo que la aseveración es verdadera.

c) $\dfrac{3}{4^{-2}} = 3 \cdot 4^2$

Solución. Se tiene que
$$\frac{3}{4^{-2}} = \frac{3}{\frac{1}{4^2}} = 3 \cdot 4^2,$$
por lo que la proposición es verdadera. □

Observación 2.6.11. En general, si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $p \in \mathbb{Z}$, entonces
$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{b}{a}\right)^{-p}.$$
Informalmente, la fracción se "invierte" y el exponente cambia de signo.

Observación 2.6.12. En general, si $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, y $p \in \mathbb{Z}$, entonces
$$\frac{a}{b^p} = a \cdot b^{-p}.$$
Informalmente, la potencia del denominador "pasa hacia arriba" multiplicando y con su exponente con signo cambiado.

2.7. Raíz cuadrada y raíz enésima.

Ejercicio 2.7.1. *Complete la siguiente tabla, fila por fila:*

	Número (no negativo)	*Número al cuadrado*
a)	2	
b)	7	
c)	10	

Solución. Al completar la tabla obtenemos

	Número (no negativo)	Número al cuadrado
a)	2	4
b)	7	49
c)	10	100

□

Ejercicio 2.7.2. *Si es posible, complete la siguiente tabla:*

	Número (no negativo)	*Número al cuadrado*
a)		16
b)		144
c)		225
d)		$\frac{9}{4}$
e)		-25

Solución. Al completar la tabla obtenemos

Número (no negativo)	Número al cuadrado
4	16
12	144
15	225
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
No existe	-25

En este caso, decimos que

- la raíz cuadrada de 16 es 4, lo que se denota como $\sqrt{16} = 4$.
- la raíz cuadrada de 144 es 12, lo que se denota como $\sqrt{144} = 12$.
- la raíz cuadrada de 225 es 15, lo que se denota como $\sqrt{225} = 15$.
- la raíz cuadrada de $\frac{9}{4}$ es $\frac{3}{2}$, lo que se denota como $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.
- -25 no tiene raíz cuadrada.

$\square$

Ejercicio 2.7.3. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. En base a los ejemplos mencionados, si la raíz cuadrada de a es b, es decir, si $\sqrt{a} = b$ ¿Cuáles dos condiciones cumple b?*

Solución. Cumple que

- $b^2 = a$.
- $b \geq 0$.

$\square$

En definitiva, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.7.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. Decimos que la **raíz cuadrada** de a es b, lo que se denota como $\sqrt{a} = b$, si*

- $b^2 = a$.
- $b \geq 0$.

Ejercicio 2.7.4. *¿Verdadero o falso? Justifique.*

a) $\sqrt{64} = 8$.

Solución. Como $8^2 = 64$ y $8 \geq 0$, la proposición es verdadera.

b) $\sqrt{\dfrac{400}{121}} = \dfrac{40}{11}$.

Solución. Dado que $\sqrt{\frac{400}{121}} = \frac{20}{11}$, la proposición es falsa.

c) $\sqrt{36} = \pm 6$.

Solución. Por definición, $\sqrt{36}$ es un número no negativo, en este caso, $\sqrt{36} = 6$, por lo que la aseveración es falsa.

d) $\sqrt{-64} = 8$.

Solución. En el contexto de los números reales, está definida sólo la raíz cuadrada de un número $a \geq 0$, y en este caso $a = -64 < 0$. La proposición es falsa.

e) $\sqrt{(-7)^2} = -7$.

Solución. Por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{(-7)^2}$ es un número no negativo. Más específicamente,

$$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

La proposición es falsa.

f) $\sqrt{16}+\sqrt{9}=\sqrt{25}$.

Solución. Note que

$$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$$

y $\sqrt{25}=5$, por lo que la aseveración es falsa. Este ejercicio muestra que la suma de raíces no necesariamente es la raíz de la suma.

g) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{36}$.

Solución. Tenemos que

$$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6=\sqrt{36},$$

por lo que nuestra aseveración es verdadera.

h) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

Solución. Como $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$ la aseveración es verdadera. □

Ejercicio 2.7.5. *Sean $a,b,x,y\geq 0$. Supongamos que $\sqrt{a}=x$ y $\sqrt{b}=y$. De este modo, $x^2=a$ y $y^2=b$.*

a) *¿A qué expresión de a y b corresponde la potencia $(xy)^2$?*

Solución. Se tiene que

$$(xy)^2=x^2y^2=ab.$$

b) *En base a lo obtenido en a), ¿a qué otra expresión de a y b corresponde $\sqrt{ab}$?*

Solución. Como $(xy)^2=ab$, entonces

$$\sqrt{ab}=xy=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Proposición 2.7.2. *Sean $a,b\geq 0$. Se tiene que*

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Observación 2.7.1. Es decir, la raíz del producto es el producto de las raíces.

2.7.1. Simplificación de raíces cuadradas.

Observemos el siguiente ejemplo, en el cual simplificamos $\sqrt{45}$:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

En este caso, hemos simplificado $\sqrt{45}$. Pasando por alto el tercer miembro $\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}$, podríamos decir informalmente que el 9 “sale” de la raíz como su raíz cuadrada, en este caso como 3. En general, simplificar una raíz cuadrada, en forma informal corresponde a

- expresar el número que está “bajo” la raíz como multiplicación.
- “extraer” de la raíz todos los factores que son cuadrados perfectos, cada uno de ellos “sale” de la raíz como su raíz cuadrada.

Formalmente, simplificar una raíz cuadrada es aplicar la proposición 2.7.2 recién vista.
Veamos otro ejemplo. Simplifiquemos $\sqrt{180}$. Hagámoslo de dos formas:

- Primera forma:

$$\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}.$$

- Segunda forma:
  Para alguien pudiera no resultar evidente que $80 = 36 \cdot 5$. Podemos descomponer 80 en potencias de sus factores primos, obteniendo que $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Luego, vemos que
  $$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = (2 \cdot 3)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}.$$
  Es decir, los números que están al cuadrado dentro de la raíz, “salen” de ella sin el cuadrado.

Veamos un último ejemplo. Simplifiquemos $\sqrt{48}$. Hagámoslo de dos formas:

- Primera forma:
$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

- Segunda forma:

  Para alguien pudiera no resultar evidente que $48 = 16 \cdot 3$. Podemos descomponer 48 en potencias de sus factores primos, obteniendo que $48 = 2^4 \cdot 3$. Luego, vemos que
$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

  Es decir, de modo informal, la potencia que está a la cuarta, "sale" de la raíz elevada al cuadrado, es decir, a la mitad de su exponente original.

Ejercicio 2.7.6. *¿Verdadero o falso? Justifique.*

a) $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

Solución. Se tiene que
$$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}.$$

La proposición es verdadera.

b) $\sqrt{405} = 3\sqrt{5}$.

Solución. Dos formas de desarrollarlo:

- Primera forma: $\sqrt{405} = \sqrt{81 \cdot 5} = 9\sqrt{5} \neq 3\sqrt{5}$.
- Segunda forma: Para que se cumpla la igualdad pedida, entonces $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 405$. Sin embargo,
$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2\left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 \cdot 5 = 45.$$

Con cualquiera de las dos formas, vemos que la aseveración es falsa.

c) $\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{75}$.

Solución. Como

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75},$$

la proposición es verdadera.

d) $\left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}\right)^2 \in \mathbb{N}$.

Solución. Note que

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}\right)^2 &= (7 - 2\sqrt{6}) - 2\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + (7 + 2\sqrt{6}) \\
&= 14 - 2\sqrt{(7 + 2\sqrt{6})(7 - 2\sqrt{6})} \\
&= 14 - 2\sqrt{49 - (2\sqrt{6})^2} \\
&= 14 - 2\sqrt{49 - 24} \\
&= 14 - 2\sqrt{25} \\
&= 14 - 10 \\
&= 4,
\end{aligned}$$

por lo que la aseveración es verdadera. $\square$

Ejercicio 2.7.7. *Sean $a, x \geq 0$ y $b, y > 0$. Supongamos que $\sqrt{a} = x$ y $\sqrt{b} = y$. De este modo, $x^2 = a$ y $y^2 = b$.*

a) *¿A qué expresión de a y b corresponde la potencia $\left(\frac{x}{y}\right)^2$?*

Solución. Se tiene que

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{a}{b}.$$

b) *En base a lo obtenido en a), ¿a qué otra expresión de a y b corresponde* $\sqrt{\frac{a}{b}}$*?*

Solución. Como

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{a}{b},$$

entonces

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$\square$

Proposición 2.7.3. *Sea* $a \geq 0$ *y* $b > 0$*. Se tiene que*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Observación 2.7.2. Es decir, la raíz del cuociente es el cuociente de las raíces.

Una utilidad de la propiedad 1.7 es expresar la raíz de un número racional, como fracción de raíces de números enteros:

Ejercicio 2.7.8. *Exprese cada raíz siguiente, como fracción de raíces de números enteros.*

a) $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Solución.

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Solución.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sin embargo, es usual “sacar” la raíz del denominador, para tal efecto:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por lo tanto, concluimos que $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\sqrt{9{,}6}$.

Solución.

$$\sqrt{9{,}6} = \sqrt{\frac{96}{100}} = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{\sqrt{2^5 \cdot 3}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

□

Ejercicio 2.7.9. *Exprese la fracción* $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *sin raíces en el denominador.*

Solución. Multiplicamos la fracción dada por $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, es decir por 1:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

Note que en el denominador queda una suma por su diferencia. De este modo,

$$\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{3-2} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2.$$

Así, desarrollando el cuadrado del binomio, obtenemos que

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

□

Observación 2.7.3. El proceso en el cual se eliminan las raíces del denominador de una fracción, amplificando numerador y denominador por el mismo número, se denomina **racionalización**.

2.7.2. Raíz enésima.

Ejercicio 2.7.10. *Si es posible, complete las siguientes tablas:*

	Número	*Número al cubo*
a)		8
b)		-27
c)		64
d)		$\dfrac{1}{125}$

y

	Número no negativo	*Número a la cuarta*
a)		64
b)		81
c)		-625

Solución. Las tablas completadas son

	Número	Número al cubo
a)	2	8
b)	-3	-27
c)	4	64
d)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{125}$

y

	Número no negativo	Número a la cuarta
a)	2	16
b)	3	81
c)	no existe	-625

De acuerdo a lo obtenido en la primera tabla, decimos que:

- la raíz cúbica de 8 es 2, lo que se denota como $\sqrt[3]{8} = 2$,
- la raíz cúbica de -27 es -3, lo que se denota como $\sqrt[3]{-27} = -3$,

y así sucesivamente.

De acuerdo a lo obtenido en la segunda tabla, decimos que:

- la raíz cuarta de 16 es 2, lo que se denota como $\sqrt[4]{16} = 2$.
- la raíz cuarta de 81 es 3, lo que se denota como $\sqrt[4]{81} = 3$.
- la raíz cuarta de -625, es decir $\sqrt[4]{-625}$, no existe.

$\square$

Ejercicio 2.7.11. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la raíz cúbica de a es b, es decir, $\sqrt[3]{a} = b$ ¿Qué condición debe cumplir b?*

Solución. La única condición que debe satisfacer b, es que $b^3 = a$.

Definición 2.7.4. *Sea $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, n impar. Diremos que la raíz n- ésimade a es b, lo que se denota como $\sqrt[n]{a} = b$, si $b^n = a$.*

Ejercicio 2.7.12. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, tales que la raíz cuarta de a es b, o sea, se cumple que $\sqrt[4]{a} = b$ ¿Cuáles dos condiciones cumple b?*

Solución. Las dos condiciones que cumple b es que

- $b^4 = a$.
- $b \geq 0$.

$\square$

Definición 2.7.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, y $n \in \mathbb{N}, n$ par. Diremos que la **raíz** n- ésima de a es b, lo que se denota como $\sqrt[n]{a} = b$, si*

- $b^n = a$.
- $b \geq 0$.

Proposición 2.7.6. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *(*$a, b \geq 0$*) y* n *es impar (par), entonces*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

es decir, la raíz enésima del producto, corresponde al producto de las raíces enésimas.

Proposición 2.7.7. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ *(*$a \geq 0$ *y* $b > 0$*) y* n *es impar (par), entonces*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

es decir, la raíz enésima de la división, corresponde a la división de las raíces enésimas.

Ejercicio 2.7.13. *¿Verdadero o falso? Justifique.*

a) $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[4]{81}$.

Solución. Note que

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \text{ y } \sqrt[4]{81} = 3,$$

por lo que la aseveración es verdadera.

b) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \sqrt[4]{\frac{625}{16}}$.

Solución. Dado que

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4} \text{ y } \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{5}{2},$$

se concluye que la aseveración es falsa. □

c) $\sqrt[27]{-1} = -1$.

Solución. Como $(-1)^{27} = -1$, entonces la proposición es verdadera.

d) $\sqrt[4]{80} = 2\sqrt[4]{5}$.

Solución. Note que

$$\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = 2\sqrt[4]{5},$$

el último paso debido a la propiedad 1.8 de raíces enésimas, para n par (el 2 "sale hacia fuera" de la raíz como su raíz cuarta). De este modo, la proposición es verdadera.

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Solución. En la fracción $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, intentamos eliminar la raíz cúbica del denominador. Para tal efecto, multiplicamos esta fracción por $\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$, obteniendo que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2},$$

por lo que la aseveración es verdadera.

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{6} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$.

Solución. Intentamos eliminar las raíces cúbicas del denominador, formando una diferencia de cubos en éste. Para tal efecto, multiplicamos la fracción de la izquierda por

$$\frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{6} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{6} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2}.$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{6} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{6} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{6} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{3-2} \\
&= \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 + \sqrt[3]{6} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

por lo que la aseveración es verdadera. □

2.8. Potencia de exponente racional.

Sea a un número real, con $a \geq 0$. Queremos definir la potencia

$$a^{\frac{1}{2}}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.3) de potencias, es decir, la propiedad de la potencia de un potencia, entonces se debe cumplir que

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a.$$

De este modo, definimos $a^{\frac{1}{2}}$ como

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Así, por ejemplo tenemos que

$$4^{\frac{1}{2}} = 2, \ 25^{\frac{1}{2}} = 5, \ \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

En general, si $a \geq 0$ y n es un número natural par, entonces

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Por ejemplo,

$$81^{\frac{1}{4}} = 3 \text{ y } 64^{\frac{1}{6}} = 2.$$

Por otro lado, para $a \in \mathbb{R}$ y $n > 1$ un número natural impar, tenemos también que

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Por ejemplo,

$$27^{\frac{1}{3}} = 3, \text{ y } (-32)^{\frac{1}{5}} = -2.$$

En resumen tenemos la siguiente definición:

Definición 2.8.1. *Sean $a \geq 0$ ($a \in \mathbb{R}$) y $n \in \mathbb{N}$, con n un número par (impar). Se tiene que*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Si $a > 0$, queremos definir la potencia

$$a^{\frac{3}{2}}.$$

Para que se siga cumpliendo la propiedad 1.3) de potencias, la definimos como

$$a^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3,$$

es decir

$$a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3.$$

De este modo, tenemos por ejemplo que

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

En general, si $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, con n un número par y $\frac{m}{n}$ una fracción irreducible, tenemos que

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Por ejemplo

$$81^{\frac{3}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27.$$

Por otro lado, si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ un número impar, y $\frac{m}{n}$ una fracción irreducible, tenemos que

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Por ejemplo,

$$(-125)^{\frac{2}{3}} = \left((-125)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{-125}\right)^2 = (-5)^2 = 25.$$

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.8.2. *Se tiene que*

- *Si $a \geq 0$ ($a \in \mathbb{R}$), $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ con n un número par (impar) y $\frac{m}{n}$ una fracción irreducible. La* ***potencia racional*** *de a se define por*

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

- *Además, $0^{\frac{m}{n}} = 0$, si y sólo si $m \neq 0$, es decir, si el exponente no es cero. Por otro lado, 0^0 no está definido.*

Observación 2.8.1. Según la definición, cuando calculamos una potencia de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, n indica el índice de la raíz que se calcula primero y m indica el exponente al que debe ser elevado tal raíz n-ésima.

Observación 2.8.2. Se puede probar que todas las propiedades 1.1) a 1.5) de potencias para exponente natural, también siguen siendo válidas si el exponente es un número racional.

Observación 2.8.3. Note que el exponente de una potencia racional debe ser una fracción irreducible, dado que si no lo es, pueden ocurrir cosas como que, por un lado

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = (\sqrt[6]{-1})^2,$$

o sea $(-1)^{\frac{2}{6}}$ no estaría definido. Sin embargo, por otro lado

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Ejercicio 2.8.1. *¿Verdadero o falso? justifique.*

a) $36^{\frac{3}{2}} = 216$.

Solución. Note que

$$36^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{36}\right)^3 = 6^3 = 216,$$

por lo que la aseveración es verdadera.

b) $8^{\frac{3}{2}} = 32\sqrt{2}$.

Solución. Note que

$$\begin{aligned} 8^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt{8})^3 \\ &= (2\sqrt{2})^3 \\ &= 2^3(\sqrt{2})^3 \\ &= 8 \cdot 2\sqrt{2} \\ &= 16\sqrt{2}, \end{aligned}$$

por lo cual la aseveración es falsa.

c) $(-1)^{\frac{30}{29}} = 1$.

Solución. Note que

$$(-1)^{\frac{30}{29}} = (\sqrt[29]{-1})^{30} = (-1)^{30} = 1,$$

por lo que la aseveración es verdadera. $\square$

2.9. Notación científica.

La notación científica es una forma abreviada de expresar un número positivo muy grande o muy pequeño, como una multiplicación de la forma

$$a \cdot 10^m$$

con $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq a < 10$, y $m \in \mathbb{Z}$. Es decir, a expresar el número dado, como el producto entre un número real entre 1 y 10, sin incluir al 10, por una potencia entera de 10.

Observación 2.9.1.

Realizemos la multiplicación

$$2,1 \cdot 10^4.$$

Es decir, multiplicaremos $2,1$ por 10000, o sea 10 mil veces $2,1$. Note que

- 10 veces 2,1 es 21.
- 100 veces 2,1 es 10 veces 21, es decir 210.
- 1000 veces 2,1 es 10 veces 210, es decir 2100.
- 10000 veces 2,1 es 10 veces 2100, es decir 21000.

De este modo,

$$2,1 \cdot 10^4 = 21000.$$

Luego de ver el resultado de esta multiplicación, podemos interpretarlo como que la coma del $2,1 = 2,100000\ldots$ se "corrió" hacia la derecha 4 veces, obteniendo 210000. Bajo esta lógica,

$$4,3 \cdot 10^5 = 4,3000000\ldots \cdot 10^5 = 430000,$$

lo cual se puede comprobar por ejemplo usando calculadora. En general, para realizar la multiplicación entre un número decimal a, $1 \leq a < 10$ y una potencia de 10 de exponente natural, podemos "correr" la coma de a hacia la derecha tantas veces como lo indique el exponente.

Observación 2.9.2. Realizamos ahora la multiplicación

$$4,1 \cdot 10^{-2},$$

la cual se refiere a la división

$$\frac{4,1}{10^2},$$

o sea $4,1$ dividido en 100 partes. Podemos ver que

$$\frac{4,1}{10^2} = \frac{\frac{41}{10}}{100} = \frac{41}{1000}.$$

Realizamos ahora la división $\frac{41}{1000}$. Si dividimos

- 41 en 10 partes, obtenemos $4,1$.
- 41 en 100 partes, es lo mismo que dividir $4,1$ en 10 partes, o sea $0,41$.
- 41 en 1000 partes, es lo mismo que dividir $0,41$ en 10 partes, o sea $0,041$.

De este modo,

$$4,1 \cdot 10^{-2} = 0,041.$$

Luego de ver el resultado de esta multiplicación, podemos ver que para obtenerla, tomamos $4,1 = \ldots 000004,1$ y “corremos” la coma hacia la izquierda 2 veces para obtener $0,041$. Bajo esta lógica

$$2,35 \cdot 10^{-5} = \ldots 0000002,35 \cdot 10^{-5} = 0,0000235,$$

lo cual puede ser comprobado por ejemplo usando calculadora. En general, para realizar la multiplicación entre un número a, $1 \leq a < 10$ y una potencia de 10 de exponente entero negativo, podemos “correr” la coma de a hacia la izquierda tantas veces como lo indique el valor absoluto del exponente.

Veamos ahora como expresar un número en notación científica

Ejercicio 2.9.1. *Exprese en notación científica*

a) *490 millones.*

Solución. El número es

$$490000000.$$

Reconocemos que a debe ser $4,9$ o sea

$$a = 4,90000\ldots \tag{2.9.1}$$

En virtud de lo mencionado en la observación, "corremos" la coma en (**??**) hacia la derecha las veces necesarias hasta obtener el número original 49000000. Como la coma se "corrió" 8 veces hacia la derecha, entonces para obtener 49000000 debo multiplicar $4,9$ por 10^8, luego

$$490000000 = 4,9 \cdot 10^8.$$

b) *0,000005.*

Solución. En este caso, $a = 5$ o

$$a = \ldots 00005,0 \tag{2.9.2}$$

En virtud de la observación dada, en (**??**), se debe "correr" la coma hacia la izquierda las veces necesarias hasta obtener el número original $0,000005$. Como la coma se "corre" 6 veces hasta obtener el número original, entonces 5 se debe multiplicar por 10^{-6} para obtener $0,000005$, o sea

$$0,000005 = 5 \cdot 10^{-6}.$$

c) *0,000000107.*

Solución. En este caso, $a = 1,07$ (en cualquier caso, para determinar a consideramos de izquierda a derecha todas las cifras que no son cero, incluyendo los 0 que estén entre tales cifras. En el caso de este ejercicio, tales cifras son 107, de donde obtenemos que $a = 1,07$). De este modo, a partir de $\ldots 0000001,07\ldots$, debemos correr 7 veces la coma hacia la izquierda para obtener el número original $0,000000107$. Así,

$$0,000000107 = 1,07 \cdot 10^{-7}.$$

Veamos algunas aplicaciones:

Ejercicio 2.9.2. *La velocidad de la luz es de 300 millones de metros por segundo. El record del atleta Usaint Bolt en los 100 metros planos, es de* 9,58 *segundos.*

a) *Exprese en notación cíentifica la velocidad de la luz, y la velocidad de Usain Bolt, en* $\frac{m}{s}$. *Use el dato* $\frac{100}{9{,}58} = 10,43$.

Solución. La velocidad de la luz corresponde a

$$300000000\frac{m}{s} = 3 \cdot 10^8\frac{m}{s}.$$

Por otro lado, Usaint Bolt recorre

$$\frac{100}{9{,}58} = 10,43 \text{ metros en 1 segundo}$$

O sea, tiene una velocidad

$$10,43\frac{m}{s} = 1,043 \cdot 10^1\frac{m}{s}.$$

b) *¿A cuántas veces la velocidad de la luz corresponde la velocidad de Usaint Bolt?* Dato: Use la aproximación $\frac{3}{1,043} = 2,87$.

Solución. Hacemos el cuociente entre la velocidad de la luz y la velocidad de Usain Bolt, de lo cual deducimos que:

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot 10^8}{1,043 \cdot 10^1} &= \frac{3}{1,043} \cdot 10^7 \\ &= 2,87 \cdot 10^7 \\ &= 28700000.\end{aligned}$$

Así, la velocidad de la luz corresponde a 28,7 millones de veces la velocidad de Bolt. □

Ejercicio 2.9.3. *La masa de la Luna es* $7{,}349 \cdot 10^{22}$ *kilos y la masa de la Tierra es* $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ *kilos ¿Cuántas veces la masa de la Tierra es la masa de la Luna?*
Dato: Use la aproximación $\frac{5{,}9736}{7{,}349} = 0{,}81$.

Solución. Hacemos

$$\frac{\text{masa de la Tierra}}{\text{masa de la Luna}} = \frac{5{,}9736 \cdot 10^{24}}{7{,}349 \cdot 10^{22}} = 0{,}81 \cdot 10^2 = 81,$$

por lo que concluimos que la masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna. De este modo, si la Tierra y la Luna fueran dos esferas pequeñas acá en la Tierra y quisieramos levantar cada astro con nuestras manos, para levantar la Tierra necesitaríamos 81 veces la fuerza con la que levantaríamos la Luna. □

Ejercicio 2.9.4. *El volumen del sol es de* $1,4123 \cdot 10^{18}$ km^3 *y el volumen de la Tierra es de* $1{,}08321 \cdot 10^{12}$ km^3 *(entendiéndose el volumen como la cantidad de espacio que ocupa cada cuerpo celeste) ¿Cuántas veces el volumen de la Tierra es el volumen del Sol?*
Dato: Use la aproximación $\frac{1{,}4123}{1{,}08321} = 1{,}3$.

Solución. Hacemos

$$\frac{\text{volumen del Sol}}{\text{volumen de la Tierra}} = \frac{1,4123 \cdot 10^{18}}{1{,}08321 \cdot 10^{12}} = 1{,}3 \cdot 10^6 = 1300000.$$

De este modo, la cantidad de espacio que ocupa el Sol, es 1,3 millones de veces el que ocupa la Tierra. □

2.10. Ejercicios propuestos.

1. Un supermercado tiene 62 trabajadores. Hay 14 hombres menos que mujeres. Si 22 de las mujeres son cajeras ¿cuántas mujeres no trabajan como cajeras?

2. Se jugó la final del torneo de volleybol de un liceo, entre el equipo azul y el equipo blanco. Había el doble de hinchas del equipo azul que del equipo blanco, y el triple de hinchas neutrales que del equipo blanco. Si el público asistente fue de 360 personas ¿cuántos hinchas azules, blancos y neutrales habían?

3. Tres niños completaron el álbum del Mundial de Rusia. Cristóbal aportó la mitad de las láminas que aportó Diego y Felipe 30 láminas más que lo que juntaron Cristóbal y Diego juntos. Si el álbum era de 450 láminas, ¿cuántas láminas aportó cada uno?

4. José nació en el año 45 AC. Determine

   4.1) usando la recta numérica

   4.2) usando operaciones aritméticas

   a) el año en que nació una persona que es 40 años mayor que José.

   b) el año en que nació una persona que es 30 años menor que José.

   c) la edad de José en el año 25 DC.

   d) el año en el que José cumplió 27 años.

   e) el año en el que José cumplió 48 años.

   f) la edad que tenía su padre cuando nació José, si éste nació en el año 77 AC.

   g) los años que transcurrieron desde que nació su madre, en el año 68 AC., hasta el nacimiento de José.

5. Nancy vive en el piso 10 de un edificio. Determine

   5.1) usando la recta númerica.

   5.2) usando operaciones aritméticas.

   a) la cantidad de pisos que debe bajar para ir a la bodega principal, la cual está en el piso -4.

   b) la cantidad de pisos que debe subir para ir desde la lavandería, la cual está en el piso -3, hasta su departamento.

   c) el piso en el que está el primer estacionamiento, si para ir desde su departamento hasta allá bajó 12 pisos.

   d) el piso donde vive su amiga Daniela, si desde la lavandería hasta su departamento subió 7 pisos.

6. Don Ramón tiene una cuenta corriente en un conocido banco chileno. Está sin trabajo, por lo que ha recurrido a gastar dinero del cupo de su cuenta. En el estado del cuenta del mes venidero, aparece que su saldo es de $-\$144000$. Si con sus ahorros, realiza el pago de \$78000 ¿de cuánto es su saldo ahora?

7. Los primeros juegos olímpicos de la antigua Grecia fueron realizados en el año 776 *AC*.

   a) ¿Hace cuántos años fueron realizados?

   b) Los últimos juegos olímpicos de la antigua Grecia fueron realizados 383 años después de efectuados los primeros. ¿En qué año se realizaron?

   c) Los primeros juegos olímpicos de la era moderna fueron realizados en 1896. ¿Cuántos años pasaron desde los últimos juegos olímpicos de la Antigua Grecia hasta los primeros de la era moderna?

8. Desde que nació Abraham, en el año 25 AC. su familia realizaba encuentros cada 4 años. ¿Cuántos encuentros se realizaron desde que nació Abraham, hasta su

fallecimiento en el año 45 D.C.? ¿Cuántos años pasaron desde el último encuentro en el que estuvo Abraham hasta su fallecimiento?

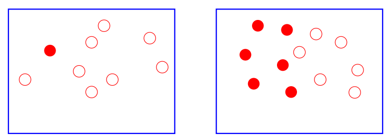
9. Grafique:

    a) $\frac{3}{5}$ de la mitad de una cantidad.

    b) La mitad de los $\frac{3}{5}$ de una cantidad.

    ¿Qué fracción del total queda en cada caso?

10. Considere las siguientes cajas con bolitas blancas y negras:



    a) ¿Cuántas bolitas negras hay que agregar en la caja de la izquierda, para que la fracción de bolitas negras en esta caja sea $\frac{1}{3}$ del total de esta caja?

    b) ¿Cuántas bolitas negras hay que quitar de la caja de la derecha, para que la fracción de bolitas negras en esta caja sea $\frac{1}{3}$ del total de esta caja?

    c) ¿Cuántas bolitas negras hay que agregar en la caja de la izquierda, para que la fracción de bolitas negras en las dos cajas, sea de $\frac{1}{3}$ del total de las dos cajas?

11. Juanita usó $\frac{2}{5}$ de una botella con aceite, los cuales corresponden a 100 ml de ésta ¿Cuánto aceite tenía la botella?

12. En una clase, $\frac{3}{4}$ son niñas. Si hay 8 niños ¿cuántos estudiantes hay en total?

13. Juan tenía 400 llaveros, $\frac{5}{8}$ tenía dibujado un cóndor y el resto tenía dibujado un huemul. Le dió $\frac{1}{5}$ de los llaveros con cóndor a un amigo. ¿Cuántos llaveros le quedaron? ¿A qué fracción del total corresponden los llaveros que le quedaron?

14. Ordene las siguientes fracciones de menor a mayor

a) $\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{5}{6}$ y $\dfrac{9}{14}$

c) $\dfrac{7}{20}, \dfrac{3}{10}$ y $\dfrac{2}{5}$

15. En cada operación siguiente, transforme cada fracción en una fracción equivalente, de modo que el denominador común sea el MCM entre los denominadores. Luego realice la operación.

a) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}$

c) $\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{9}$

d) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}$

e) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}$

f) $\dfrac{9}{8}-\dfrac{5}{12}$

g) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{6}$

h) $\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{10}$

16. Realice cada operación siguiente

a) $\dfrac{72}{25}\cdot\dfrac{75}{8}$

b) $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{9}{10}$

c) $\dfrac{36}{75}\cdot\dfrac{15}{24}$

d) $\dfrac{40}{\frac{3}{2}}$

e) $\dfrac{\frac{2}{3}}{2}$

f) $\dfrac{\frac{15}{9}}{\frac{5}{6}}$

17. Un pintor mezcla $\frac{1}{4}$ de litro de pintura amarilla con $\frac{1}{6}$ de litro de pintura roja.

a) ¿La mezcla es más amarillenta o más rojiza?

b) Si el pintor colocara la mezcla en un envase de $\frac{3}{8}$ de litro ¿se derramaría pintura?

c) Si el pintor colocara la mezcla en un envase de 2 litros ¿qué fracción del envase quedaría sin pintura?

18. Un auto de delincuentes va arrancando de la policía, con una rapidez de 33 $\frac{m}{seg}$. El auto toma una peligrosa curva, por lo que frena, disminuyendo su rapidez a razón de $5\frac{1}{2}\frac{m}{seg}$ por segundo. Para no volcarse el auto debe frenar en no más de 7 segundos. ¿Se volcará el auto?

19. Un comerciante tiene a la venta 500 kg de azúcar. Logra vender $\frac{2}{5}$ del total y utiliza $\frac{1}{10}$ para hacer conservas. ¿Cuánta azúcar le quedó?

20. José corta el césped de su casa en 45 min. Su hermano Andrés, lo hace en 1 hora y media.

    a) Si trabajan a ritmo constante, ¿qué fracción del pasto corta José en 1 minuto?

    b) Si trabajan a ritmo constante, ¿qué fracción del pasto corta Andrés en 1 minuto?

    c) Si trabajan ambos a ritmo constante, ¿qué fracción del pasto cortan entre ambos en 1 minuto?

    d) Si trabajan ambos a ritmo constante, ¿en cuánto tiempo cortarán el pasto José y Andrés juntos?

21. Camila y Andrés toman cada uno una botella de jugo, ambas con la misma cantidad de jugo.

    - Camila tomó $\frac{1}{4}$ de su botella, y más tarde $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba.
    - Andrés tomó $\frac{2}{3}$ de su botella, y más tarde $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba

    ¿Tomaron ambos la misma cantidad de jugo?

22. Para una convivencia escolar se compraron 5 pizzas, cada una de las cuales se partió en 8 partes iguales. Al final de la reunión, la profesora le informa a los alumnos que de cada pizza quedaron 3 pedazos:

    a) ¿Qué fracción de cada pizza quedó?

    b) ¿Qué fracción del total quedó?

    c) En cada pizza, ¿qué fracción del total quedó?

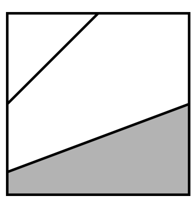
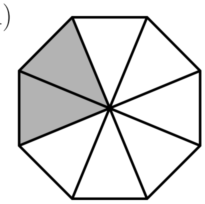
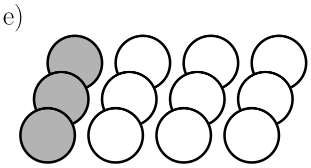
    d) ¿A qué fracción de cada pizza corresponde el total que quedó?

23. Catalina está preparando un postre. Ella sólo quiere hacer $\frac{2}{3}$ de la cantidad de la receta que tiene. Si para la receta completa se necesita un $\frac{1}{4}$ de una taza de azúcar, ¿cuánta azúcar necesita Catalina?

24. Demuestre que cada número decimal siguiente es un número racional, escribiéndolo como fracción irreducible:

    a) $2,4$
    b) $2,\overline{4}$
    c) $1,\overline{72}$
    d) $0,\overline{345}$
    e) $3,0\overline{1}$
    f) $4,1\overline{56}$
    g) $5,34\overline{5}$

25. ¿Cual(es) de las siguientes representaciones equivale(n) a $\frac{1}{3}$?

    a) $0,\overline{3}$
    b) $\dfrac{72}{216}$
    c) 
    d) 
    e) 

26. Una porción de arroz equivale a $\frac{1}{4}$ de taza, lo cual corresponde a 50 gramos de arroz. La señora Daniela pretende cocinar arroz para sus 26 trabajadores.

    a) ¿Cuántas tazas de arroz necesitará echar a la olla?
    b) Si un paquete contiene 1 kilo de arroz, ¿le alcanza con un paquete para cocinarle a sus trabajadores?

27. Se tienen 2 litros de agua y se quieren llenar tazas de $\frac{1}{4}$ de litro cada una. ¿Cuántas tazas se pueden llenar?

28. Se tiene una jarra llena de agua. Se sacan $\frac{4}{5}$ del total de agua de la jarra. Esto alcanza para llenar una botella de 2 litros. ¿Cuántos litros tenía la jarra llena?

29. La Federación de Fútbol de Chile puso a la venta las entradas para el partido con Uruguay en tres etapas

    - En la primera etapa, se vendieron $\frac{1}{6}$ del total de entradas.
    - En la segunda etapa, se vendieron $\frac{2}{3}$ de las entradas que sobraron de la primera etapa.
    - En la tercera etapa, se vendieron todas las entradas que sobraron de las dos etapas anteriores, las cuales fueron 15000 entradas.

    a) ¿Qué fracción del total de entradas se vendieron en las dos primeras etapas?

    b) ¿Cuántas entradas en total se vendieron?

    c) ¿Cuántas entradas se vendieron en la segunda etapa?

30. En una tienda hay un descuento del 25 % en un producto cuyo valor es de $32000. ¿A cuánto dinero equivale el descuento?

31. En una tienda el descuento que se aplica a un producto es 12 %. Si el valor del descuento es $5200. ¿Cuál es el precio del producto sin descuento?

32. En la misma tienda se aplicó el 15 % de descuento a otro producto. El precio de oferta es $17000. ¿Cuál es el precio del producto sin descuento?

33. El territorio chileno es de aproximadamente de 750.000 km^2. El territorio brasileño es de aproximadamente 8.500.000 km^2. El 20 % del territorio chileno es apto para viticultura, sin embargo, sólo el 10 % del territorio brasileño lo es.

    a) ¿Es correcto afirmar que Chile tiene más territorio apto para la viticultura?

    b) ¿A qué porcentaje del territorio brasileño corresponden los km^2 del territorio chileno que son aptos para la viticultura?

34. Una tarjeta comercial recarga mensualmente el 4 % del total de cada deuda. Si la deuda original es de $10000 y en dos meses no se hace ningún pago, ¿es correcto

afirmar que luego de este período, el recargo en la deuda será de un 8 % de la deuda original?

35. Un millonario abuelo desea repartir su herencia entre sus nietos Hugo, Paco y Luis, del siguiente modo:

    - A Hugo le dió el 24 % del total.
    - a Paco le dió el 26 % del total.
    - a Luis le dió las 75 % de lo que no le dió a Hugo y a Paco.
    - los restantes 12 millones y medio de pesos, los donó a una institución benéfica.

    a) ¿Qué fracción del total recibieron entre Hugo y Paco?
    b) ¿Qué fracción del total recibió Luis?
    c) ¿Cuál es el monto total de la herencia?
    d) ¿Cuánto dinero recibió cada nieto?

36. Se realizó un plebiscito entre los habitantes de Pelotillehue y Buenas Peras, para decidir si se construye un puente entre ambas ciudades, con el fin de agilizar el traslado. Se tiene que:

    - $\frac{7}{20}$ de los votantes de Pelotillehue sufragaron en contra del puente.
    - 45 % de los votantes de Buenas Peras sufragaron en contra del puente.
    - 85000 votantes sufragaron a favor del puente.

    Si los votantes de Pelotillehue fueron 80000 y los votantes de Buenas Peras fueron 60000,

    a) ¿Qué porcentaje de votantes de Pelotillehue votaron en contra del puente?
    b) ¿Es cierto que más gente de Buenas Peras que de Pelotillehue votó en contra del puente?
    c) ¿Es cierto que el 80 % de los votantes votaron en contra del puente?

d) ¿Se construyó el puente?

37. Un campesino desea cercar un terreno circular para albergar a sus 25 animales. Para comodidad de éstos, calcula que cada animal ocupará 4 m^2 de terreno, por lo que desea que el área total tenga 100 m^2. Para delimitar el terreno, usará una cuerda. ¿Cuántos metros de cuerda necesitará?

38. ¿Verdadero o falso? Justifique.

a) $2^3 = 2 \cdot 3$

b) $\dfrac{2^3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$

c) $4 \cdot 3^{-2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$

d) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3 \cdot 4}$

e) $2^3 \cdot 2^4 = 4^{3+4}$

f) $\frac{5^6}{5^2} = 5^{\frac{6}{2}}$

g) $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2}$

h) $\frac{2}{3^{-2}} = 18$

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{3}$

j) $-3^2 + \frac{3^2}{2} + \frac{9}{2^0} = \frac{9}{2}$

39. Don Andrés apostó \$2000 en fichas en una máquina del casino y obtuvo el triple de lo apostado. Posteriormente apostó todo lo obtenido, y obtuvo el triple por segunda vez. Si siguiera apostando todo lo obtenido, y la tendencia se mantuviera

a) ¿Cuánto dinero obtendría la sexta vez que juega?

b) ¿Cuánto dinero obtendría la n- ésima vez que juega?

40. Observe como obtener el mínimo común múltiplo (MCM) entre 72 y 108:

- Descomponemos ambos números en potencias de números primos, en este caso

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \text{ y } 108 = 3^3 \cdot 2^2$$

- Escogemos la mayor potencia de cada primo presente en alguna de las descomposiciones del paso anterior y luego las multiplicamos, obteniendo el MCM:

$$MCM(72, 108) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$$

Use este mismo procedimiento para

a) obtener el mínimo común múltiplo entre 36 y 600.

b) obtener el mínimo común múltiplo entre 300 y 2160.

c) verificar si $MCM(4500, 5400) = 30^3$.

41. ¿Verdadero o falso? Justifique.

a) $\sqrt{36} = \pm 6$

b) $\sqrt{108} = 3\sqrt{6}$

c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

d) $\sqrt[4]{81} - \sqrt[6]{729} = 0$

e) $\sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{27} = 0$

f) $\sqrt[53]{-1} = 1$

g) $\sqrt{0{,}36} = \frac{3}{5}$

h) $\sqrt{4{,}5} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

i) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{\frac{15}{4}}$

j) $\sqrt{180} - \sqrt{90} \cdot \sqrt{18} + \sqrt{500} = 2\sqrt{5}$

k) $\sqrt[4]{-81} = -2$

l) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{64}} = -\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}}$

m) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$

n) $\sqrt[4]{144} = 2\sqrt{3}$

o) $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$

42. Si $x = \sqrt{5}$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 25$?

43. Si $x = 1 + \sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 2x - 1$?

44. Lea y responda:

a) ¿Es siempre $\sqrt{x} > 0$, para cualquier $x \geq 0$?

b) ¿Existe algún número real x que cumpla que $x < \sqrt{x}$?

c) Si es que existe algún número real x tal que $x < \sqrt{x}$, ¿este es único?

45. Una cámara de televisión observa a un cohete, que en el momento de ser captado por la cámara está 5,5 kms de altura. Si la cámara está ubicada a 2,2 kms de la plataforma de despegue, ¿cuál de las siguientes opciones corresponde a la distancia entre la cámara y el cohete?

a) $\frac{11}{2}\sqrt{2}$ kms.

b) $\frac{33}{10}$ kms.

c) $\frac{11}{5}\sqrt{2}$ kms.

d) $\frac{11}{10}\sqrt{29}$ kms.

e) $\frac{11}{10}\sqrt{21}$ kms.

46. Una escalera está apoyada sobre una pared. Si la altura que alcanza la escalera sobre la pared es de 3 metros, y la distancia desde el pie de la escalera hasta la pared es $\sqrt{3}$ metros, ¿cuánto mide la escalera?

47. Se desean cercar dos terrenos cuadrados A y B con cuerda. El lado del terreno A mide $4\sqrt{2}$ metros y el lado del terreno B mide $3\sqrt{3}$ metros. Para ser cercado, ¿cuál de los dos terrenos requiere una cuerda más larga?

48. Exprese en notación científica:

a) La temperatura en el centro del Sol, la cual corresponde a 15 millones de grados Celsius.

b) La masa de la cantidad típica de café en una taza, en kilos, si esta corresponde a 150 miligramos.

c) La masa del Titanic en kilos, si esta corresponde a 52 mil toneladas (use que $1\text{tonelada} = 1000\text{kilos}$).

d) El volumen de un glóbulo rojo en mm^3, si este corresponde a $9 \cdot 10^{-17}$ metros cúbicos.

e) Longitud de la muralla china en metros, si esta mide 6400 kms.

f) El ancho de un cabello humano en metros, si éste corresponde a $\dfrac{9}{100}$ de 1 mílimetro.

g) La fortuna de Bill Gates en pesos chilenos, si esta asciende a 86000 millones de dólares (Use que $1\text{dólar} = \$630$ pesos chilenos).

h) La cantidad de segundos que tiene una década (suponga que cada año tiene 365 días).

49. Exprese en notación decimal:

a) El diámetro de Júpiter en kms, si éste corresponde a $1{,}4 \cdot 10^8$ metros.

b) La masa de un mosquito en miligramos, si este pesa $2 \cdot 10^{-6}$ kg.

c) La masa de la atmósfera de la Tierra en millones de toneladas, si ésta es de $5 \cdot 10^{18}$ kg.

d) Los ingresos de la industria del cine en el mundo durante 2015, en pesos chilenos, si estos corresponden a $3{,}83 \cdot 10^{10}$ doláres (bajo la equivalencia 1 dólar= 630 pesos chilenos).

e) La distancia que recorre una nave en kms, cuando da una vuelta al perímetro la Luna, si este es de $1,09 \cdot 10^7$ metros.

50. Se estima que un ser humano adulto tiene alrededor de 86 mil millones de neuronas. El ser vivo que está más cerca de tener tal cantidad de neuronas, es el simio Macaco Rhesus, que tiene aproximadamente $6,3$ millones de neuronas. ¿A cuántas veces la cantidad de neuronas de este simio, corresponden las neuronas del ser humano?
Indicación: Use la aproximación $\dfrac{86}{6{,}3} = 13{,}6$.

51. Según astronómos, el volumen del universo observable es aproximadamente de $3{,}4 \cdot 10^{80}$ metros cúbicos. También se estima, que el volumen total del universo es de $7 \cdot 10^{81}$ metros cúbicos. ¿A cuántas veces el universo observable corresponde el universo?
Indicación: Use la aproximación $\dfrac{7}{3{,}4} = 2{,}05$

52. La masa de la Tierra equivale a $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kgs. La masa de agua presente en la Tierra, es de $1{,}19 \cdot 10^{21}$ kgs. ¿Qué porcentaje de la masa de la Tierra corresponde a masa de agua? Indicación: Use la aproximación $\frac{1{,}19}{5{,}972} = 0{,}2$

53. La superficie de la Tierra corresponde aproximadamente a $510,1$ millones de kms^2. El agua en la tierra ocupa una superficie de aproximadamente $362,17$ millones de kms^2. ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra está ocupada por agua?
Indicación: Use la aproximación $\frac{362{,}17}{510{,}1} = 0,71$.

54. El volumen de agua en la Tierra corresponde a $1{,}4 \cdot 10^{18}\ m^3$. El agua salada en la Tierra, tiene un volumen de $1{,}35 \cdot 10^{18}\ m^3$. ¿Qué porcentaje del agua en la Tierra, corresponde a agua salada?
Indicación: Use la aproximación $\frac{1{,}35}{1{,}4} = 0{,}96$

55. El dinero total en el mundo, alcanza la cifra de los 60 mil billones de dólares. Supongamos que ese dinero fuera repartido en forma equitativa a cada persona del mundo, ¿cuánto dinero en pesos chilenos le correspondería a cada persona?
Indicación: Use el hecho que el precio del dólar es de \$630 pesos chilenos, que la población mundial es de $7{,}5 \cdot 10^9 = 7500$ millones de personas y la aproximación $\frac{3{,}78}{7{,}5} = 0,504$.

Capítulo 3

Proporcionalidad.

3.1. Introducción.

La proporcionalidad está presente en muchos aspectos de nuestra vida cotidiana. Gracias a ella, podemos medir características de diversos objetos y hacer transformaciones entre unidades de medida. Por ejemplo, podemos calcular la cantidad de litros de agua que hay una piscina olímpica, sabiendo que sus dimensiones son 50 metros de largo, 25 metros de ancho, y 2 metros de profundidad. También podríamos determinar cuál fue la rapidez promedio del atleta Usaint Bolt en $\frac{km}{h}$, el día en que recorrió los 100 metros planos en 9,8 segundos, y comparar esta rapidez promedio con la de un guepardo, el cual es el mamífero más veloz de la Tierra.

Por otro lado, existen varios fenómenos físicos que se ajustan a un modelo de proporcionalidad, ya sea directa o inversa. Por ejemplo, según la ley de Boyle, al respirar, el volumen de nuestra cavidad toráxica es inversamente proporcional a la presión del aire en esta cavidad. En palabras simples, cuando uno inhala, aumenta el volumen de nuestra caja toráxica, por lo que el aire está muy disperso dentro de nuestro organismo, y así su presión es menor. Por otro lado, cuando exhalamos, el volumen mencionado disminuye, luego la presión del aire aumenta (está mucho más comprimido), por lo que este sale hacia afuera. Otro ejemplo, es el hecho que la presión que ejerce el agua sobre una persona que se sumerge, es directamente proporcional a la profundidad en la que se sitúa. Esto quiere decir, entre otras cosas, que al doble de profundidad sentiremos el doble de presión sobre nuestros tímpanos.

En este capítulo, presentaremos también algunos problemas clásicos de proporcionalidad directa o inversa tales como

Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. Si cada vaca come lo mismo por día, ¿cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 22 vacas?

Veremos como resolver este tipo de problemas, identificando en primer lugar a qué tipo de proporcionalidad corresponde, y luego resolviéndolo de forma algebraica, y también de forma aritmética. La idea es basar los métodos de resolución en cuestiones conceptuales, y alejarse de métodos mecánicos y sin un sentido lógico.

También veremos algunos problemas de proporcionalidad compuesta, en los cuales intervienen más de dos variables. Un ejemplo es

Seis gatos matan 6 ratones en 6 minutos, ¿cuántos gatos se necesitan para matar 100 ratas en 50 minutos?

En este caso, tenemos 3 variables en juego, y veremos cómo reducir este problema a sólo dos variables, las cuales se relacionan mediante proporcionalidad directa o inversa, para luego resolverlo.

3.2. Proporcionalidad directa.

Consideremos la siguiente situación:

Ejercicio 3.2.1. *Javier quiere aumentar su capacidad física. Para ello sale a trotar diariamente. El primer día recorre 4 km en 40 min. Para hacer una estimación de su rendimiento en los días venideros y suponiendo que su ritmo será constante, Javier completa la siguiente tabla:*

	Kms recorridos	*Minutos en el que recorrió tal distancia*
a)	*4*	*40*
b)	*8*	*80*
c)	*12*	*120*

Luego de un largo periodo de entrenamiento, se propone ir trotando desde su casa a la playa, donde deberá recorrer una distancia de 20 km. Según sus estimaciones, ¿cuánto tiempo demorará en realizar este trayecto?

Solución. De la tabla se puede observar que,

- cada vez que los kms recorridos aumentaron al doble, entonces el tiempo también aumentó al doble.

- cada vez que los kms recorridos aumentaron al triple, entonces el tiempo también aumentó al triple.

Esto es debido a que la rapidez se supone constante, por lo que por cada km recorrido, Javier demora la misma cantidad de tiempo.

Sea $k \geq 1$. Generalizando lo observado en la tabla, afirmamos que si los kms recorridos aumentan a k veces la cantidad inicial, entonces el tiempo debe aumentar a k veces el tiempo inicial. Así, dado que 20 kms corresponde a 5 veces los 4 kms iniciales, entonces el tiempo destinado a este trayecto será 5 veces el tiempo inicial. Por lo tanto, el tiempo buscado es $5 \cdot 40 = 200$ minutos, o sea 3 horas y 20 minutos. $\square$

Observación 3.2.1. Sea $k > 0$. En general, en forma informal, dos variables A y B relacionadas entre sí son **directamente proporcionales** si cada vez que A varía a k veces A, entonces B varía a k veces B. En palabras más simples,

- si A aumenta en una cierta razón, entonces B también aumenta en la misma razón.
- si A disminuye en una cierta razón, entonces B también disminuye en la misma razón.

Observación 3.2.2. Podemos observar de la tabla del ejercicio anterior, que en cada caso el cuociente entre los kms recorridos y el tiempo invertido respectivo es constante, y corresponde a la rapidez. El valor del cuociente constante, el cual en este caso es $\frac{40}{4} = 10\frac{kms}{min}$, es llamada **constante de proporcionalidad directa**.

En general, tenemos la definición:

Definición 3.2.1. *Dos variables A y B relacionadas entre sí, se dicen* ***directamente proporcionales*** *si su cuociente es constante, esto es, si*

$$\frac{A}{B} = k, \text{ con } k \text{ constante,}$$

para cualquier valor de A y su respectivo valor de B. Al valor constante k, se le denomina ***constante de proporcionalidad directa****.*

Ejercicio 3.2.2. *Juan Luis tiene una estufa a parafina cuyo rendimiento es constante. Se sabe que ésta gasta 2 litros de parafina por cada 5 horas encendida. Si Juan Luis tiene un bidón de 7 litros de parafina, ¿para cuánto tiempo de encendido le alcanzará?*

Solución. En este caso, las variables involucradas son litros de parafina y tiempo durante el cual la estufa está encendida. El hecho que el rendimiento de la estufa es constante, quiere decir que la estufa gasta la misma cantidad de litros por cada hora. De este modo, si los litros en la estufa aumentan en una cierta razón, entonces el tiempo de encendido también aumenta en la misma razón. Así, las variables son directamente proporcionales. Para resolver el problema planteamos dos formas:

- Primera forma: Como las variables son directamente proporcionales, entonces el cuociente
$$\frac{litros}{horas}$$
es constante, y corresponde al rendimiento de la estufa (cantidad de litros que gasta por hora). Sea x el tiempo incógnito. Planteamos la ecuación
$$\frac{2}{5} = \frac{7}{x},$$
dado que ambos miembros corresponden al rendimiento constante. Resolviendo la ecuación, se tiene que $x = \frac{35}{2} = 17\frac{1}{2}$. Es decir, para gastar 7 litros de parafina, la estufa debería estar encendida 17 horas y media.

- Segunda forma: Note que:
  - 2 litros de parafina sirven para que la estufa esté 5 horas encendida.
  - dividiendo ambas cantidades anteriores por 2, obtenemos que 1 litro de parafina corresponde a 2.5 horas de estufa encendida.
  - multiplicando ambas cantidades de la equivalencia anterior por 7, se obtiene que para gastar 7 litros de parafina, necesitamos $7 \cdot 2{,}5 = 17{,}5$ horas, es decir 17 horas y media.

$\square$

Ejercicio 3.2.3. *Para pintar un muro de 36 m^2 se necesitan 2 galones de pintura. Si con cada galón se pintan la misma cantidad de metros cuadrados, ¿cuántos galones se necesitan para pintar un muro de 50 m^2?*

Solución. Las variables involucradas son los metros cuadrados y los galones de pintura. Como con cada galón se pinta la misma cantidad de metros cuadrados, entonces si la cantidad de galones crece en una cierta razón, entonces los metros cuadrados pintados también crecen en esa razón. De este modo, las variables son directamente proporcionales. Para continuar, planteamos dos formas de resolución:

- Primera forma: Como las variables son directamente proporcionales, entonces el cuociente
$$\frac{metros\ cuadrados}{galones}$$
es constante, y corresponde a la cantidad de metros cuadrados que se pintan con cada galón. Usando este hecho, planteamos la ecuación
$$\frac{2}{36} = \frac{x}{50},$$
de donde se deduce que $x = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$. Es decir, se necesitan 2 galones y $\frac{7}{9}$ de pintura.

- Segunda forma: Note que
  - para pintar 36 m^2 se necesitan 2 galones de pintura.
  - dividiendo la equivalencia anterior por 36, obtenemos que para pintar 1 m^2 necesitamos $\frac{1}{18}$ de un galón de pintura.
  - multiplicando la última equivalencia por 50, obtenemos que para pintar 50 m^2, necesitamos
$$50 \cdot \frac{1}{18} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9} \text{ galones de pintura.}$$

  Es decir, se necesitan 2 galones y $\frac{7}{9}$ de pintura.

$\square$

Ejercicio 3.2.4. *La familia Aránguiz fue al cine el día viernes y sus 6 integrantes pagaron en total* \$10000*. La familia Díaz fue al cine el día sábado y sus 4 integrantes pagaron en total* \$7000*. Si todos pagan lo mismo, ¿en que día es mejor ir al cine?*

Solución. Consideramos dos casos: un caso corresponde al día viernes y el otro al día sábado. En cada caso, mientras más personas van al cine, entonces más dinero deben pagar, y estas cantidades crecen en la misma razón, dado que cada persona paga lo mismo. De este modo, en cada día, personas y dinero son variables directamente proporcionales. Para determinar cuál día es mejor ir al cine, nos preguntamos cuánto deberían pagar 12 personas por asistir al cine (note que $12 = MCM(4,6)$) en cada uno de los días, dado que esto facilita los cálculos. Planteamos dos formas:

- Primera forma: Para el día viernes, la información se resume en la siguiente tabla:

Personas	Dinero
6	10000
12	x

  Notemos que el cuociente

  $$\frac{\text{dinero}}{\text{cantidad de personas}}, \tag{3.2.1}$$

  es constante, y en este caso corresponde al dinero que debería pagar cada persona. En virtud de esto, planteamos la ecuación

  $$\frac{10000}{6} = \frac{x}{12},$$

  de la cual $x = 40000$. Es decir, el día viernes 12 personas deben pagar en total \$40000.

  En el caso del día sábado, tenemos

Personas	Dinero
4	7000
12	x

  De esta tabla, planteamos, análogamente al día viernes, la ecuación

  $$\frac{7000}{4} = \frac{x}{12}.$$

  De este modo, $x = 42000$, por lo que el día sábado 12 personas pagan \$42000.

- Segunda forma: En el caso del día viernes, tenemos que
    - 6 personas pagan \$10000.
    - 12 personas, lo cual corresponde al doble de la cantidad inicial de personas, pagan el doble del dinero inicial, es decir \$40000.

  En el caso del día sábado, tenemos que
    - 4 personas pagan \$7000.
    - 12 personas, lo cual corresponde al triple de la cantidad inicial de personas, pagan el triple del dinero inicial, es decir, \$42000.

Con cualquiera de los razonamientos expuestos, como 12 personas pagan menos el viernes que el sábado, entonces es más conveniente ir al cine el viernes. □

Observación 3.2.3. Consideremos dos variables A y B, que cumplen con que si A aumenta, entonces B también lo hace. Notemos que estas variables no necesariamente son directamente proporcionales, como muestra el siguiente problema:

¿Cuánto deberá pagar Andrea por hablar 900 minutos en el mes?*Andrea desea contratar un plan de telefonía, cuyas tarifas mensuales según los minutos hablados, se resumen en la siguiente tabla:*

	Minutos hablados	*Tarifa mensual en pesos*
a)	*300*	*14000*
b)	*400*	*18000*
c)	*600*	*26000*

¿Cuánto deberá pagar Andrea por hablar 900 minutos en el mes?

Veamos su solución:

Note que a más minutos hablados, mayor es la tarifa, lo cual se puede apreciar en la tabla. Es decir, si una variable aumenta, la otra también lo hace. Si suponemos que *son directamente proporcionales, entonces su cuociente*

$$\frac{\textit{tarifa}}{\textit{minutos hablados}}$$

es constante, luego para obtener lo pedido, planteamos la ecuación

$$\frac{14000}{300} = \frac{x}{900},$$

de donde $x = 51000$*. Es decir, bajo este razonamiento, el precio a cancelar es de* \$51000.

Sin embargo, el cuociente

$$\frac{\textit{tarifa}}{\textit{minutos hablados}}$$

no es constante, por lo que las variables no son directamente proporcionales, luego este razonamiento es erróneo. En efecto, usando conocimientos de funciones (Ejercicio 29 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo de funciones), vemos que la tarifa por hablar 900 minutos es \$38000.

Para terminar esta sección vemos una aplicación de la proporcionalidad directa a la física:

Ejercicio 3.2.5. *La distancia que recorre un auto hasta frenar, es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad que llevaba en el momento de iniciar el frenado. Un auto que va a* $50\frac{km}{h}$ *patina en una curva y recorre* s *metros hasta frenar. Otro auto va a* $100\frac{km}{h}$*. ¿Cuántos metros recorre hasta frenar?*

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: Como las cantidades mencionadas son directamente proporcionales, entonces el cuociente
$$\frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}^2}$$
es constante. De este modo, planteamos la ecuación
$$\frac{s}{50^2} = \frac{x}{100^2}$$

de donde

$$x = \frac{100^2 s}{50^2} = \left(\frac{100}{50}\right)^2 s = 2^2 s = 4s.$$

Por lo tanto, la distancia que recorre el auto que va a $100\frac{km}{h}$ hasta frenar, es 4 veces la distancia recorrida por el auto que va a $50\frac{km}{h}$.

- Segunda forma: Se tiene que
  - Un auto a $50\frac{km}{h}$ recorre s metros.
  - Si la rapidez aumenta a $100\frac{km}{h}$, es decir al doble de la rapidez inicial, entonces el cuadrado de esta aumenta a 4 veces el cuadrado de la rapidez inicial. De este modo, como el cuadrado de la rapidez es directamente proporcional a la distancia, entonces esta aumenta a 4 veces s metros, es decir a $4s$ metros.

3.3. Proporcionalidad inversa.

Ejercicio 3.3.1. *Daniela quiere llenar la piscina de su casa con una bomba. Según los datos de la bomba, esta arroja 1000 litros por hora, y logra llenar la piscina en 27 horas. Daniela buscará en el mercado una bomba que llene la piscina más rápido y para ello realiza una estimación en la siguiente tabla:*

	Litros por hora	*Horas de llenado*
a)	*1000*	*27*
b)	*2000*	*13,5*
c)	*3000*	*9*

Daniela juntó mucho dinero y le alcanzó para comprar una bomba que arroja 4000 litros por hora. ¿En cuántas horas se llena la piscina con esta bomba?

Solución. De la tabla se puede observar que, dado que la capacidad de la piscina no varía, entonces

- cada vez que los litros por hora aumentaron al doble, entonces el tiempo de llenado disminuyó a la mitad.
- cada vez que los litros por hora aumentaron al triple, entonces el tiempo de llenado disminuyó a la tercera parte.

Sea $k \geq 1$. Generalizando lo observado en la tabla, afirmamos que si los litros por hora aumentan a k veces la cantidad inicial, entonces el tiempo de llenado disminuye a la k-ésima parte del tiempo inicial. Así, dado que 4000 litros corresponden a 4 veces los litros iniciales, entonces el tiempo de llenado será la cuarta parte del tiempo inicial. Por lo tanto, el tiempo corresponde a $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$ horas, o sea 6 horas y 45 minutos. $\square$

Observación 3.3.1. Sea $k > 0$. En general, en forma informal, dos variables A y B relacionadas entre sí son **inversamente proporcionales** si cada vez que A varía a k veces A, entonces B varía a $\frac{1}{k}$ veces B. En palabras más simples, si A aumenta en una cierta razón, entonces B disminuye en la razón inversa, o viceversa.

Observación 3.3.2. Podemos observar de la tabla del ejercicio anterior, que en cada caso el producto entre los litros por hora y el tiempo de llenado es constante, y corresponde a la capacidad de la piscina. El valor del producto constante, el cual en este caso es 27000 litros, es llamado **constante de proporcionalidad inversa**.

En general, tenemos la definición:

Definición 3.3.1. *Dos variables A y B relacionadas entre sí, se dicen **inversamente proporcionales** si su producto es constante, esto es, si*

$$A \cdot B = k, \text{ con } k \text{ constante},$$

*para cualquier valor de A y su respectivo valor de B. Al valor constante k, se le denomina **constante de proporcionalidad inversa**.*

Ahora resolveremos algunos problemas clásicos:

Ejercicio 3.3.2. *6 hombres se demoran 4 días en construir un muro. Suponemos que cada hombre trabaja lo mismo por día. Si se suman 2 hombres más al trabajo, ¿en cuánto tiempo construirán el muro?*

Solución. Note que mientras más hombres realizan la tarea, entonces en menos días realizan el trabajo. Además, cuando la cantidad de hombres crecen en una cierta razón, entonces los días disminuyen en la razón inversa, dado que todos los hombres trabajan al mismo ritmo. De este modo, las variables son inversamente proporcionales. A continuación procedemos de dos formas:

- Primera forma: Como las variables son inversamente proporcionales, entonces el producto

  $$\text{hombres} \cdot \text{días},$$

  es constante, y corresponde al esfuerzo necesario para construir el muro (el cual es independiente de la cantidad de hombres y de los días). Según los datos, y si x es el tiempo buscado, entonces planteamos la ecuación

  $$6 \cdot 4 = 8 \cdot x,$$

  dado que ambos miembros corresponden al esfuerzo necesario para terminar la tarea. Resolviendo la ecuación, obtenemos que $x = 3$, por lo que 8 hombres construyen el muro en 3 días.

- Segunda forma: Se tiene que

  - 6 hombres hacen el trabajo en 4 días,
  - 2 hombres, la tercera parte de lo inicial, hacen el trabajo en el triple de días iniciales, o sea en 12 días.
  - 8 hombres, el cuádruplo de lo anterior, hacen el trabajo en la cuarta parte del tiempo anterior, o sea en 3 días.

□

Ejercicio 3.3.3. *Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. Si cada vaca come lo mismo por día, ¿cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 22 vacas?*

Solución. Las variables corresponden a vacas y días. A más vacas, menos días dura el alimento. Por otro lado, cuando la cantidad de vacas crece en una cierta razón, entonces el tiempo disminuye en la razón inversa, dado que todas las vacas comen lo mismo por día. De este modo, las variables son inversamente proporcionales. A continuación procedemos de dos formas:

- Representamos la cantidad total de alimento por el producto

$$\text{vacas} \cdot \text{días}. \tag{3.3.1}$$

  Como la cantidad de alimento no varía, entonces este producto es constante. Planteamos la ecuación

$$220 \cdot 45 = x \cdot 22,$$

  donde x es el número días buscado. Despejando x, obtenemos que $x = 450$, por lo que para alimentar 22 vacas se necesitan 450 días.

- Segunda forma: Se tiene que

  - 220 vacas se comen el forraje en 45 días,
  - la décima parte de las vacas iniciales, o sea 22 vacas, acabarán el forraje en 10 veces la cantidad de días iniciales, es decir, en 450 días.

□

Veamos una aplicación de la proporcionalidad inversa a la física:

Ejercicio 3.3.4. *Un furgón de masa m kilogramos se mueve a una rapidez de $10\frac{m}{s}$. Impacta a un furgón que está estacionado, el cual también tiene masa m, y luego se desplazan ambos juntos. Dado que la cantidad de movimiento (o momentum lineal) se conserva antes y después del choque, la masa y la rapidez de desplazamiento son variables inversamente proporcionales. ¿A qué rapidez se mueven los dos furgones juntos?*

Solución. Procedemos de dos formas:

- Primera forma: El producto
$$\text{masa} \cdot \text{rapidez}$$
es constante, y corresponde a la cantidad de movimiento que se conserva antes y después del choque. Sea x la rapidez con la que se mueven los dos furgones juntos, conjunto que tiene masa $2m$. Planteamos la ecuación
$$m \cdot 10 = 2m \cdot x$$
de donde concluimos que
$$x = \frac{10m}{2m} = 5.$$
Es decir, la rapidez buscada es de $5\frac{m}{s}$, o sea la mitad de la rapidez que traía el furgón en movimiento.

- Segunda forma: Tenemos que
  - una masa de m kilos se mueve a $10\frac{m}{s}$.
  - una masa de $2m$ kilos se mueve a la mitad de la rapidez inicial, es decir a $5\frac{m}{s}$.

□

3.4. Proporcionalidad compuesta.

En algunas situaciones intervienen más de dos variables, las cuales si analizamos de a pares, vemos que son directa o inversamente proporcionales entre sí. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 3.4.1. *En la academia de clases de salsa "Rincón Latino" se ocupan mensualmente 10 ampolletas, las cuales se usan durante 4 horas diarias y la cuenta de luz es de* \$25000. *Para el mes siguiente, se intentarán disminuir los gastos, por lo que sólo se usarán 6 ampolletas. Supongamos que cada ampolleta gasta lo mismo por hora, y que el cobro por hora es el mismo. Dado que las clases algunas días se alargan, éstas se ocuparán durante 6 horas diarias. ¿Se consigue disminuir los gastos con esta medida?*

Solución. Resumimos la información en la tabla

Ampolletas	horas diarias encendidas	Pesos
10	4	25000
6	6	x

Reducimos el problema a dos variables. En este caso, estas serán ampolletas y dinero gastado por hora. Note que

- 10 ampolletas gastan $\frac{25000}{4} = 6250$ pesos mensuales por hora.
- 6 ampolletas gastan $\frac{x}{6}$ pesos mensuales por hora.

De este modo, nuestro esquema queda como

Ampolletas	Pesos por hora (al mes)
10	6250
6	$\frac{x}{6}$

Observamos que más ampolletas, más dinero por hora gastan. Además, cuando las ampolletas crecen en una cierta razón, entonces el dinero lo hace en la misma razón, dado que cada ampolleta gasta lo mismo por hora al mes. De este modo, las variables son directamente proporcionales. Procedemos de alguna de las dos formas siguientes:

- Primera forma: Planteamos una ecuación. Como el cuociente entre las cantidades en cuestión es constante (y su valor representa lo que gasta una ampolleta por hora), entonces planteamos la ecuación

  $$\frac{6250}{10} = \frac{\frac{x}{6}}{6}.$$

  Es decir,

  $$\frac{6250}{10} = \frac{x}{36}.$$

  Despejando x, deducimos que $x = 22500$. Por lo tanto, con 6 ampolletas prendidas durante 6 horas se genera un cobro mensual de \$22500. Así, se consiguen disminuir los gastos.

- Segunda forma: Note que

  - 10 ampolletas gastan \$6250 por hora al mes.
  - dividiendo por 5 ambas cantidades, obtenemos que 2 ampolletas gastan \$1250 por hora al mes.
  - multiplicando por 3 ambas cantidades, obtenemos que 6 ampolletas gastan \$3750 pesos por hora al mes.

  De este modo, 6 ampolletas encendidas durante 6 horas diarias, gastan $6 \cdot 3750 = 22500$ pesos al mes. Por lo tanto, se consiguen disminuir los gastos.

□

Ejercicio 3.4.2. *Quince obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 40 días en realizar un trabajo. Si cada obrero realiza el mismo trabajo por hora y por día ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?*

Solución. Las variables involucradas son obreros, horas diarias y días. Tenemos el esquema

Obreros	horas diarias	días
15	6	40
10	8	x

Reducimos nuestro problema a dos variables. Estas son obreros y horas total de trabajo (en general, la reducción a dos variables se debe hacer de acuerdo al contexto del problema). Note que

- 15 obreros realizan el trabajo en $6 \cdot 40 = 240$ horas.
- 10 obreros deben realizar el trabajo en $8x$ horas.

El esquema queda como

Obreros	horas totales
15	240
10	$8x$

Se tiene que más obreros menos horas total de trabajo. Por otro lado, si la cantidad de obreros crece en una cierta razón, entonces las horas totales disminuyen en la razón inversa, dado que cada obrero realiza el mismo trabajo por hora. De este modo, las variables son inversamente proporcionales. Ahora, procedemos de alguna de las dos formas siguientes:

- Primera forma: Del último esquema, planteamos la ecuación

  $$15 \cdot 240 = 10 \cdot 8x,$$

  de donde $x = 45$. Por lo tanto, trabajando 8 horas diarias, los 10 obreros harán el trabajo en 45 días.

- Segunda forma: Note que
    - 15 obreros realizan el trabajo en 240 horas.
    - dividiendo por 3 los obreros, y multiplicando por 3 las horas, obtenemos que 5 obreros realizan la obra en 720 horas.
    - multiplicando por 2 los obreros, y dividiendo por 2 las horas, obtenemos que 10 obreros realizan la obra en 360 horas.

  Por lo tanto, trabajando 8 horas diarias, los 10 obreros harán el trabajo en $\frac{360}{8} = 45$ días.

$\square$

Ejercicio 3.4.3. *Seis gatos matan 6 ratones en 6 minutos. Si cada gato mata la misma cantidad de ratones por minuto y la cantidad de ratones que muere por minuto es el mismo. ¿Cuántos gatos se necesitan para matar 100 ratas en 50 minutos?*

Solución. Las variables que intervienen en el problema son gatos, ratones y minutos. Consideremos el esquema:

Gatos	Ratones	Minutos
6	6	6
x	100	50

Reducimos este esquema a dos variables, las cuales son gatos y ratones muertos por cada minuto. Se tiene que

- como 6 gatos matan 6 ratones en 6 minutos, entonces 6 gatos matan 1 ratón por minuto.
- x gatos deben matar $\frac{100}{50} = 2$ ratones por minuto.

De este modo, nuestro esquema queda como

Gatos	Ratones por minuto
6	1
x	2

Como más gatos matan más ratones por minuto, y además como ambas variables crecen en la misma razón, entonces estas son directamente proporcionales. Ahora procedemos de dos formas:

- Primera forma: El cuociente entre las variables es constante, por lo que planteamos la ecuación
$$\frac{6}{1} = \frac{x}{2}.$$
Resolviéndola obtenemos que $x = 12$. Es decir, para matar 2 ratones por minuto se necesitan 12 gatos. De este modo, para matar 100 gatos en 50 minutos, se necesitan 12 gatos.

- Segunda forma: Se tiene que
    - 6 gatos matan 1 ratón por minuto.
    - multiplicando por 2 ambas cantidades, se obtiene que 12 gatos matan 2 ratones por minuto.

  De este modo, para matar 100 ratones en 50 minutos, es decir 2 por minuto, se necesitan 12 gatos.

$\square$

3.5. Medición.

En esta sección, estudiaremos algunas situaciones que involucran unidades de medida, en diversos contextos. En cualquier caso de los planteados, para transformar de una unidad de medida a otra, usamos el hecho que estas unidades son directamente proporcionales entre sí.

Ejercicio 3.5.1. *Transforme:*

a) 13,5 *kms a metros.*

Solución. Recordemos que

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ metros}$$

Como los metros y los kms son variables directamente proporcionales, entonces multiplicando la última igualdad por 13,5, vemos que

$$13{,}5 \text{ kms} = 13{,}5 \cdot 1000 \text{ metros.}$$

Es decir,

$$13{,}5 \text{ kms} = 13500 \text{ metros.}$$

b) 3,2 *kms a cms.*

Solución. Note que

- 1 metro = 100 cms.
- multiplicando la última igualdad por 1000, obtenemos que

$$1000 \text{ metros} = 1000 \cdot 100 \text{ cms.}$$

Es decir,

$$1 \text{ km} = 100000 \text{ cms.} \tag{3.5.1}$$

- multiplicando (**??**) por 3,2, obtenemos que

$$3{,}2 \text{ km} = 3{,}2 \cdot 100000 \text{ cms.} \tag{3.5.2}$$

O sea

$$3{,}2 \text{ kms} = 320000 \text{ cms.} \tag{3.5.3}$$

c) *20 millas a kms, sabiendo que 1 km equivale a* 1,6 *millas.*

Solución. Se tiene que

- 1 km = 1,6 millas o sea

$$1 \text{ km} = \frac{8}{5} \text{ millas.} \tag{3.5.4}$$

- determinamos ahora a cuántos kms equivale 1 milla, por lo que multiplicamos (**??**) por $\frac{5}{8}$, obteniendo que

$$\frac{5}{8} \text{ km} = 1 \text{ milla.} \tag{3.5.5}$$

- determinamos ahora a cuántos kms equivalen 20 millas, multiplicando la última igualdad por 20, obteniendo que

$$20 \cdot \frac{5}{8} \text{ km} = 20 \text{ millas.} \tag{3.5.6}$$

O sea,

$$12{,}5 \text{ km} = 20 \text{ millas.} \tag{3.5.7}$$

d) 270000 *cms a kms.*

Solución. Se tiene que

- en el ejercicio *a*) vimos que

$$1 \text{ km} = 100000 \text{ cms.} \tag{3.5.8}$$

- dividimos la última igualdad por 100000, para ver a cuántos kms equivale 1 cm. Obtenemos que

$$\frac{1}{100000} \text{ km} = 1 \text{ cm.} \tag{3.5.9}$$

- multiplicamos ahora por 270000, obteniendo que

$$\frac{270000}{100000}\text{ km} = 270000 \text{ cms.} \tag{3.5.10}$$

O sea,

$$2,7 \text{ kms} = 270000 \text{ cms.}$$

e) 300 *dólares a pesos chilenos.*

Solución. Se tiene que

- 1 dólar = 640 pesos chilenos
- si multiplicamos la igualdad anterior por 300, obtenemos que

$$300 \text{ dólares} = 300 \cdot 640 \text{ pesos chilenos.}$$

De este modo,

$$300 \text{ dólares} = 192000 \text{ pesos chilenos.}$$

e) 450,000 *pesos chilenos a euros.*

Solución. Se tiene que

- 1 euro = 730 pesos chilenos.
- veremos primero a cuántos euros equivale 1 peso chileno, dividiendo la última igualdad por 730. Obtenemos que

$$\frac{1}{730}\text{ euro} = 1 \text{ peso chileno.}$$

- multiplicando la última igualdad por 450000, se deduce que

$$\frac{450000}{730}\text{ euros} = 450000 \text{ pesos chilenos.}$$

O sea

$$616,43 \text{ euros} = 450000 \text{ pesos chilenos.}$$

g) *96500 metros cuadrados a hectáreas.*

Solución. Se tiene que

- 1 hectárea = 10000 metros cuadrados (Es decir, 1 hectárea corresponde a un terreno de 100 metros de largo y 100 metros de ancho.)
- dividiendo por 10000, obtenemos que
$$\frac{1}{10000} \text{ hectárea} = 1 \text{ metro cuadrado.}$$
- multiplicando la última igualdad por 96500, obtenemos que
$$\frac{96500}{10000} \text{ hectáreas} = 96500 \text{ metros cuadrados.}$$
O sea
$$9{,}65 \text{ hectáreas} = 96500 \text{ metros cuadrados.}$$

h) 2,4 *días a días y horas.*

Solución. Tenemos que 2,4 días, equivalen a 2 días y 0,4 días. Cambiaremos los 0,4 días a horas y minutos. De este modo

- 1 día = 24 horas.
- multiplicando la última igualdad por $0{,}4 = \frac{2}{5}$, obtenemos que
$$0{,}4 \text{ días} = \frac{2}{5} \cdot 24 \text{ horas,}$$
o sea que,
$$0{,}4 \text{ días} = 9\frac{3}{5} \text{ horas.}$$
Es decir, 0,4 días equivalen a 9 horas y $\frac{3}{5}$ de 1 hora.
- transformamos los $\frac{3}{5}$ de 1 hora a minutos. Como
$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos,}$$

entonces multiplicando por $\frac{3}{5}$ en esta igualdad, se deduce que

$$\frac{3}{5} \text{ hora} = \frac{3}{5} \cdot 60 \text{ minutos.}$$

Es decir,

$$\frac{3}{5} \text{ hora} = 36 \text{ minutos.}$$

Por lo tanto, 2,4 días corresponden a 2 días, 9 horas y 36 minutos.

i) $9{,}8\frac{m}{s}$, *la rapidez promedio de Usain Bolt en recorrer los 100 metros planos, a* $\frac{km}{h}$.

Solución. Para determinar la rapidez en $\frac{km}{h}$, basta determinar cuántos kms recorre Bolt en 1 hora. Suponiendo que la rapidez es constante, tenemos que distancia y tiempo son variables directamente proporcionales. De este modo

- Bolt en 1 segundo recorre 9,8 metros.
- multiplicando por 60 ambas cantidades, se tiene que en 1 minuto, Bolt recorre

$$9{,}8 \cdot 60 = \frac{98}{10} \cdot 60 = 588 \text{ metros.}$$

- multiplicando lo anterior por 60 el tiempo y metros anteriores, tenemos que, en 1 hora, Bolt recorre $60 \cdot 588 = 35280$ metros. Transformando estos metros a kms, vemos que en 1 hora Bolt recorre 35,2 kms.

Por lo tanto, la rapidez promedio de Usain Bolt, es de 35,2 $\frac{km}{h}$.

j) *La rapidez con que la Tierra gira alrededor del Sol, a* $\frac{km}{s}$. *Use el hecho que ésta recorre una distancia de 930 millones de kms en 1 año (365 días), cuando gira alrededor del Sol.*

Solución. Suponiendo que la rapidez de la Tierra es constante, tenemos que distancia y tiempo son variables directamente proporcionales. De este modo:

- en 365 días, la Tierra recorre 930.000.000 kms.

- dividiendo ambas cantidades por 365, obtenemos que en 1 día= 24 horas, la Tierra recorre $\dfrac{930.000.000}{365} = 25{,}5$ millones de kms.
- dividiendo ambas cantidades por 24, obtenemos que en 1 hora= 60 minutos, la Tierra recorre $\dfrac{25.000.000}{24} = 104.164$ kms.
- dividiendo ambas cantidades por 60, obtenemos que en 1 minuto= 60 segundos, la Tierra recorre $\dfrac{104.164}{60} = 1769$ kms.
- dividiendo ambas cantidades por 60 nuevamente, vemos que en 1 segundo, la Tierra recorre 29,5 kms.

Es decir, su rapidez es de $29{,}5\frac{km}{s}$.

k) La rapidez con la que se llena un estanque, la cual es de 0,24 $\frac{m^3}{hora}$, a $\frac{lts}{min}$.

Solución. Vemos que el estanque se llena a razón de

$$0{,}24\ m^3 \text{ en 1 hora.}$$

Note que, 1 m^3 es el volumen de un cubo de

$$1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m},$$

o sea, de un cubo de

$$100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 100^3 cm^3 = 1.000.000\ cm^3.$$

Esto muestra que

$$1m^3 = 1.000.000\ cm^3.$$

Observando el número de ceros obtenido, vemos que

$$1m^3 = 1000 \cdot 1000\ cm^3 = 1000 \text{ veces } 1000\ cm^3.$$

Como 1 litro $= 1000\ cm^3$, entonces, se deduce que

$$1\ m^3 = 1000 \text{ litros.}$$

Multiplicando la última igualdad por $0,24$, obtenemos que

$$0{,}24 \ m^3 = 240 \text{ litros.}$$

Así, al estanque entran

$$240 \text{ litros en } 1 \text{ hora.}$$

Para determinar la rapidez en la unidad de medida que nos piden, debemos determinar cuántos litros entran en 1 minuto. Suponiendo que la rapidez de llenado es constante, entonces los litros y los minutos son variables directamente proporcionales. Como entran

$$240 \text{ litros en } 60 \text{ minutos,}$$

entonces dividiendo la equivalencia anterior por 60, vemos que entran

$$\frac{240}{60} = 4 \text{ litros en } 1 \text{ minuto.}$$

Así, 0,24 $\frac{m^3}{hora}$ corresponden a 4 $\frac{lts}{min}$. □

Ejercicio 3.5.2. *Un atleta de Kenia y un atleta de Jamaica compiten palmo a palmo por obtener la medalla de oro, en el marco de la carrera de 10000 metros planos, en los Juegos Olímpicos de Río Janeiro. Una cámara área los capta en un cierto instante de la carrera. En ese instante, el atleta de Kenia llevaba recorrido 1600 metros e iba a una rapidez de 360* $\frac{m}{min}$*. Por otro lado, en ese mismo instante, el atleta de Jamaica llevaba recorrido 1800 metros e iba a una rapidez de 350* $\frac{m}{min}$*. Ambos mantuvieron la misma rapidez respectiva dada hasta el final de la carrera.*

a) *¿En cuántos minutos completó la carrera el atleta de Kenia?*

Solución. A este atleta le faltan por recorrer 8400 metros. Dado que mantiene la misma rapidez hasta el final de la carrera, entonces distancia y tiempo son variables directamente proporcionales. Se tiene que

- recorre 360 metros en 1 minuto.

- dividiendo por 36, se obtiene que recorre 10 metros en $\frac{1}{36}$ de minuto.
- multiplicando por 840, tenemos que el atleta de Kenia recorre los 8400 metros restantes en $\frac{70}{3}$ minutos, es decir en 23 minutos y $\frac{1}{3}$ de minuto.

b) *¿En cuántos minutos completó la carrera el atleta de Jamaica?*

Solución. A este atleta le faltan por recorrer 8200 metros. Análogamente al otro atleta, distancia y tiempo son directamente proporcionales. Se tiene que

- recorre 350 metros en 1 minuto.
- dividiendo por 7, se deduce que recorre 50 metros en $\frac{1}{7}$ de minuto.
- como $\frac{8200}{50} = 164$, entonces multiplicando por 164 ambas cantidades de la equivalencia anterior, obtenemos que el atleta de Jamaica recorre los 8200 metros en $\frac{164}{7}$ minutos, o sea en 23 minutos y $\frac{3}{7}$ de minuto.

c) *¿Quién ganó la medalla de oro?*

Solución. Comparamos los tiempos en los que completaron la carrera. Para ello, determinamos cuál es menor, $\frac{1}{3}$ o $\frac{3}{7}$. Como

$$\frac{1}{3} = \frac{7}{21} \text{ y } \frac{3}{7} = \frac{9}{21},$$

entonces $\frac{1}{3} < \frac{3}{7}$. Así, la medalla de oro la ganó el atleta de Kenia, dado que completó la carrera en menos tiempo. □

Ejercicio 3.5.3. *Mónica, ciudadana chilena, fue en Febrero de vacaciones a Uruguay. Al llegar se enteró que el tipo de cambio es*

$$1 \textit{ peso chileno} = 0{,}05 \textit{ pesos uruguayos.} \tag{3.5.11}$$

a) *Si cambió \$240.000 pesos chilenos a pesos uruguayos ¿con cuánto dinero uruguayo se quedó?*

Solución. Dada la equivalencia, se tiene que

- multiplicando (**??**) por 10000, obtenemos que

$$10000 \text{ pesos chilenos} = 500 \text{ pesos uruguayos.} \qquad (3.5.12)$$

- multiplicando la última igualdad por 24, se deduce que

$$240000 \text{ pesos chilenos} = 12000 \text{ pesos uruguayos.} \qquad (3.5.13)$$

O sea, Mónica se quedó con \$12000 pesos uruguayos.

b) *Al retornar a Chile en Marzo, contaba con* \$3000 *pesos uruguayos, los cuales fue a cambiar a pesos chilenos. ¿Cuánto dinero chileno deberían darle en la casa de cambio?*

Solución. Se tiene que

- multiplicando (**??**) por 100, se deduce que

$$100 \text{ pesos chilenos} = 5 \text{ pesos uruguayos.} \qquad (3.5.14)$$

- multiplicando (**??**) por 6, obtenemos que

$$600 \text{ pesos chilenos} = 30 \text{ pesos uruguayos.} \qquad (3.5.15)$$

- multiplicando (**??**) por 100, se deduce que

$$60.000 \text{ pesos chilenos} = 3000 \text{ pesos uruguayos.}$$

Por lo tanto, en la casa de cambio deberían darle \$60.000 pesos uruguayos.

c) *En Abril, Mónica se entera que el cambio entre pesos chilenos y uruguayos ha variado, y corresponde a*

$$1 \textit{ peso chileno} = 0{,}08 \textit{ pesos uruguayos.} \qquad (3.5.16)$$

Si Mónica hubiese retornado en Abril, ¿cuántos pesos chilenos hubiese obtenido con los \$3000 *pesos uruguayos? ¿le hubiese sido más conveniente el cambio?*

Solución. En este caso

- multiplicando (**??**) por 100, se tiene que

$$100 \text{ pesos chilenos} = 8 \text{ pesos uruguayos.} \tag{3.5.17}$$

- dividiendo por 4 la última igualdad, se tiene que

$$25 \text{ pesos chilenos} = 2 \text{ pesos uruguayos.} \tag{3.5.18}$$

- multiplicando la última igualdad por 1500, se deduce que

$$37500 \text{ pesos chilenos} = 3000 \text{ pesos uruguayos.} \tag{3.5.19}$$

De este modo, Mónica ahora obtuvo \$37500 pesos chilenos. Así, el cambio de Abril no le fue conveniente, dado que obtuvo menos dinero chileno que en Marzo. □

Ejercicio 3.5.4. *Una piscina olímpica tiene 50 metros de largo, 25 metros de ancho, y 2 metros de profundidad.*

a) *¿Cuántos litros de agua caben en la piscina?*

   Solución. El volumen de la piscina es de

$$50\ m \cdot 25\ m \cdot 2\ m = 2500 \text{ metros cúbicos.}$$

   Recordemos que la equivalencia entre metros cúbicos y litros es

$$1000 \text{ litros} = 1\ m^3. \tag{3.5.20}$$

   Multiplicando esta igualdad por 2500, obtenemos que

$$2.500.000 \text{ litros} = 2500\ m^3. \tag{3.5.21}$$

   Es decir, en la piscina hay 2,5 millones de litros.

b) *El llenado de esta piscina, para el comienzo de las competencias, demoró 3 días ¿A qué rapidez, en $\frac{lts}{seg}$, se llenó?*

Solución. Tenemos que

- en 1 día entraron
$$\frac{2.500.000}{3} = 833{,}333,3 \text{ litros}$$
a la piscina.

- en 1 hora entraron
$$\frac{833.333,3}{24} = 34.722,2 \text{ litros}$$
a la piscina.

- en 1 minuto entraron
$$\frac{34.722,2}{60} = 578,7 \text{ litros}$$
a la piscina.

- en 1 segundo entraron
$$\frac{578,7}{60} = 9,6 \text{ litros}$$
a la piscina.

Así, la rapidez de llenado es de aproximadamente 9 litros y medio por segundo.
□

3.6. Ejercicios propuestos.

1. Determine si las variables siguientes son directamente o inversamente proporcionales, según sea el caso:

   a) Cantidad de kilos de pan comprados y el precio a cancelar, suponiendo que cada kilo de pan vale lo mismo.

   b) Rapidez de un auto y tiempo en llegar a un cierto lugar.

   c) Cajas de pelotas y pelotas por caja, si la cantidad total de pelotas es fija.

   d) Cantidad de vacas y fardos de pasto necesarios para alimentarlos, si todas las vacas comen por igual.

e) Cantidad de vacas y fardos de pasto por vaca necesarios para alimentarlos, si la cantidad total de fardos es la misma.

f) Altura de un poste y longitud de la sombra que proyecta.

g) Toneles y litros de vino por tonel, si la cantidad total de vino es fija.

h) Toneles y litros de vino que se desean almacenar, si todos los toneles tienen la misma capacidad.

i) Cantidad de manzanas y el peso total de ellas, si todas pesan lo mismo.

j) Cantidad de casas y el tiempo usado en construir el total de casas, si todas se construyen al mismo ritmo.

k) Cantidad de casas construidas por día, y el tiempo usado en construir el total de casas, si el tiempo usado en construir cada casa es el mismo.

m) Cantidad de obreros y el tiempo usado en construir una cantidad fija de casas.

2. Resuelva cada problema siguiente, de dos formas distintas, similarmente a como se resolvieron los ejercicios propuestos del inicio de este capítulo.

a) En la fiesta de cumpleaños de Cristóbal, 9 personas se comieron 3 pizzas. Bajo el supuesto que todos comen lo mismo, ¿cuántas pizzas son necesarias, para su fiesta de graduación, donde invitó a 108 personas?

b) Resolvamos el famoso problema del “señor Alto” y el “señor Bajo”:

Se presenta aquí una imagen del “señor Bajo”. Si medimos su altura con clips, él mide 6 clips de alto. Si medimos su altura con botones, él mide 4 botones de alto. El señor Bajo tiene un amigo llamado "señor Alto". Si medimos la altura del "señor Alto" en botones, él mide 6 botones de alto. Si los clips tienen el mismo porte, así también los botones, ¿cuál es la altura del "señor Alto", si lo medimos con clips?

c) Andrés pesa 107 kg y hoy decidió comenzar una dieta. La nutricionista le indicó que de ser riguroso en la dieta, debería bajar 6 kgs por cada 45 días. Andrés pretende llegar a su peso ideal, el cual es 75 kg. ¿Cuántos meses y días deberán transcurrir para que Andrés obtenga su peso ideal? Dato: Use que 1 mes tiene 30 días.

d) Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

e) La hinchada del club de fútbol Cebollitas, debe viajar a alentar su equipo. Se disponen a ir en 12 buses, con capacidad para 30 personas cada uno. Dado el poco dinero que poseen, deciden sólo ir en 9 buses. Si se pretende que vaya la misma cantidad de personas por bus. ¿Cuántas personas por bus deben viajar?

f) Para la cena de fin de año de una empresa, el encargado de organizar el evento desea comprar bebidas al por mayor. En la distribuidora A le venden packs de 6 bebidas en \$7000 y en la distribuidora B le venden 8 bebidas en \$9000 Si desea comprar 24 bebidas. ¿En cuál de las distribuidoras es más conveniente comprar?

g) La jefatura de una carrera financia la estadía de 10 estudiantes en un congreso en Argentina, aportando con un monto de \$150.000 por persona. Durante esta semana, se informó que el congreso de cambiará de fecha y durará más de lo presupuestado originalmente. Por esta razón, 4 estudiantes deciden no ir al congreso. Si el monto total invertido por la jefatura de carrera no cambia, ¿cuánto dinero por persona se aportará?

h) Según la segunda ley de movimiento de Newton, si empujamos un objeto con una fuerza fija, entonces la aceleración que experimenta es inversamente proporcional a su masa. Si José empuja a un elefante de 5400 kgs con la misma fuerza que a una persona de 54 kgs, ¿a cuántas veces la aceleración que experimenta el elefante, corresponde la aceleración que experimenta la persona empujada?

i) Un globo de Helio que ocupa 100 litros de volumen, está situado a nivel del mar, donde la presión del aire es de 1 atmósfera. El globo sube hasta a una altura en donde la presión es de $0,054$ atmósferas. La ley de Boyle nos indica que la presión del aire y el volumen del globo son variables inversamente proporcionales. ¿Cuál es el volumen del globo en esta nueva altura?

j) Cuando una persona se sumerge en el agua, mayor es la presión del agua sobre los tímpanos. Más específicamente, la presión del agua es directamente proporcional a la profundidad en la cual se ubica la persona. Dos buzos A y B se sumergen en un lago. Si el buzo A se ubica una profundidad correspondiente a 10 veces la profundidad de B, ¿a cuántas veces la presión que siente A corresponde la presión que siente B?

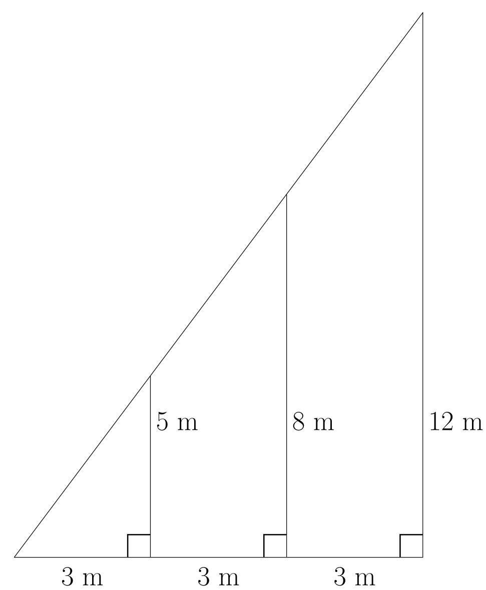
3. En cada problema de proporcionalidad compuesta siguiente, reduzca el problema a sólo dos variables, identifique el tipo de proporcionalidad entre éstas, y luego resuélvalo.

a) Para una fiesta de gala de un estudio de salsa, un grupo de 6 costureras realizó 20 trajes en un plazo de 10 días. Debido al gran interés por asistir al evento, el estudio encarga 25 trajes más, pero debido a lo próximo del evento, se necesitan los trajes en sólo 5 días. Dado que las costureras no pretenden trabajar más horas diarias de lo presupuestado, deciden contratar más personas para realizar el trabajo, ¿cuántas costureras deben contratar para realizar el trabajo en el tiempo pedido?

b) Seis chicos durante 10 días de campamento han gastado en comer \$60000 pesos. En las mismas condiciones, ¿cuánto gastarán en comer 5 chicos durante 15 días de campamento?

c) Un excursionista está haciendo un recorrido de 300 kms. Durante los primeros 4 días, durante 6 horas diarias, ha recorrido 120 kms. ¿En cuántos días más completará el recorrido, si durante los días restantes anda sólo 4 horas diarias?

4. Alrededor de un estadio se proyecta construir un techo. El ingeniero a cargo muestra a sus obreros el diseño del perfil:



y les dice: “Cada 3 metros colocaremos 3 sujecciones verticales, las cuales medirán 5 m, 8 m y 12 metros, respectivamente. Posteriormente, colocaremos el techo sobre cada sujección vertical, tal como se aprecia en el dibujo”. ¿Será posible construir un techo de este modo? Justifique.

5. Sandra quiere comprarse un sofá que vale \$210000. Su madre le dice que le aportará \$5 por cada \$2 que Sandra ahorre. ¿Cuánto dinero aportará cada una?

6. La oficina de Seguridad Nacional ha promulgado una ley la cual afirma que en cada espectáculo masivo debe haber, a lo menos, 1 guardia por cada 30 asistentes,

de lo contrario habrán severas multas. En la fiesta electrónica que se realizó ayer en el Casino, habían 630 asistentes y 18 guardias.

a) ¿Fue multado el casino?

b) Si fue multado, ¿cuántos asistentes, a lo menos, deberían ingresar o irse de la fiesta para cumplir con lo estipulado por la ley?

c) Si fue multado, ¿cuántos guardias a lo menos deberían ingresar o irse de la fiesta para cumplir con lo estipulado por la ley?

7. El fin de semana pasado se realizaron festivales simultáneos en Viña del Mar y en La Serena, con gran cantidad de asistentes en ambas ciudades. Según el reporte policial, en Viña del Mar habían 4000 autos por cada 3 kms cuadrados. En tanto, que en la Serena habían 3000 autos por cada 2 kms cuadrados, ¿cuál ciudad estaba más congestionada durante el festival? Justifique.

8. Transforme:

a) Sueldo mínimo en USA, el cual es de 1256 dólares al mes, a pesos chilenos (Use 1 dólar = 700 pesos chilenos).

b) Rapidez de un guepardo (el animal más rápido del mundo), la cual es de $58\frac{km}{h}$, a $\frac{m}{s}$.

c) Altura del World Trade Center, el cual es de 1730 pies, a metros (Use que 1 pie = 0,3048 metros).

d) La rapidez del flujo sanguíneo ,de un adulto en reposo, el cual es de $5\frac{litros}{min}$, a $\frac{cc}{seg}$.

e) Años en los que se construyó la muralla China, sabiendo que se construyó en 105,12 millones de minutos.

9. Use calculadora para responder los siguientes problemas:

   a) El 27 de Agosto de 2003, Marte estuvo a la menor distancia de la Tierra en 60000 años. Esta distancia correspondió a 55,76 millones de kms. Si esta distancia se hubiese mantenido, y se construyera un puente que une la Tierra con Marte, poniendo en marcha un grupo de viajeros que va a 100 $\frac{km}{h}$, ¿en cuánto tiempo debe estar en Marte? Use que 1 mes equivale a 30 días.

   b) Cristóbal recorrió el mundo en sus vacaciones. Fue a Marruecos, cuya moneda es el Dirham Marroquí, donde encontró la siguiente equivalencia

   $$100 \text{ pesos chilenos} = 1{,}54 \text{ Dirham Marroquí}$$

      b1) Él quiso cambiar 350 mil pesos chilenos a dinero marroquí, para sus gastos durante su estadía en este país. En la casa de cambio le dan 5385 Dirham Marroquí. ¿Lo engañaron en la casa de cambio?

      b2) Al irse de Marruecos, Cristóbal desea cambiar los 2000 Dirham Marroquí que le sobraron a euros, dado que se va a España. ¿Cuántos euros le deben dar si

      $$1 \text{ euro} = 730 \text{ pesos chilenos?}$$

   c) En Inglaterra, ocurrió el recórd de la tortuga más rápida del mundo, la cual corrió una distancia de 18 pies en 19,59 segundos. Usando el hecho que 1 pie = 0,3048 metros, responda:

      c1) ¿Cuál es la rapidez de la tortuga, en $\frac{km}{h}$?

      c2) ¿En cuánto tiempo la tortuga recorrería la carrera de los 100 metros planos?

      c3) El atleta jamaiquino Usaint Bolt, recorrió los 100 metros planos, en un tiempo de $9,58$ segundos. ¿Cuántas veces la rapidez de Bolt es la rapidez de la tortuga?

d) La densidad d de una sustancia, se define como el cuociente entre su masa y su volumen, o sea

$$d = \frac{m}{v}$$

d1) Si 1 litro de aceite pesa 920 gramos y 1 litro de leche pesa 1 kilo y 32 gramos, ¿cuál es la densidad de la leche y la del aceite, en $\frac{grs}{cc}$?

d2) Un trozo de madera tiene una densidad de $400\frac{kg}{m^3}$. Se sabe que un objeto flota en un liquido si su densidad es menor que la densidad del líquido. ¿Flota este pedazo de madera en la leche? ¿y en el aceite?

e) La velocidad de la luz es de 300000 $\frac{km}{s}$. El perímetro de la Tierra, es de 40075 kms. ¿Cuántas vueltas a la tierra da la luz en 1 segundo?

f) El grosor de un billete de \$1000 pesos chilenos es $\frac{1}{10}$ de un milímetro.

f1) ¿Cuántos billetes debemos arrumar desde el piso, para llegar la cima de la Torre Entel, la cual tiene 127 metros de altura?

f2) ¿Cuál será el monto total del dinero utilizado?

g) Un año luz es una unidad de medida de distancia, la cual corresponde a la distancia que recorre la luz en 1 año. Si la velocidad de la luz es de 300.000 kms por segundo,

g1) ¿A cuántos kms corresponde 1 año luz?

g2) La distancia entre el Sol y su estrella más cercana corresponde a $3{,}9 \cdot 10^{13}$ kms ¿A cuántos años luz está el Sol de esta estrella?
Indicación: Use la aproximación $\frac{3{,}9}{9{,}46} = 0{,}41$.

g3) ¿A cuántos kms^3 corresponde un año luz cúbico (unidad de medida de volumen)?

g4) ¿Cuál es el volumen de nuestra galaxia en años luz cúbicos, si ésta corresponde a $3{,}3 \cdot 10^{61}\ m^3$?

h) Un grano de arena tiene como máximo un volumen de $8{,}8 \cdot 10^{-9}$ metros cúbicos. Por otro lado, un átomo de hidrógeno, tiene un volumen de $6{,}54 \cdot 10^{-32}$ metros cúbicos.

h1) ¿Cuántos atómos de hidrógeno cabrían dentro de un grano de arena? Use la aproximación $\dfrac{8{,}8}{6{,}54} = 1{,}3$

h2) ¿Con cuántos gramos de arena llenamos una botella de Coca Cola de 2,5 litros? Use la aproximación $\dfrac{2{,}5}{8{,}8} = 0{,}28$.

i) El volumen de agua en todos los oceános del mundo corresponde aproximadamente a $1,4 \cdot 10^{18}\ m^3$. ¿Cuántas botellas de Coca Cola de 2.5 litros podría llenarse con esta agua?

Indicación: Use la aproximación $\frac{1{,}4}{2{,}5} = 0{,}56$.

Capítulo 4

Números reales y lenguaje algebraico.

4.1. Introducción.

El Álgebra fundamentalmente representa la generalización de lo aritmético. Es decir, el Álgebra, a través de letras, expresa patrones númericos y opera con ellos, de acuerdo a reglas ariméticas ya conocidas. Por ejemplo, la rapidez constante con la que un auto recorre una distancia de 300 km, corresponde a

$$\frac{300}{t},$$

donde t es el tiempo que demora en realizar el trayecto. Con ello podríamos determinar, a través de una ecuación, cuánto tiempo demorará en llegar a destino si va a 80 $\frac{km}{h}$. Por otro lado, a través de una inecuación, se puede determinar cuánto demoraría si debe ir a no más de $100\frac{km}{h}$, esto debido a desperfectos en su automóvil. De modo general, el Álgebra nos permite obtener modelos de situaciones en diversos contextos, tales como Economía, Ingenería, Ciencias de la salud, etc. y así de poder predecir el comportamiento de ciertos fenómenos en el futuro.

En este capítulo estudiaremos la operatoria algebraica básica, y la aplicaremos a la resolución de problemas, tales como

Hay varios conejos y jaulas. Si colocamos un conejo por cada jaula, sobra un conejo. Si colocamos dos conejos por cada jaula, sobra una jaula. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?

En este tipo de problemas es muy importante distinguir qué representa cada una de las incógnitas, para luego obtener una ecuación o un sistema de ecuaciones que nos permite resolver el problema. Por ejemplo, en el problema recién mencionado, podemos expresar por x a la cantidad de conejos e y a la cantidad de jaulas, para luego obtener, mediante un sistema de ecuaciones, que los conejos son 4 y las jaulas son 3.

También debemos apuntar que la operatoria algebraica vista acá es de vital importancia en cualquier curso posterior de Matemática, tal como Cálculo. Por ende, es importante tener una base sólida, de donde se aprendan las herramientas de la forma más simple posible.

4.2. El lenguaje algebraico.

Ejercicio 4.2.1. *Don Daniel tiene un almacén, donde el kilo de papas vale actualmente \$700.*

a) *Usando este dato, completa la tabla que muestra kilos de papas comprados y su valor, además de cómo se obtuvo (sin usar los datos de las filas anteriores):*

	Kilos	*Valor*	*¿Cómo obtuve el valor?*
a)	*2*		
b)	*4*		
c)	*6*		
d)	*9*		

Solución. La tabla completada es:

	Kilos	Valor	¿Cómo obtuve el valor?
a)	2	1400	$700 \cdot 2$
b)	4	2800	$700 \cdot 4$
c)	6	4200	$700 \cdot 6$
d)	9	4900	$700 \cdot 9$

b) *En base a lo respondido en la tabla, conjeture: ¿Cuál es el valor de k kilos de papas?*

Solución. El valor de k kilos de papas es de $700 \cdot k$ pesos.

Ejercicio 4.2.2. *Una empresa de telefonía ofrece un plan mensual consistente en un cargo fijo de* \$10000 *más* \$40 *por cada minuto hablado.*

a) *Completa la tabla con el valor mensual del plan a cancelar, según los minutos hablados en el mes (sin usar los datos de las filas anteriores):*

	Minutos hablados	*Valor del plan*	*¿Cómo obtuve el valor?*
a)	*100*		
b)	*150*		
c)	*180*		

Solución. La tabla completada es:

	Minutos hablados	Valor del plan	¿Cómo obtuve el valor?
a)	100	14000	$10000 + 40 \cdot 100$
b)	150	16000	$10000 + 40 \cdot 150$
c)	180	172000	$10000 + 40 \cdot 180$

b) *Si hablé n minutos en el mes, conjeture: ¿cuál es el valor del plan?*

Solución. El valor del plan es de $10000 + 40n$ pesos. □

Observación 4.2.1. Para expresar un patrón numérico, cuando es necesario se usan letras.

Definición 4.2.1. *Una* ***expresión algebraica*** *es una expresión que entrelaza números y letras mediante operaciones aritméticas.*

Ejercicio 4.2.3. *Si x es un número natural, obtenga una expresión algebraica en x para:*

a) *su sucesor.*

Solución. $x + 1$.

b) *su doble.*

Solución. $2x$.

c) *su mitad.*

Solución. $\frac{x}{2}$.

d) *sus tres cuartas partes disminuidas en una unidad.*

Solución. $\frac{3}{4}x - 1$.

e) *su triple excedido en 4 unidades.*

Solución. $3x + 4$.

f) *su* $20\,\%$.

Solución. $\frac{x}{5}$.

Ejercicio 4.2.4. *Considere la siguiente tabla con expresiones algebraicas:*

$x - 20$	$4 + x$	$2x + 1$
$4x$	$\dfrac{x}{2}$	$20 - x$
$2x$	$x - \dfrac{x}{10}$	$3x$

Indique si cada enunciado siguiente corresponde a alguna de las expresiones de la tabla.

a) *La edad que tenía hace 20 años, suponiendo que hoy tengo x años de edad, con $x > 20$.*

Solución. Es $x - 20$ años, expresión que aparece en la tabla.

b) *El perímetro de un cuadrado de lado de longitud x.*

Solución. $4x$ unidades, expresión que aparece en la tabla.

c) *El* $10\,\%$ *del precio de un pantalón, considerando que el pantalón vale x pesos.*

Solución. El $10\,\%$ de su precio corresponde a $\frac{x}{10}$ pesos, expresión que no aparece en la tabla.

d) *El número total de patas de x gallinas.*

Solución. Como cada gallina tiene 2 patas, entonces x gallinas tienen en total $2x$ patas, expresión que aparece en la tabla.

e) *El nuevo precio de un pantalón, si se le realizó un descuento del* $10\,\%$ *con respecto a su precio original* x.

Solución. Bajo las condiciones dadas, su nuevo precio es $x - \frac{x}{10}$, expresión que aparece en la tabla.

f) *El dinero que posee Pepe, si en un bolsillo tiene* $\$x$*, y en el otro bolsillo tiene el doble de* $\$x$.

Solución. En un bolsillo tiene x pesos, y en el otro $2x$ pesos, entonces en total tiene $3x$ pesos, expresión que aparece en la tabla.

g) *La longitud de cada lado de un cuadrado de perímetro* x.

Solución. Es $\frac{x}{4}$ unidades, expresión que no aparece en la tabla.

h) *El número total de patas de* x *cerdos.*

Solución. Cada cerdo tiene 4 patas, luego x cerdos tienen en total $4x$ patas, expresión que aparece en la tabla. □

4.3. Números reales.

El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, corresponde a la unión entre el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ y el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$. Es decir,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Algunos ejemplos de números reales son

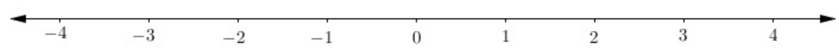
$$1, 3, -4, \frac{3}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{4}{9},$$

los cuales son también números racionales, y

$$\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi,$$

los cuales son también números irracionales.

El conjunto de los números reales es representado en una recta numérica:



donde usualmente se representan sólo algunos números enteros. Sin embargo, entendemos que entre dos números enteros consecutivos, existen infinitos números reales. Por ejemplo, entre 2 y 3, están posicionados números como $2{,}1; 2{,}3; 2.\overline{7}$, etc.

Observación 4.3.1. Queremos realizar la suma

$$143 + 30 + 40.$$

Es evidente que debemos sumar dos números primero. En este caso, es más rápido realizar primero la suma $30 + 40$, y luego a lo obtenido sumarle 143. Es decir, tenemos que

$$143 + (30 + 40) = 143 + 70 = 213.$$

Sin embargo, también podemos efectuar primero la suma $143 + 30$, y a lo obtenido sumarle 70. Es decir,

$$(143 + 30) + 70 = 163 + 70 = 213.$$

En definitiva, tenemos la igualdad

$$143 + (30 + 40) = (143 + 30) + 70,$$

lo que quiere decir que para realizar esta suma de 3 números no importó cuáles números se sumaron primero. Este axioma, que se cumple para cualquier terna de números reales, se llama **asociatividad de la suma**.

Axioma 4.1. *(Asociatividad de la suma)*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c.$$

La suma también es conmutativa, es decir, al sumar dos números reales, podemos cambiar el orden de los sumandos, y esto no altera el resultado:

Axioma 4.2. *(Conmutatividad de la suma)*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a.$$

Antes de ver el tercer axioma, veamos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.3.1. *¿Existe algún número real x que cumpla que $5 + x = x + 5 = 5$, es decir, que al sumarlo con 5, el resultado sigue siendo 5?*

Solución. Si, $x = 0$, en efecto

$$5 + 0 = 5 = 0 + 5.$$

□

Observación 4.3.2. En general, para cualquier número real a, se tiene que

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Es decir, al sumarle 0 a cualquier número real a, el resultado no varía, por lo que decimos que 0 es el **elemento neutro** para la suma.

Axioma 4.3. *(Existencia de elemento neutro aditivo)*

$$\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a.$$

Veamos otro ejercicio antes del siguiente axioma:

Ejercicio 4.3.2. *¿Existe algún número real x que cumpla que $5 + x = x + 5 = 0$, es decir, que al sumarlo con 5, el resultado es 0?*

Solución. Si, $x = -5$, en efecto,

$$5 + (-5) = 0 = (-5) + 5.$$

El número real -5 se dice ser el **opuesto aditivo** de 5. □

Observación 4.3.3. En general, dado un número real a, su **opuesto aditivo** es un número real x que satisface que

$$a + x = x + a = 0.$$

Denotamos tal x como $-a$. Note que $-a$ no siempre es negativo.

Axioma 4.4. *(Existencia de opuesto aditivo)*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

La multiplicación de números reales también es asociativa y conmutativa:

Axioma 4.5. *(Asociatividad de la multiplicación)*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Axioma 4.6. *(Conmutatividad de la multiplicación)*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a.$$

Por otro lado, 1 es el elemento neutro de la multiplicación:

Axioma 4.7. *(Existencia de elemento neutro multiplicativo)*

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Además, cada número real a con $a \neq 0$, tiene un inverso multiplicativo:

Axioma 4.8. *(Existencia de inverso multiplicativo)*

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Observación 4.3.4. Si nos piden realizar mentalmente la multiplicación $26 \cdot 7$, una opción es, que intuitivamente, expresemos 26 como $20 + 6$, y luego tenemos que

$$26 \cdot 7 = (20 + 6) \cdot 7 = 20 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = 140 + 42 = 182.$$

En el paso

$$(20+6)\cdot 7 = 20\cdot 7 + 6\cdot 7.$$

decimos que el 7 se **distribuye** en cada uno de los sumandos 20 y 6. Este axioma, que se cumple para cualquier terna de números reales, se llama **distributividad** de la multiplicación con respecto a la suma.

Axioma 4.9. *(Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición)*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$$

Observación 4.3.5. Sean a,b,c,d números reales. Consideremos la multiplicación

$$(a+b)(c+d).$$

Distribuyendo $a+b$ en cada uno de los términos de $(c+d)$, obtenemos que

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d.$$

Aplicando nuevamente la distributividad, ahora en cada paréntesis de la derecha, obtenemos que

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd. \tag{4.3.1}$$

De este modo, entendemos que para realizar la multiplicación $(a+b)(c+d)$, multiplicamos cada término de $a+b$ con cada término de $c+d$, y luego los sumamos.

Proposición 4.3.1.

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R} : (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

Observación 4.3.6. Consideremos la multiplicación $27\cdot 36$. Expresamos

$$27\cdot 36 = (20+7)(30+6).$$

y usamos la propiedad anterior. Es decir, multiplicamos término a término, de modo que

$$(20+7)(30+6) = 20\cdot 30 + 20\cdot 6 + 7\cdot 30 + 7\cdot 6.$$

De este modo,

$$27 \cdot 36 = (20+7)(30+6) = 600 + 120 + 210 + 42 = 972$$

En resumen, podemos realizar una multiplicación entre dos números naturales usando explicítamente la distributividad, y sin necesidad de usar los procedimientos algorítmicos que nos enseñaron en nuestra infancia, los cuales de todos modos se basan en este axioma.

Proposición 4.3.2. *El neutro aditivo* 0*, neutro multiplicativo* 1*, inverso aditivo* $-x$ *e inverso multiplicativo* $x^{-1}, x \neq 0$ *son únicos.*

Proposición 4.3.3.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 0 = 0.$$

Observación 4.3.7. La propiedad anterior nos plantea que, cada vez que multiplicamos un número real por 0, el resultado es 0.

Utilizando los axiomas recién vistos, se deducen las reglas algebraicas que rigen la operatoria con igualdades, las cuales serán la base para resolver ecuaciones.

Proposición 4.3.4. *Si* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, se tiene que*

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z.$$

Observación 4.3.8. La interpretación que le damos a esta propiedad, es que si sumamos o restamos la misma cantidad en ambos miembros de una igualdad, esta igualdad se mantiene.

Proposición 4.3.5. *Si* $x, y, z \in \mathbb{R}$*, se tiene que*

$$x = y \Leftrightarrow xz = yz,\ z \neq 0.$$

Observación 4.3.9. La interpretación que le damos a esta propiedad, es que si multiplicamos o dividimos la misma cantidad distinta de 0, en ambos miembros de una igualdad, ésta se mantiene. Note que si la cantidad es 0, esta propiedad no es cierta, dado que por ejemplo

$$5 \cdot 0 = 3 \cdot 0,$$

pero no es cierto que $5 = 3$.

Definición 4.3.6. *Sean x e y dos números reales. Se llama **diferencia** entre x e y, en ese orden, la cual es denotada por $x - y$, a la expresión*

$$x - y := x + (-y).$$

Observación 4.3.10. Es decir, para x e y dos números reales, restar x con y consiste en sumar x con el opuesto aditivo de y.

Definición 4.3.7. *Sean x, y dos números reales. Si $y \neq 0$, se llama **cuociente** entre x e y, el cual es denotado por $x \div y$ o $\frac{x}{y}$, a la expresión*

$$x \div y := xy^{-1}.$$

Observación 4.3.11. Es decir, para x, y dos números reales, dividir x entre y consiste en multiplicar x por el inverso multiplicativo de y.

Proposición 4.3.8. *Sean x, y dos números reales. Se tiene que*

6.1) $(-x)y = -xy$

6.2) $(-x)(-y) = xy$

Observación 4.3.12. Analizemos la propiedad anterior. Supongamos que x e y son números positivos. Asumimos que su producto xy es positivo. Se tiene que

- en 6.1), $-x$ es negativo e y es positivo, por lo que $-xy$ es negativo. De este modo, deducimos que el producto de dos números de distinto signo, es siempre negativo.

- En 6.2), $-x$ y $-y$ son negativos, y xy es positivo. De este modo, deducimos que el producto de dos números negativos es siempre positivo.

4.4. Ecuaciones.

Definición 4.4.1. *Una* ***ecuación*** *es una igualdad en la que intervienen una o más incógnitas. El* ***grado*** *de una ecuación consiste en el mayor exponente al que se encuentra elevada cualquiera de las incógnitas.*

Estudiaremos las ecuaciones de primer y de segundo grado, cuya incógnita es un número real:

4.4.1. Ecuaciones de primer grado.

Ejercicio 4.4.1. *Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:*

a) $2x + 1 = 5$.

Solución. Intentamos despejar la incógnita x. Para ello, cada operación que realizamos, la hacemos en ambos miembros de la igualdad, de modo que ésta se mantenga (formalmente, lo que en realidad haremos es usar la propiedad 3.4 y 3.5 de números reales). Esto es como una balanza en equilibrio: si colocamos peso en un platillo, entonces debemos colocar el mismo peso en el otro platillo, de modo que el equilibrio se mantenga.

De este modo, restamos 1 en ambos miembros de la ecuación, obteniendo

$$2x = 4.$$

Dividimos por 2 en ambos miembros de la última igualdad, de este modo

$$x = 2.$$

Note que si reemplazamos $x = 2$ en la ecuación original, obtenemos que

$$2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$

lo cual comprueba que nuestra solución es correcta (la comprobación de todos modos no es necesaria). Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{2\}$. $\square$

b) $5x + 5 = 9 - 3x$.

Solución. Para despejar x, primero agrupamos los términos que dependan de x en un miembro de la igualdad, y los términos que no dependen de x en el otro miembro.

Sumamos $3x - 5$ en ambos miembros, lo que se puede interpretar como que $3x$ "pasa sumando" al miembro izquierdo, y 5 "pasa restando" al miembro derecho. De este modo, obtenemos la ecuación equivalente

$$5x + 3x = 9 - 5,$$

de donde

$$8x = 4.$$

Dividimos ambos miembros de la última igualdad por 8, lo que se puede entender como que 8 pasa dividiendo al miembro derecho de la igualdad, obteniendo que

$$x = \frac{4}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

De este modo, el conjunto solución es $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $2x - (x - (x - 50)) = x - (800 - 3x)$.

Solución. Intentamos deshacer los paréntesis para luego despejar x. Si hay un signo menos justo fuera de un paréntesis, esto significa que éste se esta multiplicando por -1, luego usando la distributividad, este -1 multiplica a todos los términos que están dentro del paréntesis, cambiando los signos de éstos. De este modo, en un primer paso obtenemos

$$2x - (x - x + 50) = x - 800 + 3x.$$

Luego,

$$2x - 50 = 4x - 800.$$

Así, dejando los términos en x a la derecha, los números a la izquierda, operando y luego permutando la igualdad, obtenemos que

$$2x = 750,$$

de donde

$$x = 375.$$

Por lo tanto, $S = \{375\}$.

d) $\dfrac{3x+1}{7} - \dfrac{2-4x}{3} = \dfrac{-5x-4}{14} + \dfrac{7x}{6}$.

Solución. Intentamos deshacernos de las fracciones lo antes posible. Para tal efecto, no es necesario operar con ellas, simplemente multiplicamos la ecuación por el MCM de los denominadores, esto es, por 42. De este modo, obtenemos que

$$6(3x+1) - 14(2-4x) = 3(-5x-4) + 7 \cdot 7x.$$

Usando distributividad, obtenemos ahora que

$$18x + 6 - 28 + 56x = -15x - 12 + 49x.$$

Despejamos x, obteniendo que

$$x = \frac{1}{4}.$$

Es decir, $S = \{\frac{1}{4}\}$. □

Veamos algunas aplicaciones. Los siguientes 3 problemas, los resolveremos planteando inicialmente preguntas que nos permiten llegar a la ecuación, para luego resolverla.

Ejercicio 4.4.2. *Un padre tiene 41 años de edad y su hijo 7 años de edad. El padre le dijo hoy al hijo: "cuando mi edad sea el triple de la tuya, te regalaré un auto". ¿En cuántos años más ocurrirá este suceso?*

La incógnita, la cual llamaremos x, corresponde a la cantidad de años que deben transcurrir para que el padre le compre un auto al hijo.

a) *Determine, en términos de x, la edad del hijo cuando transcurran estos x años.*

Solución. $7 + x$ años.

b) *Determine, en términos de x, la edad del padre cuando transcurran estos x años.*

Solución. $41 + x$ años.

c) *Resuelva el problema.*

Solución. Usando lo obtenido en a) y en b), las edades del padre e hijo en x años, deben satisfacer la ecuación

$$41 + x = 3(7 + x),$$

(note que para igualar ambas expresiones, multiplicamos por 3 la menor edad, es decir $7 + x$) cuya solución es

$$x = 10.$$

Es decir, el padre le regalará un auto a su hijo en 10 años más. $\square$

Ejercicio 4.4.3. *Andrés fue al mall y se compró un traje, un sombrero y un libro. El libro le costó \$20000 menos que el traje y el sombrero le costó \$5000 más que el libro. Si pagó \$88000 por los tres artículos, ¿cuánto pagó por cada artículo?*

Escogemos como x como el precio del traje.

a) *Determine el precio del libro, en términos de x.*

Solución. $x - 20000$ pesos.

b) *Determine el precio del sombrero, en términos de x.*

Solución. $x - 20000 + 5000$, o sea, $x - 15000$ pesos.

c) *Resuelva el problema.*

Solución. En base a lo obtenido en *a*) y en *b*), tenemos que la ecuación que resuelve este problema es

$$x + (x - 20000) + (x - 15000) = 88000,$$

de la cual se deduce que $x = 41000$. Es decir, el traje le costó \$41000, el libro

$$\$41000 - \$2000 = \$21000,$$

y el sombrero

$$\$41000 - \$15000 = \$26000.$$

$\square$

Ejercicio 4.4.4. *Teniendo en cuenta el plan de producción de una fábrica de autómoviles, se deben fabricar 40 autos diarios. Sin embargo, antes de empezar con la fabricación de los automóviles, se decide cambiar el plan y ahora se fabricarán 45 autos diarios. Con este nuevo plan, se construyó el total de autos propuestos 3 días antes de lo que se pretendía con el plan inicial. ¿En cuántos días se construyeron los autos?*
La incógnita, denotada por x, es la cantidad de días del plan inicial.

a) *Exprese en términos de x, el número de días que duró el nuevo plan.*

   Solución. $x - 3$ días.

b) *Obtenga, según el plan inicial, una expresión en términos de x, que represente el número de autos que se construyeron.*

   Solución. $40x$.

c) *Obtenga, según el nuevo plan, una expresión en términos de x, que represente el número de autos que se construyeron.*

   Solución. $45(x - 3)$.

d) *Resuelva el problema*

Solución. Según lo obtenido en b) y c), y dado que el número de autos a construir es independiente del plan, planteamos la ecuación

$$40x = 45(x - 3),$$

cuya solución es $x = 27$. De este modo, los autos se construyeron en $27 - 3 = 24$ días. □

4.5. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

En esta sección estudiaremos cómo resolver sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas, donde estas ecuaciones son de primer grado. Posteriormente resolveremos algunas aplicaciones de éstos. Ejemplos de estos sistemas son

- $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$, cuya solución única es $x = 1$ e $y = 2$.
- $\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x - 2y = 4 \end{cases}$, el cual no tiene solución.
- $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$, el cual tiene infinitas soluciones.

Nuestra pregunta es, ¿cómo resolver este tipo de sistemas de ecuaciones?

Ejercicio 4.5.1. *Considere el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

a) *Para resolverlo, intentaremos eliminar una de las variables, en este caso y. Para ello, multiplicamos la primera ecuación por un número, de modo que al sumar* *ambas ecuaciones, la variable y se cancele, ¿por cuál número multiplicamos la primera ecuación para que ocurra esto?*

Solución. Por 2, ya que de este modo, el sistema queda como

$$\begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Al sumar estas ecuaciones, se cancela y, y nos queda la ecuación $5x = 5$.

b) *Determine la solución de este sistema.*

Solución. Como de a) tenemos que $5x = 5$, entonces $x = 1$. Luego, reemplazando $x = 1$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de y. En efecto, si reemplazamos $x = 1$ en la primera ecuación $x - y = -1$, obtenemos que $y = 2$. De este modo, la solución es $x = 1$ e $y = 2$. Podemos expresar la solución como un par ordenado (x, y), de modo que el conjunto solución es

$$S = \{(1, 2)\}.$$

Ejercicio 4.5.2. *Considere el sistema*

$$\begin{cases} 6x + 5y = -1 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases}$$

a) *Para resolverlo, intentaremos eliminar la variable x. En este caso, multiplicamos la primera ecuación por un número y la segunda ecuación por otro número, de modo que al sumar ambas ecuaciones se eliminen las x. ¿Cuáles son esos números?*

Solución. El coeficiente de x en cada ecuación, debe ser un múltiplo común de 6 y 4, pero con distinto signo. Como $mcm(6, 4) = 12$, entonces multiplicamos por -2 la primera ecuación y por 3 la segunda ecuación, obteniendo el sistema equivalente

$$\begin{cases} -12x - 10y = 2 \\ 12x + 27y = 15 \end{cases},$$

de donde al sumar sus ecuaciones obtenemos que $17y = 17$.

b) *Obtenga la solución de este sistema.*

Solución. De a), obtuvimos la ecuación $17y = 17$, de la cual se deduce que $y = 1$. Al reemplazar $y = 1$ en la primera ecuación del sistema original, obtenemos que $x = -1$. Así, $S = \{(-1, 1)\}$. □

Ejercicio 4.5.3. *Obtenga la solución del sistema*

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x - 2y = 4. \end{cases}$$

Solución. Si multiplicamos por 2 la primera ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ -2x - 2y = 4. \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones de este nuevo sistema, obtenemos que $0 = 2$, lo cual es falso, de este modo el sistema no tiene solución. Es decir, su conjunto solución es $S = \emptyset$. □

Ejercicio 4.5.4. *Resuelva el sistema*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$$

Solución. Multiplicando por 2 la primera ecuación y luego sumando ambas ecuaciones, obtenemos que $0 = 0$. Como esta igualdad es evidentemente válida, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Para obtener algunas de ellas, consideremos que $x = t$, con t un número real cualquiera. Reemplazando $x = t$ en la primera ecuación, tenemos que

$$t + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - t. \tag{4.5.1}$$

De este modo, podemos obtener algunas soluciones particulares, dándole valores a t, y obteniendo el respectivo valor de x e y. En efecto, usando (**??**), tenemos que

- si $t = 1$, entonces $x = 1$ e $y = 0$.
- si $t = 4$, entonces $x = 4$ e $y = -3$.

De este modo, el conjunto solución es

$$S = \{(t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Veamos algunas aplicaciones:

Ejercicio 4.5.5. *Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?*

Solución. Sea x la cantidad de cerdos e y la cantidad de pavos en la granja. Como cada animal tiene una sóla cabeza, entonces

$$x + y = 35. \tag{4.5.2}$$

Por otro lado, cada cerdo tiene 4 patas y cada pavo sólo 2. De este modo, obtenemos la ecuación

$$4x + 2y = 116, \tag{4.5.3}$$

la cual es equivalente a

$$2x + y = 58. \tag{4.5.4}$$

Resolvemos el sistema que consiste en las ecuaciones (**??**) y (**??**), es decir, el sistema

$$x + y = 35, \; 2x + y = 58,$$

obtenemos que $x = 23$ e $y = 12$. Por lo tanto, en la granja habían 23 cerdos y 12 pavos.

□

Ejercicio 4.5.6. *Hay varios conejos y jaulas. Si colocamos un conejo por cada jaula, sobra un conejo. Si colocamos dos conejos por cada jaula, sobra una jaula. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?*

Solución. Sean x el número de conejos e y el número de jaulas. El hecho de que al colocar un conejo por cada jaula, sobra un conejo, nos dice que hay 1 conejo más que jaulas, por lo que la primera ecuación es

$$x - y = 1. \tag{4.5.5}$$

El hecho de que al colocar dos conejos por jaula, sobra una jaula, nos dice que hay una jaula más que la mitad de los conejos, por lo que la segunda ecuación es

$$y - \frac{x}{2} = 1, \tag{4.5.6}$$

la cual es equivalente a

$$2y - x = 2. \tag{4.5.7}$$

De este modo, resolvemos el sistema de las ecuaciones (**??**) y (**??**), es decir, el sistema

$$x - y = 1, \ -x + 2y = 2.$$

Para ello, usaremos un método distinto al como hemos resuelto los sistemas anteriores. Esta vez despejaremos una incógnita de algunas de las ecuaciones y la reemplazaremos en la otra ecuación. En este caso, despejamos x de la primera ecuación, obteniendo que $x = 1 + y$. Reemplazamos esta expresión en $-x + 2y = 2$, obteniendo que

$$-(1 + y) + 2y = 2.$$

Resolviendo esta ecuación de primer grado, concluimos que $y = 3$. De este modo, $x = 1 + y = 1 + 3 = 4$. Por lo tanto, hay 4 conejos y 3 jaulas. □

4.6. Factorización.

Consideremos los productos

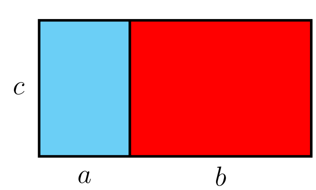
- $x^2(x-1) = x^3 - x^2$,
- $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$,
- $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$,

los cuales se obtuvieron multiplicando cada miembro de la izquierda término a término. Nos preguntamos ahora cómo a partir del miembro derecho de cada una de las igualdades anteriores, podemos obtener el miembro izquierdo. Es decir, dada una expresión algebraica consistente en una suma y/o resta de términos, la pregunta es cómo podemos expresar ésta como producto de expresiones algebraicas más sencillas. El proceso de obtención de este producto, se denomina **factorización** de la expresión algebraica dada.

Definición 4.6.1. ***Factorizar*** *una expresión algebraica correspondiente a la suma y/o diferencia de dos o más términos, consiste en escribirla como producto de expresiones algebraicas más sencillas.*

Veamos algunos casos donde se muestra cómo factorizar de la forma más eficiente posible:

- **Caso 1:** Factor común:



En la figura, vemos que el rectángulo mayor consiste en dos rectángulos, uno de área ac y el otro de área bc. El área total es

$$ac + bc.$$

Sin embargo, notamos que los lados del rectángulo mayor miden $a+b$ y c, por lo tanto su área puede también ser expresada como

$$c(a+b).$$

Es decir,

$$ac + bc = c(a+b) \tag{4.6.1}$$

lo cual no es otra cosa que el axioma correspondiente a la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma. Sin embargo, observándolo desde otra perspectiva, la última igualdad nos plantea que, dado que c se repite en ambos términos de la izquierda, entonces podemos colocar un paréntesis, "sacar" a c de éste, y "dentro" de él dejar los factores de cada término que no se repiten. En este caso, decimos que c es **factor común** del miembro izquierdo de (**??**).

Ejercicio 4.6.1. *Factorice:*

a) $abd + acd + ad$.

   Solución. En este caso, la expresión tiene factor común ad, por lo que su factorización es

   $$ad(b+c+1),$$

   lo cual usted puede comprobar multiplicando ad "hacia dentro" del paréntesis, es decir usando distributividad.

b) $8x + 12y + 20z$.

   Solución. La expresión anterior es equivalente a

   $$4 \cdot 2x + 4 \cdot 3y + 4 \cdot 5z,$$

   por lo que el factor común es 4, y la expresión factorizada queda como

   $$4(2x + 3y + 5z).$$

   Note que el primer paso no es necesario, dado que 4 es el máximo común divisor entre $8, 12$ y 20, esto quiere decir que es el mayor factor que se puede extraer de estos tres números.

c) $12x^2y^5 + 18x^3y^4 - 24x^6y^3$.

Solución. El máximo común divisor entre 12, 18 y 24 es 6, por lo que 6 es uno de los factores comunes de esta expresión. Sin embargo, no es el único. Notemos que x^2 es la menor potencia de x presente en algún término de la expresión original. Por otro lado, y^3 es la respectiva menor potencia de y. Dejando un x^2 y un y^3 en cada término, nuestra expresión queda como

$$12x^2y^3y^2 + 18x^2xy^3y - 24x^2x^4y^3. \tag{4.6.2}$$

De este modo, observando (**??**), el factor común es $6x^2y^3$. Así, la factorización es

$$6x^2y^3(2y^2 + 3xy - 4x^4).$$

Nos podemos ahorrar el paso (**??**), notando que los exponentes de las potencias de x que quedan "dentro" del parentésis, corresponden a restar a cada exponente original, el exponente del factor común en x, análogamente para y.

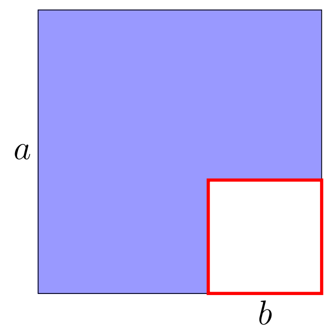
d) $\dfrac{4}{15}x^3y^6z^2 - \dfrac{16}{9}x^2y^4z^3$.

Solución. En este caso, notamos que el MCD (máximo común divisor) entre los numeradores es 4 y el MCD entre los denominadores es 3. De este modo, escogiendo la menor potencia de x, de y y de z presente en la expresión, obtenemos que su factorización es

$$\frac{4}{3}x^2y^4z^2\left(\frac{1}{5}xy^2 - \frac{4}{3}z\right).$$

□

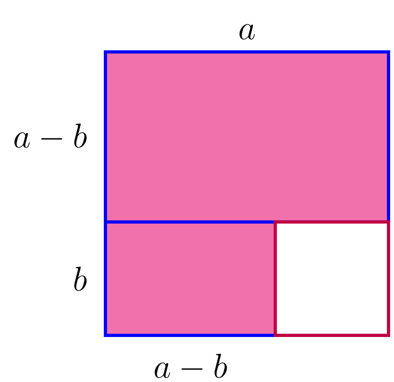
- **Caso 2:** Diferencia de cuadrados:



La figura consiste en dos cuadrados, el más grande tiene lados de medida a unidades, y el más pequeño, tiene lados de medida b unidades. El área de la región achurada corresponde a la diferencia entre el área del cuadrado grande y el área del cuadrado pequeño, es decir, el área es

$$a^2 - b^2.$$

Sin embargo, si separamos la región achurada en dos rectángulos:



vemos que el área del rectángulo superior es $a(a-b)$, y el área del rectángulo inferior es $b(a-b)$. De este modo, el área achurada también corresponde a

$$a(a-b) + b(a-b).$$

Como en esta última expresión $a-b$ es factor común, entonces queda como

$$(a-b)(a+b).$$

Es decir,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Esta igualdad, la podemos interpretar como que la diferencia de los cuadrados de a y b (en ese orden), se puede factorizar como la suma de a con b por la diferencia de a con b, en ese orden. Veamos ejemplos, en los cuales usamos la expresión obtenida:

Ejercicio 4.6.2. *Factorice:*

a) $81x^2-16y^2$.

   Solución. Podemos expresar esta resta como la diferencia de cuadrados

$$(9x)^2-(4y)^2,$$

   por lo que su factorización es

$$(9x+4y)(9x-4y).$$

b) x^4-1.

   Solución. La expresión dada es equivalente a

$$(x^2)^2-1^2,$$

   por lo que corresponde a

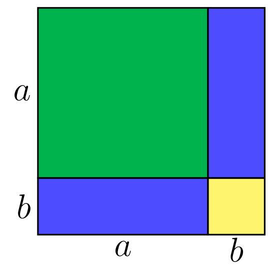
$$(x^2+1)(x^2-1).$$

   Note que el factor x^2-1 es nuevamente una diferencia de cuadrados, por lo que la factorización final es

$$(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

□

- **Caso 3:** Trinomio cuadrado perfecto



En la figura, vemos un cuadrado de lado $a+b$, por lo que su área corresponde a

$$(a+b)^2.$$

Sin embargo, esta figura puede ser descompuesta en un cuadrado de lado a, dos rectángulos, cada uno de lados a y b, y un cuadrado de lado b. De este modo, el área de la figura completa también corresponde a la suma de las áreas de las subfiguras mencionadas, es decir a

$$a^2+ab+ab+b^2,$$

la que puede ser expresada como

$$a^2+2ab+b^2.$$

Es decir, obtenemos que

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \tag{4.6.3}$$

Esta igualdad se puede interpretar como que el cuadrado de la suma de a y b corresponde a:

- el primer término al cuadrado, o sea a^2,
- más dos veces el primer por el segundo término, es decir, $2ab$,
- más el segundo término al cuadrado, o sea b^2.

Esta fórmula nos permite calcular potencias tales como 17^2, notando que

$$17^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2.$$

O sea,

$$17^2 = 100 + 140 + 49 = 289.$$

Note también que, simplemente multiplicando, podemos obtener que

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2, \tag{4.6.4}$$

expresión que es bastante similar a la del desarrollo de $(a+b)^2$, y que sólo difere de él en el signo del segundo término. Ahora factorizaremos algunos trinomios que son cuadrados perfectos, en virtud de (**??**) y (**??**).

Ejercicio 4.6.3. *Factorice*

a) $x^2 + 6x + 9$.

Solución. Al observar el primer y último término, notamos que éstos corresponden al cuadrado de x y al cuadrado de 3, respectivamente. Más aún, el término central corresponde a doble de $3x$, por lo que este trinomio corresponde a un cuadrado del binomio y su factorización es

$$(x+3)^2.$$

b) $x^4 - 8x^2 + 16$.

Solución. El primer término corresponde al cuadrado de x^2 y el tercero al cuadrado de 4. Por otro lado, el término central corresponde al opuesto de $2 \cdot 4 \cdot x^2$, por lo que este trinomio corresponde a

$$(x^2-4)^2.$$

Observamos que $x^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados, por lo que la factorización final es

$$(x+2)^2(x-2)^2.$$

Caso 4: Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ (algunos casos):

Vemos que al efectuar la multiplicación

$$(x + 5)(x + 4)$$

obtenemos el polinomio

$$x^2 + 9x + 20,$$

donde el coeficiente de x, el cual es 9, corresponde a la suma $5 + 4$, y el término independiente de x, el cual es 20, corresponde al producto $5 \cdot 4$.

En general, si queremos factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, de modo que quede expresado de la forma

$$(x + e)(x + f),$$

entonces debemos encontrar los números e y f de modo que su multiplicación corresponda a c (el término independiente de x), y su suma corresponda a b (el coeficiente de x).

Ejercicio 4.6.4. *Factorice:*

a) $x^2 + 5x + 6$.

   Solución. Debemos encontrar dos números que multiplicados nos dé 6, y que sumados nos dé 5. Estos números son 2 y 3, por lo que su factorización es

$$(x + 2)(x + 3).$$

b) $x^2 + 5x - 6$.

   Solución. Debemos encontrar dos números que multiplicados nos dé -6 y que sumados nos dé 5. Estos son 6 y -1, por lo que su factorización es

$$(x + 6)(x - 1).$$

c) $x^2 - 17x + 60$.

Solución. Debemos encontrar dos números que multiplicados nos dé 60 (como 60 es positivo, los números que buscamos deben ser del mismo signo) y sumados nos dé -17 (entonces ambos deben ser negativos). Estos son -12 y -5, por lo que factorización es

$$(x-5)(x-12).$$

□

Caso 5: Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y $a \neq 1$ (algunos casos): Veamos inmediatamente un ejemplo:

Ejercicio 4.6.5. *Factorice el trinomio* $4x^2 + 7x - 2$.

Solución. Para factorizar este trinomio, en primer lugar, lo multiplicamos y dividimos por 4, el cual es el coeficiente de x^2. De este modo,

$$4x^2 + 7x - 2 = \frac{16x^2 + 28x - 8}{4}$$

El numerador del miembro derecho, lo expresamos como un trinomio de la variable $4x$, quedando como

$$\frac{16x^2 + 28x - 8}{4} = \frac{(4x)^2 + 7(4x) - 8}{4}$$

y luego lo factorizamos como tal. Para tal efecto, buscamos dos números que multiplicados nos dé como resultado -8 y que sumados nos dé 7, los cuales son 8 y -1. De este modo, la factorización es

$$\frac{(4x)^2 + 7(4x) - 8}{4} = \frac{(4x+8)(4x-1)}{4} \tag{4.6.5}$$

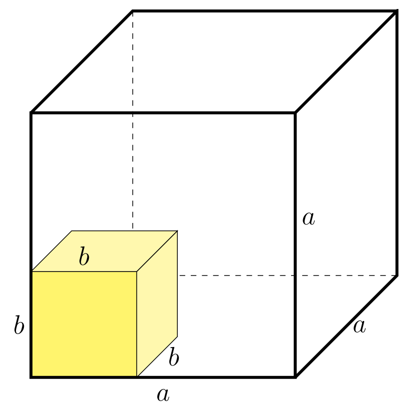
Por lo tanto, de las igualdades anteriores se deduce que

$$4x^2 + 7x - 2 = \frac{(4x+8)(4x-1)}{4} = \frac{4(x+2)(4x-1)}{4} = (x+2)(4x-1).$$

□

Observación 4.6.1. Consideremos un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y $a \neq 1$. Para factorizarlo, en caso que sea posible, en primer lugar lo multiplicamos y dividimos por el coeficiente de x^2, es decir por a. En segundo lugar, formamos un trinomio de la variable ax en el numerador, el cual factorizamos. Finalmente, extraemos factores comunes del numerador, de modo que el a del denominador se cancele, obteniendo la factorización final.

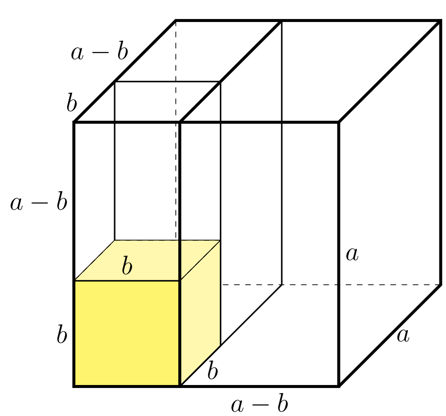
- **Caso 6:** Diferencia y suma de cubos:



En la figura podemos apreciar un cubo de arista a unidades, y dentro de él, un cubo más pequeño de arista b unidades. Si queremos obtener el volumen del sólido achurado, entonces éste corresponde al volumen del cubo mayor menos el volumen del cubo menor, es decir, su volumen corresponde a

$$a^3 - b^3.$$

Sin embargo, también podemos obtener este volumen, separando la región en 3 paralelepípedos:



Note que

- el paralelepípedo de la derecha, tiene volumen $a^2(a-b)$.
- el paralelepípedo de la izquierda y adelante, tiene volumen $b^2(a-b)$.
- el paralelepípedo de la izquierda y atrás, tiene volumen $ab(a-b)$.

De este modo, el volumen del cubo también puede ser expresado como

$$a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b). \tag{4.6.6}$$

Como en (**??**), $a-b$ es factor común, entonces esta expresión queda como

$$(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Es decir, obtenemos la igualdad

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2), \tag{4.6.7}$$

la cual nos dice que la factorización de la diferencia entre el cubo de a y el cubo de b, corresponde a la diferencia entre ambos términos a y b, multiplicada por un trinomio consistente en el cuadrado del primer término, es decir a^2, más el producto de ambos términos a y b, y más el cuadrado del segundo término, es decir b^2.

Queremos factorizar a^3+b^3. Note que

$$a^3+b^3=a^3-(-b)^3,$$

por lo que a^3+b^3 se puede entender como una diferencia de cubos. De este modo, como

$$a^3-(-b)^3=(a-(-b))(a^2+a(-b)+(-b)^2),$$

entonces

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2). \tag{4.6.8}$$

Comparando (**??**) con (**??**), vemos que cuando factorizamos la suma de cubos $a^3 + b^3$, en el primer factor hay una suma $a + b$, y el segundo factor $a^2 - ab + b^2$ tiene segundo término negativo. En cambio en la diferencia de cubos $a^3 - b^3$, en el primer factor hay una diferencia $a - b$, y el segundo factor $a^2 + ab + b^2$ tiene segundo término positivo.

Ejercicio 4.6.6. *Factorice:*

a) $x^3 + 27$.

Solución. Note que la expresión dada corresponde a la suma del cubo de x con el cubo de 3. De este modo, su factorización es

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

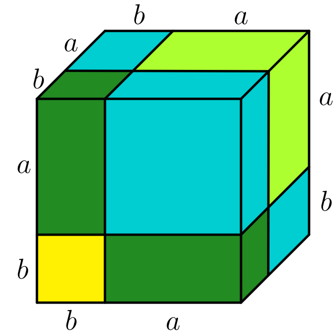
b) $x^3 - 1$.

Solución. Note que la expresión dada corresponde a la diferencia entre el cubo de x y el cubo de 1. De este modo, su factorización corresponde a

$$(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

$\square$

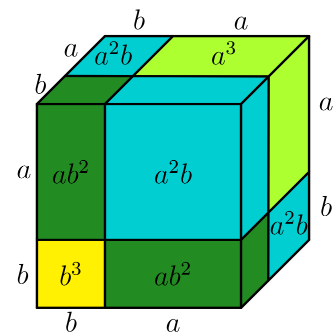
- **Caso 7:** Polinomio cubo perfecto



En la figura, observamos un cubo cuya arista mide $a+b$. De este modo, su volumen es

$$(a+b)^3.$$

Sin embargo, este cubo puede ser descompuesto en cubos y paralelepípedos:



los cuales son:

- el cubo de atrás, el cual tiene volumen a^3.
- los tres paralelepípedos, cada uno de volumen a^2b.
- los tres paralelepípedos, cada uno de volumen ab^2.
- el cubo de adelante, el cual tiene volumen b^3.

De este modo, tenemos que el volumen del cubo completo, también puede ser expresado como

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

por lo que obtenemos la igualdad

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En esta expresión, a la derecha tenemos que

- En los términos que están en los extremos aparece cada término al cubo, en este caso a^3 y b^3.
- Las potencias del primer término, en este caso a, van decreciendo de izquierda a derecha.
- Las potencias del segundo término, en este caso b, van creciendo de izquierda a derecha.
- Los términos centrales tienen coeficiente 3.

Note también que, simplemente realizando la multiplicación, obtenemos que

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Esta última expresión tiene un desarrollo muy similar al de $(a+b)^3$, pero difiere de él en el hecho que los signos $+$ y $-$ de los coeficientes van apareciendo en forma alternada, partiendo por $+$. Factorizamos ahora algunas expresiones que son cubos perfectos.

Ejercicio 4.6.7. *Factorice:*

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

   Solución. Vemos que los términos ubicados en los extremos corresponden al cubo de x y al cubo de 2. Los términos centrales corresponden a $3 \cdot 2 \cdot x^2$ y $3 \cdot 2^2 \cdot x$ respectivamente. De este modo, la expresión es el cubo perfecto

$$(x+2)^3.$$

b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Solución. Los términos ubicados en los extremos corresponden al cubo de x y al cubo de 1. Los términos centrales corresponden a $3 \cdot 1 \cdot x^2$ y $3 \cdot 1^2 \cdot x$ respectivamente. Los signos de los coeficientes se presentan en forma alternada, partiendo por $+$. De este modo, la expresión corresponde al cubo del binomio

$$(x-1)^3.$$

□

4.7. Operaciones con fracciones algebraicas.

4.7.1. Suma y resta de fracciones algebraicas.

Para sumar o restar dos fracciones algebraicas con distinto denominador, transformamos primero ambas fracciones en fracciones que tengan el mismo denominador y luego operamos, tal como lo hicimos con las fracciones numéricas.

Ejercicio 4.7.1. *Realice la suma*

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3}, \ x \neq \pm 3$$

Solución. Queremos obtener fracciones equivalentes a cada uno de los sumandos, de modo que estas nuevas fracciones tengan el mismo denominador. El denominador común escogido será simplemente el producto de los denominadores, es decir $(x-3)(x+3)$. Note que

$$\frac{2}{x-3} = \frac{2}{x-3} \cdot \frac{x+3}{x+3} = \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+6}{x^2-9}$$

y

$$\frac{3}{x+3} = \frac{3}{x+3} \cdot \frac{x-3}{x-3} = \frac{3(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x-9}{x^2-9}$$

De este modo,

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{2x+6}{x^2-9} + \frac{3x-9}{x^2-9} = \frac{5x-3}{x^2-9}.$$

□

Veamos otro ejemplo

Ejercicio 4.7.2. *Obtenga la resta*

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2},\ x\neq 1$$

Solución. Queremos que ambas fracciones que se resten tengan el mismo denominador. Para tal efecto, dejamos ambas fracciones con denominador $(x-1)^2$ (que en este caso, es aquel denominador que tiene mayor exponente). Es decir, es sólo necesario transformar la primera fracción en una fracción equivalente. En efecto,

$$\frac{2}{x-1}=\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{2x-2}{(x-1)^2}$$

De este modo,

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{2x-2}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{2x-3}{(x-1)^2}$$

□

4.7.2. Multiplicación y división de fracciones algebraicas.

Para multiplicar o dividir fracciones algebraicas, se procede de la misma forma que se realizan estas operaciones con fracciones numéricas. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejercicio 4.7.3. *Opere las siguientes fracciones algebraicas, y simplique lo más posible cada expresión obtenida:*

a) $\dfrac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\dfrac{2}{x-1},\ x\neq\pm 1.$

Solución. Antes de multiplicar, factorizamos el numerador y denominador de cada fracción, según sea necesario. Para factorizar $3x^2-2x-1$, lo multiplicamos y dividimos por 3, obteniendo finalmente que

$$3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1).$$

Así, nuestra multiplicación queda como

$$\frac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{(x-1)(3x+1)}{4(x+1)}\cdot\frac{2}{x-1}.$$

Multiplicamos ahora numerador con numerador, y denominador con denominador, tal como en las fracciones numéricas, obteniendo que

$$\frac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{2(x-1)(3x+1)}{4(x+1)(x-1)}$$

Note que tanto en el numerador como en el denominador dejamos expresada la multiplicación, para luego poder simplificar los factores repetidos. Así,

$$\frac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{2(x-1)(3x+1)}{4(x+1)(x-1)}=\frac{3x+1}{2(x+1)}=\frac{3x+1}{2x+2},$$

donde la última fracción es irreducible, es decir, no tiene factores comunes en el numerador y denominador.

b) $\dfrac{\frac{36}{x^2}}{\frac{x^3}{48}}$, $x\neq 0$.

Solución. Procedemos con esta división igual que con fracciones numéricas. Tenemos que

$$\frac{\frac{36}{x^2}}{\frac{x^3}{48}}=\frac{36}{x^2}\cdot\frac{x^3}{48}.$$

Dado que al efectuar la multiplicación de la derecha se simplificarán los factores comunes que aparecen “arriba” y “abajo” en la fracción resultante, entonces podemos simplificar cruzado antes de realizar tal multiplicación, y luego la hacemos. Así

$$\frac{\frac{36}{x^2}}{\frac{x^3}{48}}=\frac{36}{x^2}\cdot\frac{x^3}{48}=\frac{2}{1}\cdot\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}.$$

4.8. Ecuaciones de segundo grado.

Ejemplos: Algunas ecuaciones de segundo grado, o ecuaciones cuadráticas, son

- $x^2 - 4 = 0$
- $x^2 - 4x = 0$
- $x^2 + 5x + 6 = 0$
- $2x^2 - 8x + 7 = 0$

Definición 4.8.1. *Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Dada una ecuación cuadrática, nos planteamos preguntas como

- ¿cómo podemos determinar sus soluciones? ¿Existe una única forma?
- ¿cuántas soluciones reales tiene a lo más?
- ¿siempre tiene al menos una solución?

Para responder estas preguntas, resolvemos primero las ecuaciones cuadráticas más básicas, usando la proposición:

Proposición 4.8.2. *Sean x e y números reales. Se tiene que*

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0.$$

Observación 4.8.1. Es decir, el producto de dos números reales es 0, si y sólo si, al menos uno de ellos es 0.

Ejercicio 4.8.1. *Considere la ecuación cuadrática*

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Al factorizar su miembro izquierdo, obtenemos la ecuación equivalente

$$(x-3)(x-2)=0.$$

a) *Observando esta última ecuación ¿qué podemos concluir acerca de $x-3$ y $x-2$?*

Solución. Como $(x-3)(x-2)=0$, entonces de la última proposición obtenemos que

$$x-3=0 \ \vee \ x-2=0.$$

b) *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2-5x+6=0$?*

Solución. De a), tenemos que

- si $x-3=0$, entonces $x=3$.
- si $x-2=0$, entonces $x=2$.

De este modo, el conjunto solución de la ecuación es $S=\{2,3\}$. □

Ejercicio 4.8.2. *Considere la ecuación*

$$x^2-9x-84=0.$$

Resuélvala usando factorización y la última proposición.

Solución. Note que

$$\begin{aligned} x^2-8x-84=0 &\Leftrightarrow (x-14)(x+6)=0 \\ &\Leftrightarrow x-14=0 \ \vee \ x+6=0 \\ &\Leftrightarrow x=14 \ \vee \ x=-6. \end{aligned}$$

De este modo, su conjunto solución es $S=\{-6,14\}$. □

Veamos ecuaciones cuadráticas, para las cuales el coeficiente de x^2 no es 1. ¿Cómo resolverlas?

Ejercicio 4.8.3. *Considere la ecuación cuadrática*

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

Si multiplicamos por 2 esta ecuación, obtenemos la ecuación equivalente

$$(2x)^2 - 3(2x) - 10 = 0.$$

a) *Si hacemos el cambio de variable $u = 2x$ ¿que ecuación obtenemos?*

Solución. Obtenemos la ecuación

$$u^2 - 3u - 10 = 0.$$

b) *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación obtenida en a)?*

Solución. Factorizando en la última ecuación, obtenemos que sus soluciones son $u = 5$ o $u = -2$.

c) *Deshaciendo el cambio de variable en las soluciones obtenidas en b), ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $2x^2 - 3x - 5 = 0$?*

Solución. Note que

- Si $u = 5$, entonces $2x = 5$, de donde $x = \frac{5}{2}$.
- Si $u = -2$, entonces $2x = -2$, de donde $x = -1$.

Por lo tanto, $S = \{-1, \frac{5}{2}\}$. □

Ejercicio 4.8.4. *Considere la ecuación*

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

Resuélvala usando un cambio de variable.

Solución. Multiplicando por 3 la ecuación, obtenemos

$$(3x)^2 - 2(3x) - 15 = 0.$$

Luego, si hacemos $u = 3x$, obtenemos la ecuación

$$u^2 - 2u - 15 = 0.$$

Si factorizamos en la ecuación anterior, vemos luego que sus soluciones son $u = 5$ o $u = -3$. De este modo, deshaciendo la sustitución, obtenemos que

$$3x = 5 \ \vee \ 3x = -3,$$

de donde

$$x = \frac{5}{3} \ \vee \ x = -1,$$

es decir, $S = \left\{\frac{5}{3}, -1\right\}$. $\square$

Veamos algunas ecuaciones cuadráticas en las cuales no es posible factorizar.

Ejercicio 4.8.5. *Considere la ecuación cuadrática*

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

la cual es equivalente a

$$x^2 + 6x = -7 \tag{4.8.1}$$

a) *¿Qué número debemos sumar a ambos lados de la ecuación (**??**), de modo que el miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto? ¿Cuál es la nueva ecuación obtenida?*

Solución. Note que en este caso, $6x$ correspondería a 2 veces el producto entre el primer término x y el segundo término. Por lo tanto, el segundo término es

$$\frac{6}{2} = 3.$$

Así, el número que debemos sumar corresponde a 3^2, es decir a 9. De este modo, sumando 9 en ambos miembros, obtenemos que

$$x^2 + 6x + 9 = 2,$$

ecuación que es equivalente a

$$(x + 3)^2 = 2.$$

b) *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x^2 - 6x + 7 = 0$*?*

Solución. De la ecuación

$$(x + 3)^2 = 2,$$

deducimos que

$$x + 3 = \pm\sqrt{2},$$

de donde las soluciones de la ecuación son

$$x = -3 + \sqrt{2} \ \vee \ x = -3 - \sqrt{2}.$$

Así,

$$S = \{-3 + \sqrt{2}, -3 - \sqrt{2}\}.$$

□

Observación 4.8.2. En el proceso en el cual se suma un valor en una ecuación, de modo que una expresión de ésta se transforme un trinomio cuadrado perfecto, se denomina **completación de cuadrado**.

Ejercicio 4.8.6. *Considere la ecuación*

$$x^2 - 8x + 11 = 0$$

Resuélvala usando completación de cuadrado.

Solución. La ecuación es equivalente a

$$x^2 - 8x = -11.$$

Debemos transformar $x^2 - 8x$ en un trinomio cuadrado perfecto. Como $-8x$ es el término central, el cual corresponderá a 2 veces x por el segundo término, entonces el segundo término es

$$\frac{-8}{2} = -4.$$

De este modo, el número que debemos sumar es $(-4)^2 = 16$, y así, nuestra ecuación queda como

$$x^2 - 8x + 16 = -11 + 16.$$

Es decir,

$$(x-4)^2 = 5,$$

por lo que

$$x - 4 = \pm\sqrt{5}.$$

De este modo, las soluciones son

$$x = 4 \pm \sqrt{5},$$

y así

$$S = \{4 + \sqrt{5}, 4 - \sqrt{5}\}.$$

□

Observación 4.8.3. Como hemos visto, para completar cuadrado del binomio en una ecuación, debemos obtener el segundo término del binomio, y luego elevarlo al cuadrado, valor que sumamos en ambos miembros de la ecuación dada. El segundo término del binomio, puede ser obtenido simplemente dividiendo por 2 el coeficiente de x (o de la incógnita, cualquiera sea la letra que se use) en la ecuación original, dado que el término en x corresponde a 2 veces x por el segundo término del binomio.

Ejercicio 4.8.7. *Resuelva la ecuación*

$$2x^2 - 10x + 7 = 0,$$

usando un cambio de variable y luego completando cuadrado.

Solución. Multiplicamos por 2 la ecuación dada, y obtenemos la ecuación

$$(2x)^2 - 10(2x) + 14 = 0. \tag{4.8.2}$$

Haciendo $u = 2x$, obtenemos

$$u^2 - 10u = -14. \tag{4.8.3}$$

Completamos cuadrado del binomio en el miembro izquierdo de (**??**), notando que el segundo término del binomio es

$$\frac{-10}{2} = -5,$$

por lo que debemos sumar $(-5)^2 = 25$, en ambos miembros de (**??**). Así, la ecuación equivalente que obtenemos es

$$u^2 - 10u + 25 = 11,$$

la cual puede ser expresada como

$$(u-5)^2 = 11, \tag{4.8.4}$$

de donde $u = 5 \pm \sqrt{11}$. Deshaciendo la sustitución, obtenemos que

$$2x = 5 \pm \sqrt{11},$$

por lo que, las soluciones son

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Es decir, el conjunto solución es

$$S = \left\{ \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \right\}.$$

$\square$

Ejercicio 4.8.8. *Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Resuelva la ecuación*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

usando un cambio de variable, y luego completando cuadrado.

Solución. Multiplicamos por a la ecuación dada, y obtenemos

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = 0. \tag{4.8.5}$$

Haciendo $u = ax$, se tiene que

$$u^2 + bu + ac = 0. \tag{4.8.6}$$

Restando ac, obtenemos la ecuación

$$u^2 + bu = -ac.$$

Para completar cuadrado, notamos que el segundo término del binomio es $\frac{b}{2}$, por lo que sumamos $\frac{b^2}{4}$ en ambos miembros de la ecuación, de modo que

$$u^2 + bu + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

Esta expresión es equivalente a

$$\left(u + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

De este modo

$$u + \frac{b}{2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

O sea,

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Como $u = ax$, obtenemos que las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$\square$

Teorema 4.8.3. *Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Las soluciones de la ecuación cuadrática*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.8.7}$$

vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4.8.8}$$

De este modo

- *si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas, las cuales son*

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \vee \ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- *si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación cuadrática tiene una única solución real, la cual es*

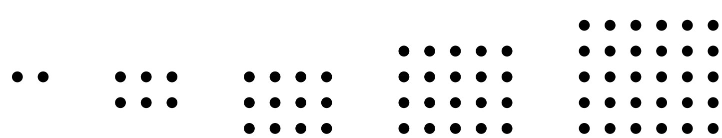
$$x = \frac{-b}{2a}.$$

- *si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.*

Observación 4.8.4. La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante** de (**??**).

Veamos algunas aplicaciones:

Ejercicio 4.8.9. *Considere la sucesión de figuras*



a) *¿Cuántos puntos tiene la figura que está en la n-ésima posición?*

Solución. Para contar los puntos de cada figura, lo podemos hacer multiplicando su número de filas con su número de columnas. En general, cada figura tiene 1 columna más que el número de filas, es decir, la n-ésima figura tiene n filas y $n+1$ columnas. De este modo, la figura que está en la n-ésima posición tiene $n(n+1)$ puntos.

b) *¿Existe alguna figura en esta sucesión que tenga 380 puntos? Si es así, ¿En qué posición de la secuencia está?*

Solución. Supongamos que la figura que está en la n-ésima posición tiene 380 puntos, para un valor de n por determinar. En este caso, n debe satisfacer la ecuación

$$n(n+1) = 380 \Leftrightarrow n^2 + n - 380 = 0.$$

Para resolver la última ecuación buscamos factorizar, notando que $380 = 20 \cdot 19$. De este modo, la ecuación queda como

$$(n+20)(n-19) = 0,$$

y sus soluciones son $n = -20$ o $n = 19$. Como n debe ser un número natural, entonces existe una figura de la secuencia que tiene 380 puntos, y corresponde a la que está ubicada en la posición 19. $\square$

Ejercicio 4.8.10. *La temperatura T a la que hierve el agua, depende de su altura h con respecto al nivel de mar. Las magnitudes h y T están vinculadas por la fórmula*

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2 \tag{4.8.9}$$

para $95 \leq T \leq 100$. ¿Cuál es la temperatura a la que hierve el agua en la cima del monte Everest, esto es, a 8840 metros de altura? Use calculadora.

Solución. En este caso, en virtud de la relación (**??**), debemos resolver la ecuación

$$580(100 - T)^2 + 1000(100 - T) = 8840.$$

Hacemos el cambio de variable $u = 100 - T$, obteniendo

$$580u^2 + 1000u - 8840 = 0,$$

la cual es equivalente a

$$29u^2 + 50u - 442 = 0.$$

En esta última ecuación, $a = 29$, $b = 50$ y $c = -442$. De este modo, usando la fórmula (**??**), tenemos que sus soluciones son

$$u = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 29 \cdot 442}}{58}.$$

O sea, usando calculadora,

$$u \approx 3{,}13 \text{ o } u \approx -4{,}86.$$

Haciendo $100 - T = u$, obtenemos que

$$T \approx 96{,}87 \text{ o } T \approx 104{,}86.$$

Como el modelo planteado es para $95 \leq T \leq 100$, entonces, en la cima del monte Everest, el agua hierve a casi 97 grados Celsius. □

Ejercicio 4.8.11. *Un bote con turistas recorre un río. Recorre 15 km río arriba y luego retorna al mismo punto de partida, demorando en total 3 horas. La rapidez de la corriente del río es de* $2\frac{km}{h}$.

a) *¿Cuál es la rapidez del bote? Use calculadora.*

Solución. Sea x la rapidez del bote. Note que la rapidez de recorrido está influenciada por la rapidez de la corriente. En efecto,

- La rapidez de recorrido río arriba es $x - 2$, dado que la corriente va en contra del barco.
- La rapidez de recorrido río abajo es $x + 2$, dado que la corriente va a favor del barco.

El cuociente:

- entre la distancia recorrida a la ida y la rapidez de recorrido de ida, nos da el tiempo de ida, el cual corresponde a la expresión

$$\frac{15}{x - 2}.$$

- entre la distancia recorrida a la vuelta y la rapidez de recorrido de vuelta, nos da el tiempo de vuelta, el cual corresponde a la expresión

$$\frac{15}{x+2}.$$

Como el bote se demoró en total 3 horas, entonces tenemos la ecuación

$$\frac{15}{x-2}+\frac{15}{x+2}=3.$$

Multiplicando la ecuación obtenida por $(x-2)(x+2)$, obtenemos la expresión

$$30x = 3(x^2-4),$$

de donde se deduce la ecuación cuadrática

$$x^2-10x-4=0,$$

en la cual $a=1, b=-10, c=-4$. De este modo, sus soluciones vienen dadas por

$$x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1},$$

o sea, son

$$x=5\pm\sqrt{29}.$$

Así,

$$x = 10{,}3 \text{ o } x=-0{,}3$$

Como el bote va avanzando, entonces esta corresponde a $10{,}3\frac{km}{h}$.

b) *¿Cuánto tiempo demoró el bote a la ida y cuánto demoró a la vuelta? Use calculadora.*

Solución. Recordemos que si x es la rapidez del bote, entonces el tiempo de ida viene dado por

$$\frac{15}{x-2},$$

y el tiempo de vuelta por

$$\frac{15}{x+2}.$$

Reemplazando $x = 10{,}3$ en cada una de estas expresiones, obtenemos que el tiempo de ida es de

$$1{,}8 \text{ horas},$$

es decir, aproximadamente 1 hora y 48 minutos, y el tiempo de vuelta es de

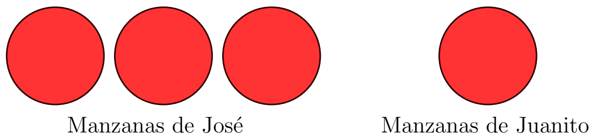
$$1{,}21 \text{ horas},$$

o sea, aproximadamente 1 hora y 12 minutos. $\square$

4.9. Orden en $\mathbb{R}$.

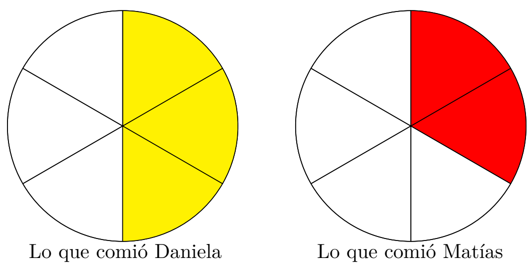
Consideremos las siguientes situaciones:

- José y Juanito se subieron a un árbol a sacar manzanas. José sacó 3, y Juanito sacó 1. Por simple observación, vemos que José sacó más manzanas:



  Este es un ejemplo de que 3 es mayor que 1.

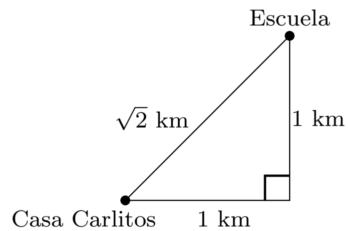
- Una madre repartió una pizza entre sus hijos Daniela y Matías. Dado que tenían mucho apetito, a Daniela le dió la mitad de la pizza, y a Matías la tercera parte de la pizza. Vemos que a Daniela le dió más pizza:



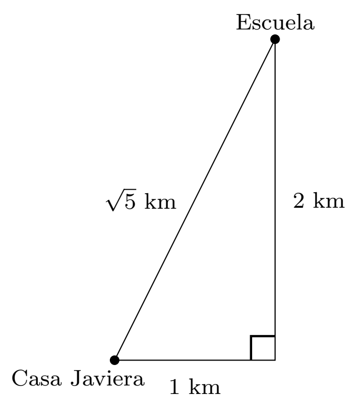
  Aquí se ejemplifica que $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{3}$.

- En una mañana de Concepción, la temperatura fue de 4° bajo cero, Esa misma mañana, pero en Temuco, a la misma hora, la temperatura marcó 1° bajo cero. Evidentemente en Temuco hacía menos frío, dado que la temperatura estaba más cerca de 0°. Esta situación ejemplifica que -1 es mayor que -4.

- Para ir de la casa de Carlitos a la escuela, Carlitos debe recorrer 1 km hacia el este y luego 1 km hacia el norte. Si se construyera una calle en línea recta que une la casa de Carlitos y la escuela, entonces, por el Teorema de Pitágoras, la nueva distancia sería de $\sqrt{2}$ metros:

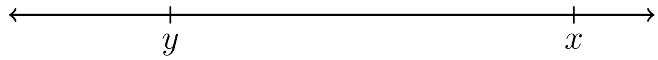


Por otro lado, para ir la casa de Javiera a la misma escuela, ella debe recorrer 1 km hacia el este y luego 2 km hacia el norte. Evidentemente que su casa está más lejos de la escuela que la casa de Carlitos. Si se construyera una calle en línea recta que une la casa de Javiera y la escuela, entonces, por el Teorema de Pitágoras, la nueva distancia sería de $\sqrt{5}$ metros:



Este ejemplo muestra que $\sqrt{5}$ es mayor que $\sqrt{2}$.

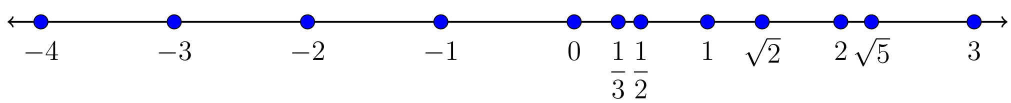
El hecho que un número x es mayor que otro número y, es simbolizado como $x > y$. Cuando esto ocurre, entonces x está posicionado a la derecha de y en la recta numérica:



Acabamos de ejemplificar que

$$3 > 1,\ \frac{1}{2} > \frac{1}{3},\ -1 > -4,\ \sqrt{5} > \sqrt{2}$$

lo cual se aprecia en la siguiente recta numérica:



Formalizaremos ahora el hecho que un número x es mayor que otro y:

Definición 4.9.1. *Distinguiremos en $\mathbb{R}$ un subconjunto no vacío $\mathbb{R}^+$, el cual llamaremos conjunto de los **números reales positivos**, tal que:*

- *Tricotomía. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se verifica una y sólo una de las proposiciones:*

$$x \in \mathbb{R}^+ \vee -x \in \mathbb{R}^+ \vee x = 0,$$

  (es decir, el número es positivo, o su opuesto es positivo o el número es cero).

- *Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $x + y \in \mathbb{R}^+$ (es decir, cada vez que sumamos dos números reales positivos, se obtiene un número real positivo).*

- *Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $xy \in \mathbb{R}^+$ (es decir, cada vez que multiplicamos dos números reales positivos, se obtiene un número real positivo).*

De este modo:

Definición 4.9.2. *En $\mathbb{R}$ se define la relación **mayor que**, simbolizada por $>$, como*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x > y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^+.$$

También se escribe $y < x$.

Observación 4.9.1. Es decir, un número real es mayor que otro, cuando su diferencia es un número positivo.

Observación 4.9.2. Note que

$$x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x - 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x > 0,$$

por lo que los números positivos son todos aquellos números reales que son mayores que 0.

Definición 4.9.3. *El conjunto de los **números reales negativos**, denotado como $\mathbb{R}^-$, se define como*

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Observación 4.9.3. Es decir, un número real x es negativo, si sólo si, su opuesto aditivo $-x$, es un número positivo.
Luego,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^- &\Leftrightarrow -x > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0. \end{aligned}$$

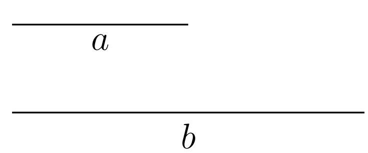
De este modo, los números reales negativos son todos aquellos números reales que son menores que 0.

Definición 4.9.4. *Definimos en $\mathbb{R}$ la relación **mayor o igual** que, simbolizada por $\geq$, como*

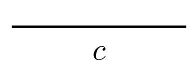
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \geq y \Leftrightarrow x > y \vee x = y.$$

Veamos algunas propiedades de orden, las cuales serán la base para resolver inecuaciones:

Ejercicio 4.9.1. *Considere los segmentos de longitud a y b, respectivamente*



donde claramente $a < b$. Agregamos en el extremo derecho de cada segmento dado un segmento de longitud c:



a) *¿Cuál es la longitud de cada nuevo segmento?*

Solución. Las nuevas longitudes son $a + c$ y $b + c$.

b) *¿Cuál de los dos nuevos segmentos mide más?*

Solución. Mide más el segmento que mide $b + c$. Note que esto nos permite concluir, que si $a, b, c > 0$, se tiene que

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

□

En general, tenemos que

Proposición 4.9.5. *Sean a, b y c números reales.*

$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c.$$

Observación 4.9.4. Es decir, si en ambos miembros de una desigualdad, sumamos o restamos el mismo número, entonces el sentido de la desigualdad se mantiene.

Proposición 4.9.6. *Sean a, b y c números reales. Si $c > 0$, entonces*

$$a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc.$$

Observación 4.9.5. Es decir, si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene.

Proposición 4.9.7. *Sean a, b y c números reales. Si $c < 0$, entonces*

$$a \leq b \Rightarrow ac \geq bc.$$

Observación 4.9.6. Es decir, si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia.

Proposición 4.9.8.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$$

Observación 4.9.7. Es decir, el producto de dos números reales es positivo, y si sólo si, ambos son positivos o ambos son negativos (o sea, si ambos números tienen el mismo signo). También es válido que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0).$$

Proposición 4.9.9.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy < 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0).$$

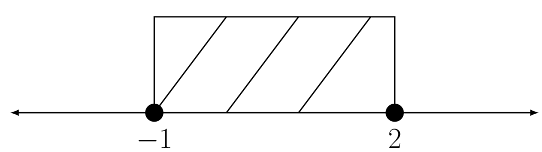
Observación 4.9.8. Es decir, el producto de dos números reales es negativo, si y sólo si, uno es negativo y el otro es positivo (o sea, si los números tienen distinto signo). También es válido que

$$xy \leq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \geq 0).$$

4.9.1. Intervalos.

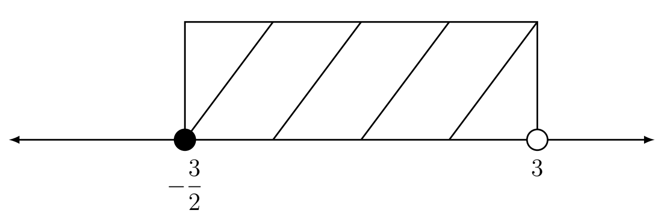
Ejemplos:

- $[-1, 2]$, el cual es el conjunto de todos los números reales x tales que $-1 \leq x \leq 2$:



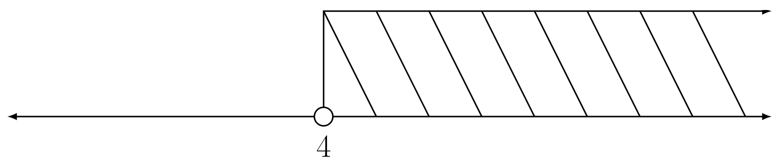
A este intervalo pertenecen números reales tales como $-1, 0, \frac{1}{2}$ y 2, entre otros.

- $\left[-\frac{3}{2}, 3\right[$, el cual es el conjunto de todos los números reales x tales que $-\frac{3}{2} \leq x < 3$:



Note que este intervalo no tiene un mayor elemento.

- $]4, +\infty[$, el cual es el conjunto de todos los números reales x tales que $x > 4$:



Note que este intervalo no tiene un menor ni un mayor elemento.

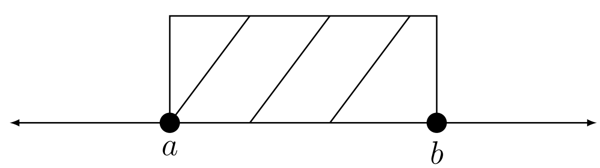
Definición 4.9.10. *Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ se denomina **intervalo** si para todo $c, d, e \in \mathbb{R}$,*

$$c, d \in I \ \wedge \ c \leq d \leq e \Rightarrow d \in I.$$

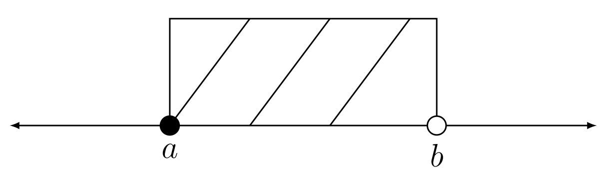
Observación 4.9.9. Es decir, un intervalo es un conjunto que cumple que cualquier número que está entre dos elementos de él, también pertenece a este conjunto.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Tenemos los siguientes tipos de intervalos:

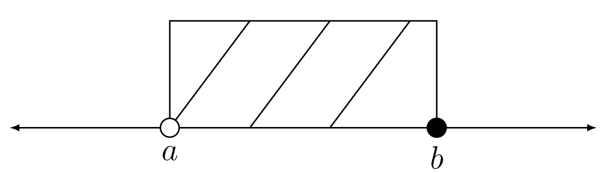
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$



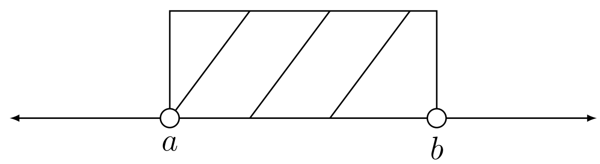
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$



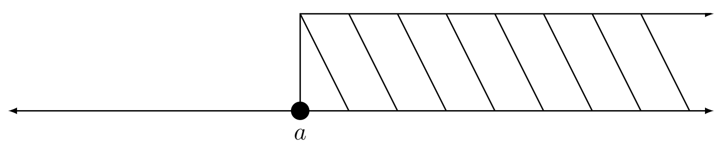
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$



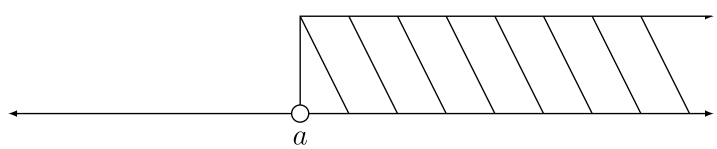
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$



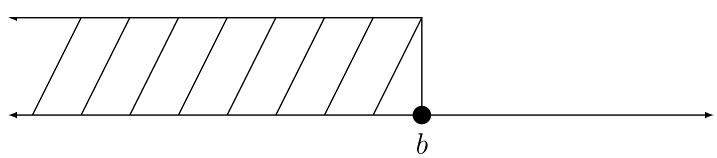
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$



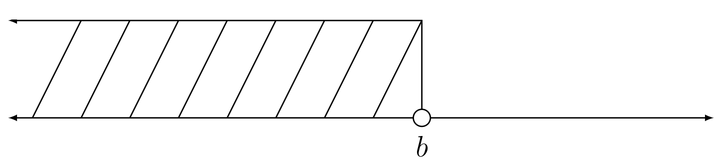
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$



- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$



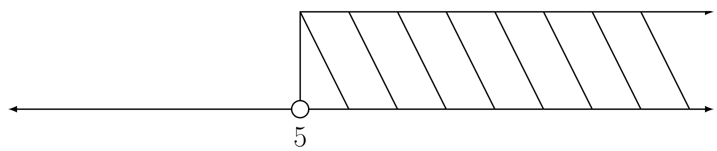
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$



Ejercicio 4.9.2. *Obtenga el intervalo*

a) *de todos los números reales que son mayores a 5.*

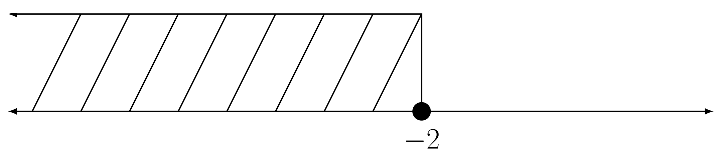
Solución. Para entender mejor lo que nos piden, podemos graficar el intervalo pedido:



donde el 5 es simbolizado con un círculo blanco, dado que en este caso no se está considerando. De este modo, el intervalo pedido es $I =]5, +\infty[$.

b) *de todos los números reales que son a lo más* -2.

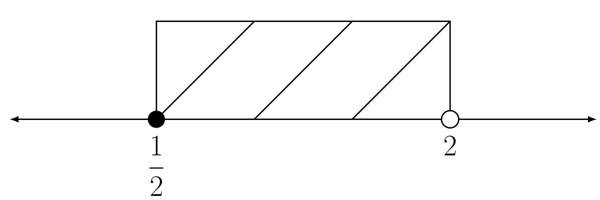
Solución. Graficamente el intervalo corresponde a



donde -2 es simbolizado con un círculo negro, dado que en este caso se está considerando. De este modo, el intervalo es $I =]-\infty, -2]$.

c) *de todos los números reales que son a lo menos* $\frac{1}{2}$ *y que son menores que* 2, *y luego mencione a lo menos 4 elementos de este intervalo.*

Solución. Gráficamente, este intervalo corresponde a



De este modo, $I = \left[\frac{1}{2}, 2\right[$. Algunos elementos de este intervalo son, en notación decimal, 0,5; 1; 1, 5; 1,55. $\square$

4.10. Inecuaciones.

Ejemplos: Algunas inecuaciones son

- $2x + 1 > 5$
- $x^2 < 4$
- $x^2 - 17x + 60 \leq 0$
- $\dfrac{2x-1}{x+5} \geq 2$
- $\dfrac{x}{x-3} \leq \dfrac{x}{x+1}$

Definición 4.10.1. *Una **inecuación** es una desigualdad en la que intervienen una o más incógnitas.*

Nosotros estudiaremos inecuaciones de 1 sola incógnita.

Definición 4.10.2. *Un número real x_0 es **solución** de una inecuación de la incógnita x, si al reemplazar x_0 por x en la inecuación dada, se obtiene una desigualdad que es verdadera. El conjunto de todos los valores de x que satisfacen una inecuación, se denomina **conjunto solución** de ésta.*

Veremos ahora cómo obtener el conjunto solución de una inecuación:

Ejercicio 4.10.1. *Resuelva las siguientes inecuaciones:*

a) $2x + 1 \geq -5$.

Solución. Esta es una inecuación de grado 1, dado que el mayor exponente al que aparece elevado la incógnita x es 1. Para resolverla, intentaremos despejar x del miembro izquierdo de la desigualdad. De este modo, restamos 1 en ambos miembros de

$$2x + 1 \geq -5,$$

obteniendo

$$2x \geq -6.$$

Ahora dividimos por 2 la última inecuación, teniendo la certeza que como $2 > 0$, el sentido de la desigualdad no cambia. Obtenemos así que

$$x \geq -3.$$

De este modo, el conjunto solución es $S = [-3, +\infty[$. Note que, por ejemplo

- El valor $x = 0$ pertenece al conjunto solución. Si lo reemplazamos en nuestra inecuación, obtenemos que

  $$2 \cdot 0 + 1 = 1 \geq -5,$$

  lo cual es verdadero.

- El valor $x = -4$ no pertenece al conjunto solución. Si lo reemplazamos en nuestra inecuación, obtenemos que

  $$2 \cdot (-4) + 1 = -7 \geq -5,$$

  lo cual es falso.

b) $-2x + 1 > -5.$

Solución. Intentamos despejar x en

$$-2x + 1 > -5.$$

Restando 1, obtenemos

$$-2x > -6.$$

En la última inecuación, usualmente primero se multiplica por -1, para que el coeficiente de x quede positivo. En este caso, el sentido de la desigualdad se invierte, obteniendo

$$2x < 6.$$

Ahora dividimos por 2, y nos queda

$$x < 3.$$

De este modo, el conjunto solución es $S =]-\infty, 3[$.

c) $x^2 > 16$.

Solución. Algún estudiante pudiera extraer raíz cuadrada en ambos miembros de la inecuación, y bajo el razonamiento que $\sqrt{x^2} = x$, obtendría la desigualdad $x > 4$, de donde $S =]4, +\infty[$. Sin embargo, $x = -8$ no pertenece a S y satisface la inecuación. Por lo tanto, este razonamiento es incorrecto ¿Por qué? (Más adelante en el capítulo está la respuesta).

Veamos cómo razonar correctamente. Restamos 16 en ambos miembros, obteniendo la inecuación $x^2 - 16 > 0$, de donde al factorizar el miembro izquierdo, obtenemos que

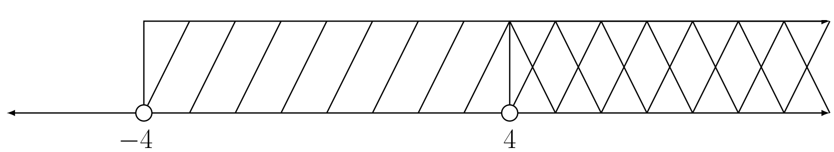
$$(x-4)(x+4) > 0. \tag{4.10.1}$$

Para continuar podemos proceder de 2 formas:

- Primera forma: La inecuación (**??**) nos plantea un producto que es positivo. De este modo, ambos factores deben tener el mismo signo, por lo que:

$$\begin{aligned}(x-4)(x+4) > 0 &\Leftrightarrow (x-4>0 \ \wedge \ x+4>0) \ \vee \ (x-4<0 \ \wedge \ x+4<0)\\ &\Leftrightarrow (x>4 \ \wedge \ x>-4) \ \vee \ (x<4 \ \wedge \ x<-4)\end{aligned}$$

  Consideramos el primer paréntesis de la última expresión, es decir, $(x > 4 \ \wedge \ x > -4)$. Intersectamos gráficamente los intervalos determinados por $x > 4$ y por $x > -4$:



obteniendo $S_1 =]4, +\infty[$. Por otro lado, consideramos el paréntesis $(x < 4 \ \wedge \ x < -4)$, del cual intersectando los intervalos determinados por $x < 4$ y por $x < -4$, obtenemos que $S_2 =]-\infty, -4[$ (el dibujo queda a cargo del lector). Finalmente, uniendo S_1 y S_2, obtenemos que el conjunto solución es

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[.$$

- Segunda forma: Consideremos la inecuación (**??**), en la cual el miembro izquierdo está completamente factorizado. Obtenemos los valores de x que hacen 0 cada uno de sus factores. Se tiene que

  - $x - 4$ se anula en $x = 4$.
  - $x + 4$ se anula en $x = -4$.

  Los números 4 y -4 se denominan **puntos críticos** de (**??**). Estos puntos críticos nos determinan tres intervalos abiertos en la recta real:

$$]-\infty, -4[\, ,]-4, 4[\, ,]4, +\infty[$$

  Sólo en estos intervalos, la expresión $(x-4)(x+4)$ podría cambiar de signo. En particular, según (**??**), a nosotros nos interesan los intervalos en los cuales $(x-4)(x+4)$ es positivo. Para determinar cuales son esos intervalos, y en definitiva cuál es el conjunto solución de la inecuación original, hacemos una tabla de análisis de signo de $(x-4)(x+4)$ del siguiente modo:

	$]-\infty, -4[$	-4	$]-4, 4[$	4	$]4, +\infty[$
$x - 4$					
$x + 4$					
$(x-4)(x+4)$					

  Observemos que, en la primera fila, consideramos los intervalos determinados por los puntos críticos y los puntos críticos, ordenados de izquierda a derecha.

Además, en la primera columna, consideramos cada uno de los factores de $(x-4)(x+4)$ y $(x-4)(x+4)$.

Rellenamos la segunda columna. Para tal efecto, escogemos un elemento del intervalo de esta columna, en este caso de $]-\infty,-4[$, por ejemplo $x=-5$. Reemplazamos $x=-5$ en $x-4$, lo cual nos da -9, es decir un valor negativo, por lo que rellenamos el espacio respectivo con $-$. Si reemplazamos $x=-5$ en $x+4$ también obtenemos un número negativo, por lo que rellenamos con $-$. Finalmente, como al reemplazar $x=-5$, en $x-4$ y en $x+4$, en ambos casos nos dio negativo, entonces en este caso $(x-4)(x+4)$ es positivo, por lo que el espacio asociado lo rellenamos con $+$. En definitiva, tenemos

	$]-\infty,-4[$	-4	$]-4,4[$	-4	$]4,+\infty[$
$x-4$	-				
$x+4$	-				
$(x-4)(x+4)$	$+$				

Para rellenar la tercera columna, simplemente reemplazamos $x=-4$ en cada factor de la primera columna, si lo obtenido es positivo rellenamos con $+$, si es negativo con $-$ y si es cero, simplemente con 0.

	$]-\infty,-4[$	-4	$]-4,4[$	4	$]4,+\infty[$
$x-4$	-	-			
$x+4$	-	0			
$(x-4)(x+4)$	$+$	0			

Hacemos procedimiento análogo para cada intervalo venidero, es decir, escogemos un valor de prueba del intervalo en cuestión y lo reemplazamos en cada factor, lo obtenido determinará el signo de cada expresión de la columna en el intervalo en cuestión. En el caso de los puntos críticos venideros, simplemente se reemplaza. Como ya dijimos, si lo obtenido es positivo rellenamos con $+$, si es negativo con $-$ y si es cero, simplemente con 0. Finalmente, la tabla queda como

	$]-\infty,-4[$	-4	$]-4,4[$	4	$]4,+\infty[$
$x-4$	-	-	-	0	+
$x+4$	-	0	+	+	+
$(x-4)(x+4)$	+	0	-	0	+

De este modo, considerando los intervalos donde $(x-4)(x+4)$ es positivo, obtenemos que

$$S =]-\infty,-4[\cup]4,+\infty[\,.$$

d) $\dfrac{x^2}{2x-8} \leq -1.$

Solución. Algún estudiante podría multiplicar ambos miembros por $2x-8$, para que de este modo $2x-8$ aparezca multiplicando en el miembro derecho de la desigualdad. Sin embargo, esto a priori no es correcto realizarlo, dado que no sabemos si $2x-8$ es positivo o negativo, y esto podría mantener o cambiar el sentido de la desigualdad.

Razonemos de un modo distinto. Note que

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2x-8} \leq -1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-8}+1 \leq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-8}{2x-8} \leq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(x+4)(x-2)}{x-4} \leq 0.\end{aligned}$$

En la última inecuación, el numerador y el denominador de la fracción están completamente factorizados, por lo que hacemos la tabla de análisis de signo de la expresión $\frac{(x+4)(x-2)}{x-4}$, buscando los intervalos en los cuales esta fracción es negativa o 0, en virtud de la última inecuación. Note que

- $x+4$ se anula en $x=-4$.

- $x-2$ se anula en $x=2$.
- $x-4$ se anula en $x=4$.

De este modo, los puntos críticos son $-4, 2$ y 4. Estos puntos críticos determinan 4 intervalos abiertos, los cuales son considerados en la tabla:

	$]-\infty,-4[$	$x=-4$	$]-4,2[$	$x=2$	$]2,4[$	$x=4$	$]4,+\infty[$
$x+4$	-	0	+	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$2x-8$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{(x+4)(x-2)}{2x-8}$	-	0	+	0	-	no def	+

En vista de lo obtenido en la última fila de la tabla, obtenemos que

$$S = \,]-\infty,-4] \cup [2,4[\,.$$

□

Observación 4.10.1. En general, en una inecuación donde está despejado 0, los puntos críticos son los valores que hacen 0 o indefinen la expresión que está en el miembro opuesto a 0.

Veamos algunos ejercicios, en los cuales se deben aplicar las inecuaciones.

Ejercicio 4.10.2. *En una autopista de un país europeo existe un límite mínimo de velocidad. Circular a menos de* $75\frac{km}{h}$ *se considera una infracción que es multada. Oscar debe recorrer una distancia de 300 km por esa autopista y su vehículo no está en buenas condiciones mecánicas, por lo que debe conducir a una velocidad moderada y en ningún caso superior a los* $100\frac{km}{h}$. *Para tener una idea de cuanto demorará, desea estimar el tiempo, suponiendo que su velocidad será constante.*

a) *Si t es el tiempo que demorará en hacer el recorrido, obtenga la velocidad constante que debe llevar, en función de t.*

Solución. Como la velocidad constante se calcula como la distancia recorrida dividida por el tiempo empleado en recorrerla, entonces la velocidad corresponde a $\frac{300}{t}$.

b) *En base al enunciado, ¿qué dos inecuaciones debe satisfacer la velocidad obtenida en a)?*

Solución. La velocidad debe ser mayor o igual a $75\frac{km}{h}$ y menor o igual a $100\frac{km}{h}$. Es decir,

$$75 \leq \frac{300}{t} \leq 100. \tag{4.10.2}$$

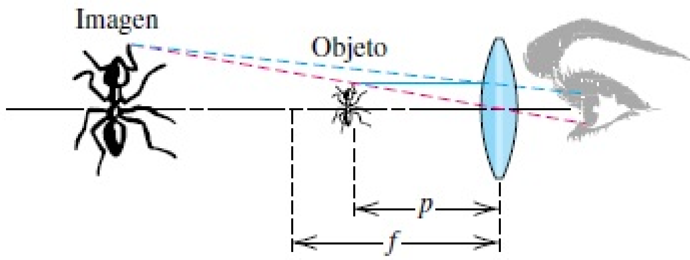
c) *¿Entre qué rango de valores se encuentra el tiempo que demorará en realizar el trayecto?*

Solución. Como $t > 0$, podemos multiplicar por t en (**??**) y obtenemos que

$$75t \leq 300 \leq 100t.$$

De la inecuación $75t \leq 300$, obtenemos que $t \leq 4$. De la inecuación $300 \leq 100t$, obtenemos que $3 \leq t$. Es decir, Elena demorará entre 3 y 4 horas.

Ejercicio 4.10.3. *En la figura se muestra un lente de aumento simple que consiste en un lente convexo. El objeto por amplificarse está colocado de modo que la distancia p desde el lente hasta el objeto es menor que la longitud focal f (es decir, el lente se está enfocando en un punto que está más lejos que el objeto mismo).*



La amplificación M es la razón entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto. Se demuestra en física que

$$M = \frac{f}{f-p}.$$

Si el foco está a 6 cms del lente, ¿a qué distancia debe colocarse el objeto del lente para que su imagen se vea al menos tres veces mayor?

Solución. Debemos resolver la inecuación $M \geq 3$. Como $f = 6$, esta inecuación es equivalente a

$$\frac{6}{6-p} \geq 3.$$

Como el objeto está más cerca del lente que el foco, entonces $p < 6$, o sea $6 - p > 0$, Multiplicando ambos miembros de la inecuación por $6 - p$, obtenemos

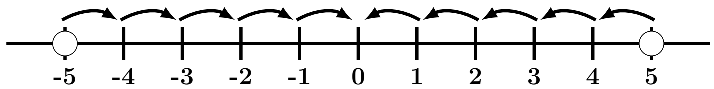
$$6 \geq 3(6-p),$$

expresión de la cual se deduce que

$$3p \geq 12,$$

o sea que $p \geq 4$. Por lo tanto, el objeto debe estar por lo menos a 4 cms del lente. $\square$

4.11. Valor absoluto.



Informalmente, el valor absoluto de un número real x, representa su distancia a 0 en la recta numérica, y se denota por $|x|$. En el dibujo, se ve que $|-5| = 5$ y $|5| = 5$.

Ejercicio 4.11.1. *Determine*

a) $|7|$.

b) $|-7|$.

c) $|-9|$.

d) $|0|$.

Solución. Posicionando $7, -7, -9$ y 0 en la recta numérica, podemos ver que

$$|7| = 7, |-7| = 7, |-9| = 9, |0| = 0.$$

□

Ejercicio 4.11.2. *Según lo visto en los ejercicios anteriores, conjeture*

a) *Si x es un número positivo o cero, ¿cuál es el valor de $|x|$?*

Solución. Como x es positivo o cero, de los ejemplos podemos inferir que su valor absoluto corresponde al mismo número x, por lo que

$$\forall x \geq 0 : |x| = x.$$

b) *Si x es un número negativo, ¿cuál es el valor de $|x|$?*

Solución. Como x es negativo, de los ejemplos podemos inferir que su valor absoluto corresponde a su opuesto aditivo $-x$, por lo que

$$\forall x < 0 : |x| = -x.$$

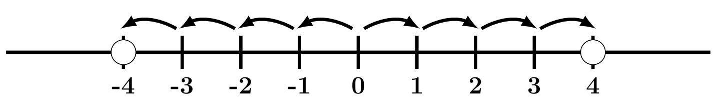
$\square$

Definición 4.11.1. *Sea $x \in \mathbb{R}$. El* ***valor absoluto*** *de x, el cual es denotado por $|x|$, viene dado por*

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 4.11.3. *Con ayuda de la recta numérica, obtenga el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| = 4$.*

Solución. Si x satisface $|x| = 4$, entonces x está a 4 unidades de 0 en la recta numérica:



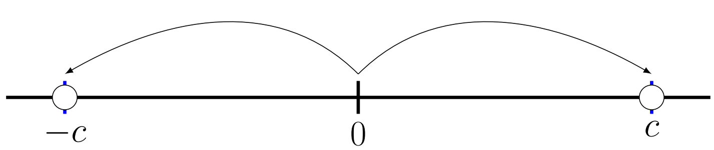
De este modo,

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \ \vee \ x = -4.$$

$\square$

Ejercicio 4.11.4. *Sea $c > 0$. Con ayuda de una recta numérica, obtenga los $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x| = c$.*

Solución. Si x satisface $|x| = c$, entonces x está a c unidades de 0 en la recta numérica:



De este modo,

$$|x| = c \Leftrightarrow x = c \ \vee \ x = -c.$$

$\square$

Proposición 4.11.2. *Sea $c > 0$. Se tiene que*

$$|x| = c \Leftrightarrow x = c \ \vee \ x = -c.$$

Ejercicio 4.11.5. *Considere la ecuación $|x - 1| = 2$.*

a) *Obtenga su conjunto solución.*

Solución. Usamos la proposición 4.11.2, para decir que

$$|x - 1| = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \ \vee \ x - 1 = -2$$

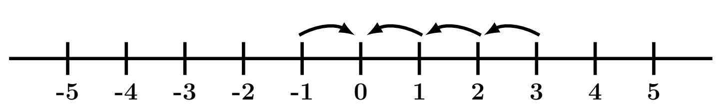
(Es decir, lo que está "dentro" del valor absoluto es igual a 2 o a -2). De este modo,

$$x = 3 \ \vee \ x = -1.$$

Es decir, $S = \{-1, 3\}$.

b) *Ubique sus soluciones en la recta numérica ¿qué podemos afirmar acerca de la distancia de cada una de ellas hasta 1?*

Solución. Ubicando las soluciones tenemos:



De donde podemos ver que la distancia de cada solución hasta 1 es de 2 unidades.

$\square$

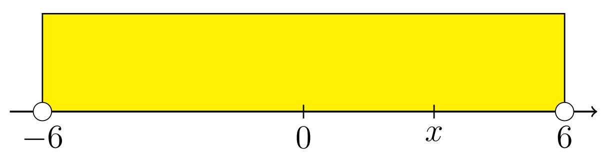
Observación 4.11.1. Sea $a \in \mathbb{R}$. La distancia, en la recta numérica, desde x hasta a, viene dada por

$$|x - a|.$$

De este modo, al resolver la ecuación $|x - a| = c$ para $c > 0$, obtenemos los números x que están a c unidades de a en la recta numérica, específicamente $x = c + a$ o $x = c - a$.

Ejercicio 4.11.6. *Con ayuda de la recta numérica, obtenga el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen que $|x| < 6$.*

Solución. Note que si x satisface esta inecuación, entonces su distancia a 0 es menor que 6:



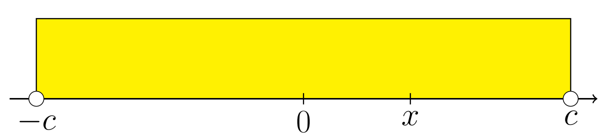
De este modo

$$S = \left]-6, 6\right[.$$

□

Ejercicio 4.11.7. *Sea $c > 0$. Con ayuda de la recta numérica, obtenga el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen que $|x| < c$.*

Solución. Note que si x satisface esta inecuación, entonces su distancia a 0 es menor que c:



De este modo

$$S = \left]-c, c\right[.$$

□

Proposición 4.11.3. *Sea $c > 0$. Se tiene que*

$$|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c.$$

y

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c.$$

Ejercicio 4.11.8. *Escriba la inecuación que permita encontrar todos los números reales x tales que su distancia a $\frac{1}{2}$ no es más de 5 unidades. Resuélvala, y usando la recta numérica, visualize que cada elemento del conjunto solución cumple con tal condición.*

Solución. La inecuación corresponde a

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 5. \tag{4.11.1}$$

Note que el símbolo $\leq$ "apunta" hacia el número 5 y no hacia el valor absoluto, por lo que aplicamos la proposición 4.11.3, para así deshacernos del valor absoluto. Se tiene que

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - \frac{1}{2} \leq 5$$

(Es decir, lo que está "dentro" del valor absoluto está entre -5 y 5).

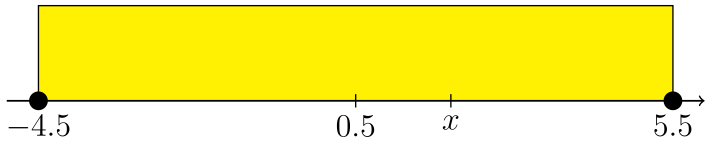
Luego, como

$$\begin{aligned} -5 \leq x - \frac{1}{2} \leq 5 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 5 \leq x \leq \frac{1}{2} + 5 \\ &\Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

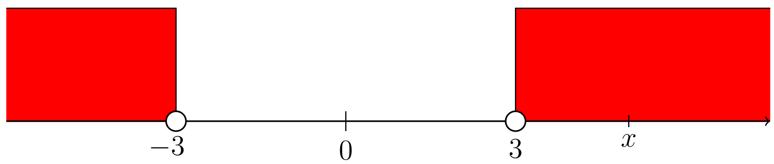
entonces el conjunto solución es $\left[-\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right]$. Así, para que x no esté a más de 5 unidades de 0,5, este debe pertenecer al intervalo $[-4{,}5, 5{,}5]$, lo cual se puede apreciar si lo representamos en una recta numérica:

$\square$

Ejercicio 4.11.9. *Con ayuda de la recta numérica, obtenga el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen que $|x| > 3$.*



Solución. Si x satisface la inecuación dada, entonces está a más de 3 unidades de 0 en la recta numérica:



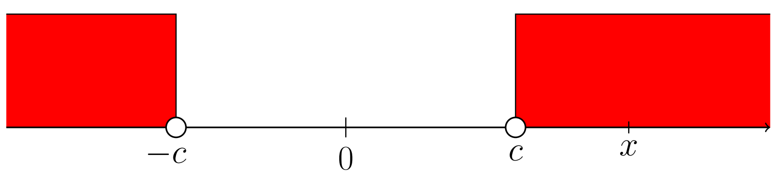
De este modo,

$$S = \left]-\infty, -3\right[\cup \left]3, +\infty\right[.$$

$\square$

Ejercicio 4.11.10. *Sea $c > 0$. Con ayuda de la recta numérica, obtenga el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que cumplen que $|x| > c$.*

Solución. Si x satisface esta inecuación, entonces su distancia a 0 es mayor que c, lo cual se visualiza como:



De este modo

$$S = \left]-\infty, c\right[\cup \left]c, +\infty\right[.$$

$\square$

Proposición 4.11.4. *Sea $c > 0$. Se tiene que*

$$|x| > c \Leftrightarrow x < -c \ \vee \ x > c$$

y

$$|x| \geq c \Leftrightarrow x \leq -c \ \vee \ x \geq c.$$

Ejercicio 4.11.11. *Escriba la inecuación que permita encontrar todos los números reales x tales que su distancia a $-\frac{3}{4}$ es a lo menos 6 unidades. Resuélvala, y usando la recta numérica, visualize que cada elemento del conjunto solución cumple con tal condición.*

Solución. La inecuación corresponde a

$$\left| x + \frac{3}{4} \right| \geq 6. \tag{4.11.2}$$

Como el símbolo $\leq$ "apunta" hacia el valor absoluto y no hacia 6, entonces aplicamos la propiedad 1.8 para deshacernos del valor absoluto. En efecto,

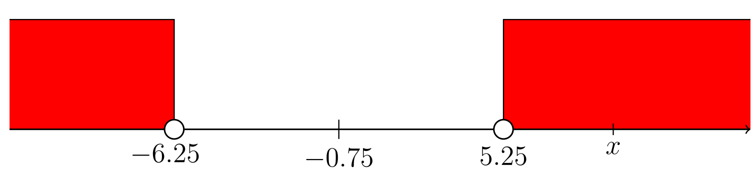
$$\left| x + \frac{3}{4} \right| \geq 6 \Leftrightarrow x + \frac{3}{4} \leq -6 \ \vee \ x + \frac{3}{4} \geq 6$$

(Es decir, lo que está 'dentro" del valor absoluto, es menor o igual a -6 o es mayor igual a 6).

De este modo, como

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{4} \leq -6 \ &\vee \ x + \frac{3}{4} \geq 6 \\ \Leftrightarrow x \leq -\frac{27}{4} \ &\vee \ x \geq \frac{21}{4}, \end{aligned}$$

entonces el conjunto solución es $\left]-\infty, -\frac{27}{4}\right] \cup \left[\frac{21}{4}, +\infty\right[$. O sea, para que x esté a lo menos a 6 unidades de 0,75, x debe pertenecer al conjunto $]-\infty, -6{,}25] \cup [5{,}25, +\infty[$, lo cual se puede apreciar si lo representamos en la recta numérica:



□

Veamos las siguientes propiedades:

Proposición 4.11.5. *Sean x, y números reales. Se tiene que*

- $|x| \cdot |y| = |xy|$. *Es decir, si dos valores absolutos se están multiplicando, podemos dejar esta expresión como un solo valor absoluto, el cual corresponde al valor absoluto de la multiplicación.*
- *Si* $y \neq 0$, *entonces* $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$. *Esto quiere decir, que si tenemos dos valores absolutos dividiéndose entre sí, entonces podemos dejar esta expresión como un sólo valor absoluto, el cual corresponde al valor absoluto de la división.*

Resolvemos algunas otras inecuaciones que involucran valores absolutos.

Ejercicio 4.11.12. *Obtenga el conjunto solución de la inecuación:*

a) $|x + 1| \leq 2\,|x - 2|$.

Solución. Intentamos dejar esta inecuación con un sólo valor absoluto. Para ello, en primer lugar, queremos dejar los dos valores absolutos en un sólo miembro de la desigualdad, ya sea el derecho o el izquierdo. En este caso, como $|x - 2| > 0$, para $x \neq 2$, entonces dividimos ambos miembros por $|x - 2|$, con $x \neq 2$, y obtenemos la inecuación

$$\frac{|x + 1|}{|x - 2|} \leq 2$$

(Note que como $|x - 2| > 0$, para $x \neq 2$, entonces al dividir por $|x - 2| > 0$, el sentido de la desigualdad se mantiene).

Ahora, como tenemos una división de valores absolutos, podemos juntarlos en uno sólo, obteniendo

$$\left|\frac{x + 1}{x - 2}\right| \leq 2. \tag{4.11.3}$$

De este modo, como en esta última inecuación tenemos un sólo valor absoluto, en un sólo miembro, y en el otro miembro un número positivo, entonces podemos deshacernos del valor absoluto, aplicando la propiedad 1.7 de esta sección (El símbolo $\leq$ apunta hacia 2). En efecto, (**??**) queda como

$$-2 \leq \frac{x+1}{x-2} \leq 2,$$

o de forma más detallada como

$$-2 \leq \frac{x+1}{x-2} \ \wedge \ \frac{x+1}{x-2} \leq 2. \tag{4.11.4}$$

Resolvemos ahora cada una de las dos inecuaciones de (**??**) (lo cual se deja a cargo del lector). Como (**??**) es una conjunción, entonces intersectamos sus conjuntos soluciones, obteniendo un conjunto solución S', el cual es válido para $x \neq 2$. Se tiene que

- El conjunto solución de $-2 \leq \frac{x+1}{x-2}$ es $S_1 = \left]-\infty, 1\right] \cup \left]2, +\infty\right[$.
- El conjunto solución de $\frac{x+1}{x-2} \leq 2$ es $S_2 = \left]-\infty, 2\right[\cup \left[5, +\infty\right[$.

De este modo,

$$S' = S_1 \cap S_2 = \left]-\infty, 1\right] \cup \left[5, +\infty\right[\,.$$

Pero, ¿qué ocurre con $x = 2$? El caso $x = 2$ simplemente consiste en reemplazar este valor en la inecuación original, y ver si se cumple la desigualdad obtenida. En efecto, al reemplazarlo obtenemos $1 \leq 0$, por lo que $x = 2$ no es parte del conjunto solución. En definitiva,

$$S = S' = \left]-\infty, 1\right] \cup \left[5, +\infty\right[$$

(En caso que se hubiese cumplido la desigualdad para $x = 2$, entonces el conjunto solución S se hubiese obtenido agregando $x = 2$ a S', es decir, $S = \left]-\infty, 1\right] \cup \{2\} \cup \left[5, +\infty\right[$).

b) $|x+1|+|2-x|>5$.

Solución. Nuestra primera intención es dejar en la inecuación un sólo valor absoluto. Sin embargo, dado que los valores absolutos se están sumando entre sí, no es posible juntarlos. Debemos buscar otro método, y éste corresponde a resolver la inecuación por casos. Veamos cómo funciona.

En virtud de la definición 4.11.1, definimos $|x+1|$ como

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0. \\ -(x+1), & x+1 < 0. \end{cases}$$

(En general, si $f(x)$ es una expresión que contiene a x, entonces

- $|f(x)| = f(x)$, es decir $|f(x)|$ es igual a lo que está dentro del valor absoluto, si $f(x) \geq 0$.
- $|f(x)| = -f(x)$, es decir $|f(x)|$ es igual al opuesto de lo que está dentro del valor absoluto, si $f(x) < 0$).

O sea,

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1. \\ -x-1, & x < -1. \end{cases} \tag{4.11.5}$$

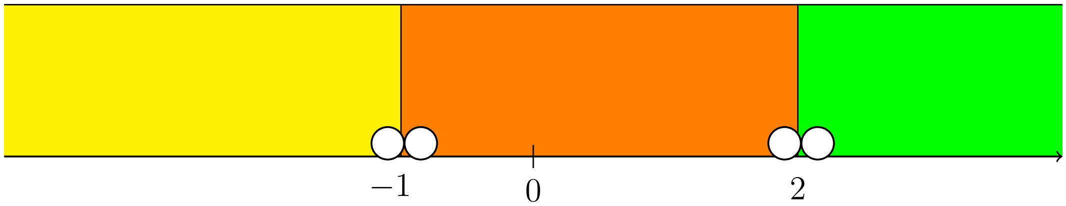
Análogamente, también en virtud de la definición 3.12.1, definimos $|2-x|$ como

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, & 2-x \geq 0. \\ -(2-x), & 2-x < 0. \end{cases}$$

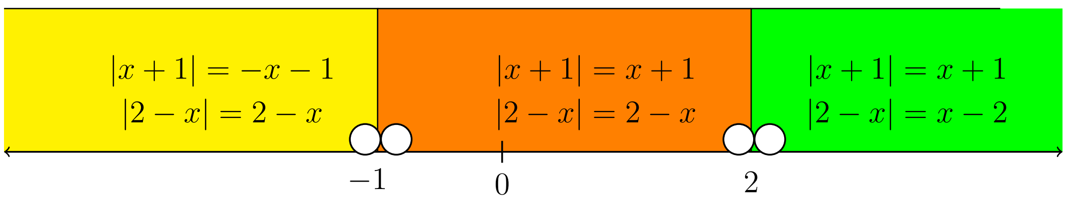
Es decir,

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, & 2 \geq x. \\ x-2, & 2 < x. \end{cases} \tag{4.11.6}$$

Ahora, en virtud de (**??**) y (**??**), hacemos una recta numérica, en la cual consideramos los puntos de cambio $x=-1$ y $x=2$. Estos puntos dividen a la recta numérica en 3 intervalos, los cuales están simbolizados en la siguiente figura:



y son $]-\infty,-1[\,,]-1,2[$ y $]2,+\infty[$. Como $x=-1$ y $x=2$ aún no fueron considerados ni en el intervalo inferior ni el intervalo superior a cada uno de ellos, esto se simboliza con un círculo blanco en cada intervalo. Ahora escribimos la definición de cada valor absoluto, según lo obtenido en (**??**) y (**??**), en cada intervalo respectivo:



En virtud de esta última figura, analizaremos tres casos, los cuales son

- Caso 1: $x<-1$.
- Caso 2: $-1\leq x\leq 2$.
- Caso 3: $2<x$.

Para cada uno de estos casos, resolveremos la inecuación, reemplazando cada valor absoluto por la expresión señalada en la última figura. Se tiene que

- **Caso 1:** $x<-1$.

  En este caso, según la última figura, la inecuación original

$$|x+1|+|2-x|>5$$

  corresponde a

$$(-x-1)+(2-x)>5, \tag{4.11.7}$$

cuya solución es

$$x < -2.$$

Es decir, el conjunto solución de la inecuación (**??**) es $S_1' = \,]-\infty, -2[$, el cual intersectándolo con el intervalo del caso 1, el cual es $]-\infty, -1[$, nos hace obtener el conjunto solución del caso, el cual es

$$S_1 = S_1' \cap \,]-\infty, -1[\, = \,]-\infty, -2[\, \cap \,]-\infty, -1[\, = \,]-\infty, -2[\,.$$

- **Caso 2:** $-1 \leq x \leq 2$.

  En este caso, según la última figura, la inecuación original

  $$|x+1| + |2-x| > 5$$

  corresponde a

  $$(x+1) + (2-x) > 5, \tag{4.11.8}$$

  la cual es equivalente a

  $$3 > 5.$$

  De este modo, el conjunto solución de (**??**) es $S_2' = \emptyset$. Lo intersectamos con el intervalo del caso 2, o sea con $[-1, 2]$, obteniendo que el conjunto solución del caso es

  $$S_2 = \emptyset.$$

- **Caso 3:** $2 < x$.

  En este caso, según la última figura, la inecuación original

  $$|x+1| + |2-x| > 5$$

  corresponde a

  $$(x+1) + (x-2) > 5, \tag{4.11.9}$$

  la cual es equivalente a

  $$x > 3,$$

por lo que $S_3' =]3, +\infty[$. Análogamente a los otros dos casos, el conjunto solución del caso es

$$S_3 = S_3' \cap]2, +\infty[=]3, +\infty[\cap]2, +\infty[=]3, +\infty[.$$

Finalmente, el conjunto solución S corresponde a la unión de los conjuntos solución de los 3 casos, es decir,

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =]-\infty, -2[\cup \emptyset \cup]3, +\infty[=]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[.$$

c) $\dfrac{x^2 + x + 1}{-|2 - x|} < 0.$

Solución. A veces es bueno detenerse y observar la expresión dada, antes de aplicar propiedades en forma mecánica. Tenemos que la expresión $-|2 - x|$ en el denominador es negativa, por lo que multiplicando ambos miembros de la inecuación por $-|2 - x|$, obtenemos

$$x^2 + x + 1 > 0 \tag{4.11.10}$$

(Note que el sentido de la desigualdad cambió). Ahora, intentamos factorizar $x^2 + x + 1$, para ello buscamos las soluciones de

$$x^2 + x + 1 = 0. \tag{4.11.11}$$

Como en este caso, $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$, entonces la última ecuación no tiene soluciones reales, y además $x^2 + x + 1$ no puede ser factorizado. Más aún, la ausencia de soluciones reales de (**??**), nos dice que $x^2 + x + 1$ es o siempre positivo o siempre negativo, para cualquier valor de $x \in \mathbb{R}$ que sea reemplazado en él. Para determinar cuál de estas dos opciones es la válida, reemplazamos cualquier valor de x, por ejemplo $x = 0$, en $x^2 + x + 1$, obteniendo $1 > 0$. De este modo, $x^2 + x + 1$ es siempre positivo, por lo que (**??**), es válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Note que en la inecuación original, el denominador $-|2 - x|$ se hace 0 para $x = 2$, por lo que el conjunto solución es

$$S = \mathbb{R} - \{2\}.$$

Ejercicio 4.11.13. *Calcule*

a) $\sqrt{5^2}$

b) $\sqrt{10^2}$

c) $\sqrt{-7^2}$

d) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$

Solución. En cualquiera de los ejercicios mencionados, la raíz cuadrada corresponde a un número positivo, por definición de raíz cuadrada. Así, las respuestas son

a) $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{(10)^2} = \sqrt{100} = 10$

c) $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

d) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

$\square$

Ejercicio 4.11.14. *Según lo visto en los ejercicios anteriores, conjeture:*

a) *Si $x \geq 0$, ¿a qué expresión corresponde $\sqrt{x^2}$?*

Solución. En este caso, $\sqrt{x^2} = x = |x|$.

b) *Si $x < 0$, ¿a qué expresión corresponde $\sqrt{x^2}$?*

Solución. En este caso, $\sqrt{x^2} = -x = |x|$. $\square$

Proposición 4.11.6. *Se tiene que*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|.$$

Resolvemos algunas ecuaciones e inecuaciones cuadráticas usando el teorema anterior:

Ejercicio 4.11.15. *Determine el conjunto solución de*

a) $x^2 > 36$.

Solución. Extraemos raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad, y ésta se mantiene (en el capítulo de funciones explicaremos porqué). En efecto:

$$x^2 > 36 \Leftrightarrow |x| > 6$$

Resolviendo la última inecuación, deducimos que

$$x < -6 \ \lor \ x > 6.$$

De este modo, $S =]-\infty, -6[\cup [6, +\infty[$.

b) $x^2 - 2x \leq 120$.

Solución. Completamos cuadrado del binomio en el miembro izquierdo de la desigualdad:

$$x^2 - 2x \leq 120 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 121 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 121.$$

Ahora extraemos raíz cuadrada en la última desigualdad, y luego aplicamos la propiedad respectiva de valor absoluto:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 \leq 121 &\Leftrightarrow |x-1| \leq 11 \\ &\Leftrightarrow -11 \leq x - 1 \leq 11 \\ &\Leftrightarrow -10 \leq x \leq 12.\end{aligned}$$

En definitiva, el conjunto solución es $S = [-10, 12]$. $\square$

4.12. Ecuaciones con raíces.

En esta sección, pretendemos resolver ecuaciones en las cuales intervienen raíces, y además la incógnita forma parte de la cantidad subradical, es decir, en forma informal, la incógnita aparece "dentro" de la o las raíces presentes.

Ejercicio 4.12.1. *Resuelva la ecuación*

$$\sqrt{3x+7} = x - 1. \tag{4.12.1}$$

Solución. Elevamos el cuadrado en ambos miembros de la ecuación, obteniendo que

$$3x + 7 = x^2 - 2x + 1.$$

Si igualamos a 0, logramos obtener la ecuación cuadrática

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$x = 6 \ \vee \ x = -1.$$

¿Son estos dos valores, soluciones de nuestra ecuación? Veamos si es así:

- Si $x = 6$, entonces
$$\sqrt{3x+7} = \sqrt{3 \cdot 6 + 7} = \sqrt{25} = 5,$$
y además
$$x - 1 = 6 - 1 = 5.$$
Así, $x = 6$ es solución de nuestra ecuación.

- Si $x = -1$, entonces
$$\sqrt{3x+7} = \sqrt{3 \cdot (-1) + 7} = \sqrt{4} = 2.$$
Por otro lado,
$$x - 1 = -1 - 1 = -2,$$
por lo que $x = -1$ no es solución de nuestra ecuación.

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{6\}$. $\square$

Observación 4.12.1. Justifiquemos de otra forma el hecho que $x = -1$ no es solución de nuestra ecuación. Recordemos que ésta es

$$\sqrt{3x+7} = x - 1.$$

Como $3x + 7$ está "dentro" de la raíz, entonces tenemos la restricción

$$3x + 7 \geq 0,$$

de donde se deduce que x debe cumplir que

$$x \geq -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3} = -2.\overline{3}.$$

Sin embargo, $x = -1$ satisface esta última desigualdad. Por otro lado, al observar nuevamente nuestra ecuación, vemos que $x - 1$ es igual a una raíz cuadrada, por lo tanto, nace la condición que

$$x - 1 \geq 0,$$

o sea

$$x \geq 1.$$

Esta última condición claramente no es cumplida por $x = -1$. En general, al resolver una ecuación de este tipo, nos encontramos con un número finito de posibles soluciones, por lo que para verificar si cada una de ellas es solución de la ecuación dada, basta reemplazar cada valor obtenido en la ecuación original y observar si se satisface la igualdad. Otra forma sería considerar las restricciones antes de resolver la ecuación, y luego descartar alguna posible solución en virtud de estas restricciones.

Ejercicio 4.12.2. *Resuelva la ecuación*

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5.$$

Solución. Elevamos al cuadrado en ambos miembros, obteniendo

$$\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}\right)^2 = 25,$$

lo que es equivalente a

$$x + 4 + 2\sqrt{(x+4)(x-1)} + x - 1 = 25.$$

Despejamos la raíz de esta última ecuación:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)} = 11 - x.$$

Si elevamos de nuevo al cuadrado, se logra que

$$(x+4)(x-1) = 121 - 22x + x^2,$$

o sea que

$$x^2 + 3x - 4 = x^2 - 22x + 121,$$

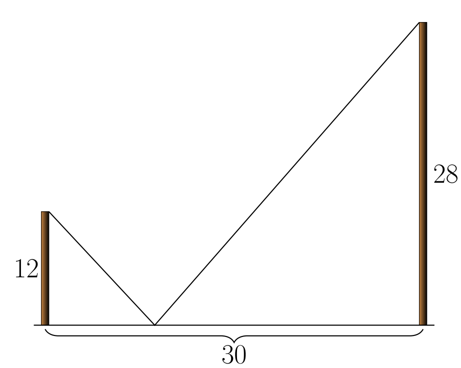
de donde despejando x, obtenemos que $x = 5$. Reemplazamos este valor en la ecuación original. En efecto, en este caso

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5,$$

por lo que $S = \{5\}$.

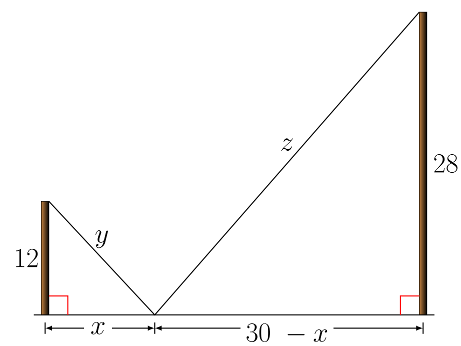
Veamos una aplicación de las ecuaciones con raíces:

Ejercicio 4.12.3. *Dos postes, uno de 12 metros y otro de 28 metros, están a 30 metros de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sóla estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste.*



Si se dispone de 50 metros de cable para unir los postes de este modo, ¿A qué distancia de cada poste debe ubicarse la estaca?

Solución. Sea x la distancia desde el poste de 12 metros hasta la estaca. Consideramos el dibujo



Por el teorema de Pitágoras,

$$y = \sqrt{x^2 + 144}, \;\; z = \sqrt{(30 - x)^2 + 28^2} = \sqrt{x^2 - 60x + 1684}.$$

De este modo, la longitud total del cable, la cual viene dada por $y + z$, corresponde a

$$\sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}.$$

Así, si el cable mide 50 metros, entonces para obtener la distancia x desde la estaca al poste más pequeño debemos resolver la ecuación

$$\sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684} = 50,$$

la cual es equivalente a

$$\sqrt{x^2 - 60x + 1684} = 50 - \sqrt{x^2 + 144}.$$

Elevando al cuadrado en esta última ecuación y simplificando lo que sea necesario, obtenemos

$$5\sqrt{x^2 + 144} = 3(16 + x).$$

Elevando al cuadrado y simplificando nuevamente, llegamos a la ecuación

$$x^2 - 18x + 81 = 0,$$

por lo que $x = 9$. De este modo, la estaca debe estar a 9 metros del primer poste y a $30 - 9 = 21$ metros del segundo poste. □

4.13. Inecuaciones con raíces.

En esta sección, pretendemos resolver inecuaciones con raíces, en las cuales la incógnita forma parte de la cantidad subradical, es decir, en forma informal, la incógnita aparece "dentro" de la o las raíces presentes. ¡Hay que tener mucho cuidado con las restricciones para los valores de la incógnita!

Ejercicio 4.13.1. *Determine el conjunto solución de la inecuación*

$$\sqrt{-1-2x} < x + 2.$$

Solución. Consideramos las restricciones desde un comienzo. Note que la cantidad que está "dentro" de la raíz debe ser no negativa, por lo que

$$-1 - 2x \geq 0,$$

o sea, $x \leq -\frac{1}{2}$. De este modo, el primer conjunto restricción es

$$R_1 = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right].$$

Por otro lado, observando la inecuación a resolver, vemos que la expresión $x + 2$ es mayor que una raíz cuadrada, la cual es no negativa, por lo tanto, aparece la condición que

$$x + 2 > 0.$$

Así, $x > -2$, y así nuestro segundo conjunto restricción es

$$R_2 = \left]-2, +\infty\right[.$$

De este modo, el conjunto restricción es

$$R = R_1 \cap R_2 = \left]-2, -\frac{1}{2}\right].$$

Dado $x \in R$, en este caso se tiene que ambos miembros de nuestra inecuación son no negativos. Así, elevamos al cuadrado ambos miembros, y el sentido de la desigualdad se mantiene (la razón la explicaremos en el capítulo de funciones), obteniendo

$$-1 - 2x < x^2 + 4x + 4.$$

Esta inecuación es equivalente a

$$x^2 + 6x + 5 > 0,$$

cuyo conjunto solución es $S' = \left]-\infty, -5\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$. De este modo, como x también debe pertenecer a R, entonces el conjunto solución de nuestra inecuación original es

$$S = S' \cap R = \left]-1, -\frac{1}{2}\right].$$

$\square$

Observación 4.13.1. Generalizemos lo hecho en el ejercicio anterior. Si consideramos una inecuación de la forma

$$\sqrt{a} < b, \tag{4.13.1}$$

las restricciones son:

- $a \geq 0$, dado que a es la cantidad subradical.
- $b > 0$, dado que en (**??**), b es mayor que una raíz cuadrada.

Luego de haber hecho estas restricciones, nos aseguramos que ambos miembros de (**??**) son no negativos, por lo que elevamos al cuadrado para resolver nuestra inecuación, y el sentido de la desigualdad se mantiene.

Ejercicio 4.13.2. *Resuelva la inecuación*

$$\sqrt{x^2+5x+6} \leq x+4.$$

Solución. La cantidad subradical debe ser no negativa, esto nos origina la condición que

$$x^2+5x+6 \geq 0,$$

de donde se deduce que

$$x \leq -3 \ \vee \ x \geq -2.$$

Es decir, el primer conjunto restricción es

$$R_1 =]-\infty, -3] \cup]-2, +\infty[\,.$$

Note que, en la inecuación a resolver, $x+4$ es mayor o igual a una raíz cuadrada, cuyo valor es por lo menos 0. De este modo

$$x+4 \geq 0,$$

de donde $x \geq -4$, y así

$$R_2 = [-4, +\infty[\,.$$

Concluimos que el conjunto restricción es

$$R = R_1 \cap R_2 = [-4, -3] \cup [-2, +\infty[\,.$$

Si $x \in R$, entonces ambos miembros de nuestra inecuación son mayores o iguales 0. De este modo, si elevamos al cuadrado ambos miembros, el sentido de la desigualdad se mantiene. En efecto, obtenemos que

$$x^2+5x+6 \leq x^2+8x+16,$$

de donde se deduce que

$$-\frac{10}{3} \leq x.$$

O sea, $S' = \left[-\frac{10}{3}, +\infty\right[$. Luego, como $-\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3} = -3,\overline{3}$ entonces

$$S = S' \cap R = \left[-\frac{10}{3}, -3\right] \cup [-2, +\infty[\,.$$

$\square$

Observación 4.13.2. Generalizamos el ejercicio anterior. Si consideramos una inecuación de la forma

$$\sqrt{a} \leq b \tag{4.13.2}$$

las restricciones son:

- $a \geq 0$, dado que a es la cantidad subradical.
- $b \geq 0$, dado que en (**??**), b es mayor o igual que una raíz cuadrada, la cual a lo menos es 0.

luego de haber hecho estas restricciones, nos aseguramos que ambos miembros de (**??**) son no negativos, por lo que elevamos al cuadrado para resolver nuestra inecuación, y el sentido de la desigualdad se mantiene.

Ejercicio 4.13.3. *Resuelva la inecuación*

$$\sqrt{2x-1} > x - 2.$$

Solución. Veamos primero las restricciones. La cantidad subradical debe ser no negativa, por lo que

$$2x - 1 \geq 0,$$

de donde se deduce que $x \geq \frac{1}{2}$. De este modo,

$$R_1 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

Note que, en nuestra inecuación, $x-2$ es menor que una raíz cuadrada, por lo que $x-2$ podría tomar cualquier valor, es decir, puede ser positivo, negativo o cero. Analizamos cada una de estas opciones:

- Caso 1: Supongamos que $x - 2 \geq 0$. En este caso $x \geq 2$, por lo que

  $$R_2 = [2, +\infty[.$$

  De este modo,

  $$R = R_1 \cap R_2 = [2, +\infty[.$$

Si $x \in R$, entonces ambos miembros de nuestra desigualdad son no negativos. Elevando al cuadrado ambos miembros, el sentido de la desigualdad se mantiene, obteniendo

$$2x - 1 > x^2 - 4x + 4.$$

De aquí se deduce que

$$1 < x < 5,$$

o sea, $S_1' = [1, 5[$. De este modo, el conjunto solución del primer caso, el cual llamamos S_1, es

$$S_1 = S_1' \cap R = [2, 5[\,.$$

- Caso 2: Supongamos que $x - 2 < 0$. En este caso $x < 2$, por lo que

$$R_2 = [-\infty, 2[\,.$$

De este modo, en este caso

$$R = R_1 \cap R_2 = \left[\frac{1}{2}, 2\right[.$$

Note que, si $x \in R$, entonces en nuestra inecuación original, $\sqrt{2x-1}$ es no negativo y $x - 2$ es negativo. Así, nuestra inecuación

$$\sqrt{2x-1} > x - 2,$$

es valida para todos los valores de R. Concluimos que el conjunto solución del segundo caso, el cual denotamos por S_2, es

$$S_2 = R = \left[\frac{1}{2}, 2\right[.$$

Finalmente, para que un cierto valor de x sea solución de nuestra inecuación, entonces x debe pertenecer a S_1 o a S_2, por lo que

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{1}{2}, 5\right[.$$

□

Observación 4.13.3. Consideremos una inecuación de la forma

$$\sqrt{a} > b \tag{4.13.3}$$

En este caso, debemos notar que:

- la cantidad subradical a debe ser no negativa, es decir

$$a \geq 0.$$

- como b es menor que una raíz cuadrada, entonces nos colocamos en dos casos
  - $b \geq 0$. Luego de realizada esta restricción, ambos miembros de (**??**) son no negativos, por lo que elevamos al cuadrado ambos miembros de (**??**), y el sentido de la desigualdad se mantiene.
  - $b < 0$. Luego de realizada esta restricción, notamos que $\sqrt{a}$ es no negativo, y b es negativo en (**??**), por lo que (**??**) se cumple siempre en este caso.
- el conjunto solución será la unión de los conjuntos soluciones obtenidos en ambos casos.

Ejercicio 4.13.4. *Resuelva la inecuación*

$$\sqrt{x^2 - 1} \geq x + 2.$$

Solución. La cantidad subradical debe ser no negativa, luego

$$x^2 - 1 \geq 0.$$

De este modo,

$$R_1 = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[.$$

Como $x + 2$ es menor o igual a una raíz cuadrada, nos colocamos en dos casos:

- Caso 1: Supongamos que $x + 2 \geq 0$. En este caso $x \geq -2$, por lo que $R_2 = [-2, +\infty[$. De este modo, en este caso

$$R = R_1 \cap R_2 = \left[-2, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[.$$

Si $x \in R$, entonces, en nuestra inecuación, ambos miembros son no negativos. Elevamos al cuadrado, obteniendo que

$$x^2 - 1 \geq x^2 + 4x + 4,$$

de donde $x \leq -\frac{5}{4}$. Así,

$$S_1' = \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right],$$

y como $-\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4} = -1{,}25$, entonces

$$S_1 = S' \cap R = \left[-2, -\frac{5}{4}\right].$$

- Caso 2: Si $x + 2 < 0$, entonces $x < -2$, y así

$$R_2 = \left]-\infty, -2\right[.$$

De este modo, en este caso

$$R = R_1 \cap R_2 = \left]-\infty, -2\right[.$$

Si $x \in R$, se tiene que en nuestra inecuación, $\sqrt{x^2 - 1}$ es no negativo, y $x + 2$ es negativo, por lo que esta desigualdad se cumple para cualquier $x \in R$. Así,

$$S_2 = R = \left]-\infty, -2\right[.$$

Por lo tanto

$$S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right].$$

□

Observación 4.13.4. En el caso de inecuaciones del tipo

$$\sqrt{a} \geq b \tag{4.13.4}$$

se procede de forma similar al tercer caso, es decir:

- la cantidad subradical a debe ser no negativa, es decir

$$a \geq 0.$$

- como b es menor o igual a una raíz cuadrada, b no necesariamente es positivo, por lo que consideramos dos casos:
  - $b \geq 0$. Luego de realizada esta restricción podemos elevar al cuadrado ambos miembros de (**??**).
  - $b < 0$. Luego de realizada esta restricción, la desigualdad (**??**) es siempre válida en este caso.
- el conjunto solución será la unión de los conjuntos soluciones obtenidos en abos casos.

$\square$

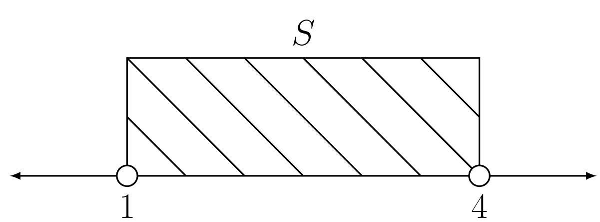
4.14. Cotas de un conjunto.

Para introducirnos en este tema, veamos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 4.14.1. *Considere el conjunto* $S = \left]-1, 4\right[$. *Determine, si es que existe, un número real* k *tal que*

$$\forall x \in S : x \leq k.$$

Solución. Una representación de nuestro conjunto es



Buscamos un número k que supere o sea igual a cualquier elemento del conjunto S. Notamos que $k = 4$ o también $k = 5$ cumplen con esta condición. En general, cualquier $k \geq 4$, satisface esta condición. Cada valor de k que satisface la condición pedida, es decir, que supera o es igual a cualquier elemento de S, se denomina **cota superior** de

S. Además, como S posee cotas superiores, se dice que S es **acotado superiormente**. Note que la menor de las cotas superiores es $k = 4$, el cual recibe el nombre de **supremo** de S. □

Ejercicio 4.14.2. *Considere el conjunto*

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

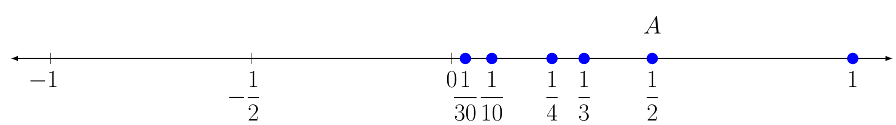
Determine, si es que existe, un número real m *que cumple que*

$$\forall x \in A : m \leq x$$

Solución. Algunos elementos de A son

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

En la medida que n es número natural cada vez mayor, entonces $\frac{1}{n}$ se acerca cada vez más a 0, pero nunca lo es. De este modo, una representación del conjunto A es



Buscamos un número real m, que en la recta numérica, esté a la izquierda o a lo más sea igual que cualquier elemento de A. Vemos que $m = 0$ cumple con esta condición, también $m = -\frac{1}{2}$ o $m = -1$. En general, cumple esta condición cualquier $m \leq 0$. Cada valor de m en el rango mencionado, recibe el nombre de **cota inferior** de A. Además, como A posee cotas inferiores, se dice que A es **acotado inferiormente**. Note que $m = 0$ es la mayor de las cotas inferiores, y recibe el nombre de **ínfimo** de A. □

En general, tenemos que

Definición 4.14.1. *Sea* $S \subseteq \mathbb{R}$, *con* $S \neq \emptyset$. *Sean* $k, m \in \mathbb{R}$. *Se dice que:*

- k *es una* ***cota superior*** *de* S *si*

$$x \leq k, \forall x \in S.$$

- *m es una **cota inferior** de S si*

$$m \leq x, \forall x \in S.$$

- *S es **acotado superiomente**, si S tiene cotas superiores.*

- *S es **acotado inferiormente**, si S tiene cotas inferiores.*

- *S es **acotado**, si S es acotado inferior y superiormente.*

Observación 4.14.1. Sea S un conjunto no vacío. Según la definición recién dada, k es una cota superior de S, si supera o a lo menos es igual a cualquier elemento de S. Note que una cota superior de S no tiene porque necesariamente que pertenecer a S. Por otro lado, en forma análoga, m es una cota inferior de S, si es menor o a lo más igual a cualquier elemento de S. Del mismo modo anterior, una cota inferior de S no tiene necesariamente que pertenecer a S.

Definición 4.14.2. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}$, con $S \neq \emptyset$.*

- *Si S es acotado superiormente, entonces el **supremo** de S, si es que existe, es la menor de las cotas superiores de S. Se denota por $s = \sup(S)$. Más precisamente, s satisface que*

    - *$x \leq s, \forall x \in S$.*

    - *$x \leq s', \forall x \in S \Rightarrow s \leq s'$ (si hay otra cota superior s', esta no es inferior a s).*

- *Si S es acotado inferiormente, entonces el **ínfimo** de S, si es que existe, es la mayor de las cotas inferiores de S. Se denota por $i = \inf(S)$. Más precisamente, i satisface que*

    - *$i \leq x, \forall x \in S$.*

    - *$i' \leq x, \forall x \in S \Rightarrow i' \leq i$ (si hay otra cota inferior i', esta no es superior a i).*

Observación 4.14.2. No todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es acotado superiormente, por ejemplo, el conjunto $]3, +\infty[$ no tiene cotas superiores, aunque tiene cotas inferiores, siendo su ínfimo igual a 3. Por otro lado, no todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es acotado inferiormente, por ejemplo el conjunto $]-\infty, 2[$ no tiene cotas inferiores, aunque si tiene cotas superiores, siendo su supremo igual a 2. Finalmente, existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no son acotados ni inferior ni superiormente, como lo es por ejemplo, el conjunto

$$]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[\,.$$

Concluimos esta sección con el siguiente axioma:

Axioma 4.10. *(Axioma de completitud) Sea $S \subseteq \mathbb{R}$, con $S \neq \emptyset$. Si S es acotado superiormente (inferiormente) entonces existe $sup(S)(inf(S))$.*

4.15. Ejercicios propuestos.

1. Considere la siguiente tabla con expresiones algebraicas:

$12(x-3)$	$x-5000$	$50-x$
$50+x$	$5000-x$	$4x$
$\frac{x}{4}$	$\frac{(x+3)}{12}$	$2x+2y$

Indique si cada enunciado siguiente corresponde a alguna de las expresiones algebraicas de la tabla, indicando su número:

a) La edad que tendré en 50 años más.

b) La edad que tenía hace 50 años.

c) El longitud de una cuerda con la que se encierra un terreno rectangular de longitudes x e y.

d) El vuelto que debo recibir, si compré un artículo en x pesos y pagué con un billete de \$5000.

e) El número de ruedas de x autos.

f) El número de caballos, si en total conté x patas.

g) La ganancia que obtuvé, si compré un lápiz en x pesos y lo vendi en \$5000.

h) El número de conejos, si en total conté x patas.

i) La cantidad de trajes que realize, si hice 12 trajes por día, y finalize 3 días antes de lo presupuestado.

j) La cantidad de trajes que hice por día, si hice 3 trajes más de lo presupuestado y demore en total 12 días.

2. Si x es un número natural, obtenga:

a) su antecesor.

b) su triple.

c) su tercera parte.

d) su mitad disminuidas en una unidad.

e) la mitad de su antecesor.

f) su 25 %.

3. Si Daniela tiene x años, obtenga

a) La edad que tendrá en 4 años más.

b) La edad que tenía hace 4 años.

c) Los años que le faltan para tener la edad de su padre, el cual tiene 47 años.

d) Los años que le faltan a su hijo para tener la edad de Daniela, considerando que este tiene 7 años.

e) La edad de su abuela, la cual excede al doble de la edad de Daniela en 20 años.

f) La edad de su primo, sabiendo que la mitad de la edad de Daniela la excede en 3 años.

g) Los meses que ha vivido, si hoy cumplió x años.

4. Factorize, si es posible, las siguientes expresiones algebraicas:

a) $abcd + acde + adef$
b) $x^2 + 3x^3 - 2x^4$
c) $18x + 24y - 30z$
d) $10x^3y^4 - 15x^2y^5 - 20x^5y^7$
e) $xz - yz + xw - yw$
f) $\frac{5}{14}x^3 - \frac{10}{21}x^2 + \frac{20}{7}x^4$
g) $x^4 - y^4$
h) $144x^6 - 81y^2$
i) $36x^4 - 169y^8$
j) $x^6 - 1$
k) $12x^8 - 48x^6$
l) $x^2 + 7x + 10$
m) $x^2 - 14x + 49$
n) $x^2 - x - 12$
ñ) $x^2 + 7x - 60$
o) $x^2 - 5x + 6$
p) $x^2 - x - 6$
q) $x^2 + x - 6$
r) $9x^2 + 8x - 1$
s) $5x^2 - 13x + 6$
t) $6x^2 + x - 2$
u) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
v) $x^4 + 8x^2 + 16$
w) $x^3 - 3x^2 - 54x$
x) $81x^3 - 1$
y) $8 + 64y^6$
z) $\dfrac{1}{27}x^9 - \dfrac{1}{125}y^{12}$
a2) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
b2) $x^3 + 9x^2 + 27x + 81$

5. Realize las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x+1}$

b) $2 - \dfrac{1}{4 - x^2}$

c) $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2}$

d) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x}{x+1}$

e) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$

f) $\dfrac{4}{x^2-25} + \dfrac{x+2}{x^2-2x-15}$

g) $\dfrac{x}{x^2+x-2} - \dfrac{3}{x^2+2x-3} - \dfrac{x}{x^2+5x+6}$

h) $\dfrac{1}{x^4-2x^3+x^2} + \dfrac{1}{x^3(x+1)}$

6. Simplifique, si es posible, las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$

b) $\dfrac{x^4+x^2}{x^2}$

c) $\dfrac{x^2-3x-18}{x^2-9}$

d) $\dfrac{9-x^2}{x^2-6x+9}$

e) $\dfrac{1-x^3}{x^2-3x+2}$

7. Racionalize las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$

c) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^4-1}}$

e) $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

g) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

8. Obtenga, si es que existe, el valor de x que satisface la ecuación

a) $2x + 1 = \frac{3}{2}$

b) $2x + 1 = 2x$

c) $3x - 4 = 2\left(\frac{x}{4} + 7\right) + x$

d) $x - \left(\frac{x}{2} - (2+x)\right) = 1 - (1-4x)$

e) $\frac{x}{8} - \frac{x+30}{16} + \frac{14-x}{12} = -\left(1 - \frac{1}{4}\right)$

f) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{1+x}} = -3$

9. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $x - y = -3,\ 5x + y = 27$

b) $5x + y = 27,\ x + 2y = 0$

c) $x - 2y = 0,\ 2x + y = -15$

d) $2x + 6y = 2,\ -x - 3y = 0$

e) $x + 2y = 4,\ -2x - 8y = -8$

f) $4x + 6y = 6,\ 6x + 4y = 14$

g) $6x - 8y = 2,\ 8x - 6y = -2$

h) $3x - 4y = -6,\ 2x + 4y = 16$

Resuélva cada uno de ellos:

a) multiplicando una o ambas ecuaciones por un cierto número, y luego eliminando una de las incógnitas.

b) despejando una incógnita de una ecuación y reemplazándola en la otra.

10. Resuelva los siguientes problemas, planteando y resolviendo una ecuación o un sistema de ecuaciones:

a) Un número más su quinta parte suman 18. ¿Cuál es el número?

b) Tres números consecutivos suman 444. ¿Cuáles son los números?

c) Necesitamos repartir 27 naranjas en 2 cajas, de modo que dada la capacidad de ellas, caben 3 naranjas más en la segunda caja que en la primera caja. ¿Cuántas naranjas debería ir en cada caja?

d) Un químico contiene una solución de 10 mililitros que contiene una concentración de 10 % de ácido. ¿Cuántos mililitros de ácido se deben agregar para que la concentración sea del 50 %?

e) Don Raúl tuvó su primer hijo cuando tenía 24 años, al segundo cuando tenía 28 años y al tercero cuando tenía 32 años. Si las edades de sus tres hijos suman 36 años. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y de sus hijos?

f) Carlos y María José juntaron \$74000 para salir de paseo por el fin de semana largo. María José puso \$7000 menos que Andrés. ¿Cuánto dinero aportó cada uno?

g) El paseo de fin de año de un curso, fue organizado de modo que vayan los niños con su mamá y su papá. Finalmente asistieron 13 mamás más que papás, y las mamás fueron 5 menos que los niños. Si en total asistieron 106 personas, ¿cuántos niños, mamás y papás asistieron?

h) Tengo 120 animales en mi granja, entre cerdos, ovejas y vacas en mi granja. Las ovejas son 20 más que los cerdos, y las vacas son 5 más que las ovejas. ¿Cuántas ovejas, vacas y cerdos hay?

i) En la billetera de Elisa hay 62 billetes, entre billetes de \$5000, \$2000 y \$1000. Ella tiene el doble de billetes de \$5000 que de \$2000 y los billetes de \$1000 son dos más que los billetes de \$5000. ¿Cuántos de cada tipo de billete hay?

j) En un cajón tengo naranjas, manzanas y plátanos. Si hay el doble de manzanas que de naranjas, y el doble de plátanos que de manzanas. Si en total tengo 126 frutas, ¿cuántas frutas de cada tipo hay?

k) Me compré unas gafas, un libro y un sombrero. El libro me costó la mitad de lo que me costaron las gafas y el sombrero lo mismo que el libro y las gafas juntas. Si gasté en total \$84000, ¿cuánto me costó cada artículo?

l) En la elección a alcalde de Pelotillehue, Condorito obtuvó el triple de votos que Pepe Cortisona, y Ungenio 500 votos más Condorito y Pepe Cortisona juntos. Si en total votaron 12500, y nadie votó nulo o en blanco, ¿cuántos votos obtuvo cada uno?

m) La edad de Pedro es el doble de la edad de María. Si en 5 años más sus edades sumarán 43 años, ¿cuáles son sus edades actuales?

n) En el garaje de una fábrica de respuestos de transporte, hay 110 vehículos entre autos y motos. Si las ruedas suman 360, ¿cuántos autos y motos hay?

ñ) Andrea a rendir una prueba para ingresar a la PDI, la cual consiste en 20 preguntas. Por cada respuesta correcta se le asignan 3 puntos, y por cada respuesta incorrecta se le restan 2 puntos. ¿Cuántas respuestas acertó, si obtuvo un puntaje de 30 puntos?

o) Para la rendición de la PSU en un liceo, se regalaron 96 lápices, los cuales se dividen entre lápices pasta y lápices gráfito. Si cada lápiz pasta costó $800 y cada lápiz gráfito costó $650, obtenga una expresión para el costo total de los lápices. Si el costo total fue de $69300, ¿cuántos lápices de cada tipo se regalaron?

p) Susana se va a comprar un pantalón y una polera. Al observar los precios en la tienda, se da cuenta que entre ambas prendas debe pagar un total de $48000. Sin embargo, al llegar a la caja, le cuentan que por comprar ambos artículos, el pantalón tiene un 20 % de descuento, por lo que tiene en pagar en total sólo $42000 ¿Cuál es el precio original de cada artículo?

q) José y Agustín circulan en bicicleta por una carretera el uno hacia el otro, estando a 30 km de distancia entre sí. José avanza a una rapidez de $20\frac{km}{h}$ y Agustín a $16\frac{km}{h}$. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que José y Agustín se encuentren?

r) El asaltante de un banco arranca en un automóvil, a una rapidez promedio de $60\frac{km}{h}$. A las 2 horas, lo empieza a perseguir un auto policial, el cual va a una rapidez promedio de $100\frac{km}{h}$. ¿Al cuánto tiempo de partir, la policía alcanzará al asaltante?

s) Para su fiesta de cumpleaños, Laura quiere comprar chocolates, y para ello dispone de un monto fijo, con el cual según lo cotizado le alcanzan 40 chocolates. Sin embargo, el día que fue a comprarlos, notó que el precio de cada chocolate aumentó en \$100, por lo que sólo pudo comprar 35. ¿Cuál era el precio inicial de cada chocolate?

11. Obtenga una ecuación cuadrática:

    a) Cuyas soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$.
    b) Cuyas soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$.
    c) Cuyas soluciones son $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{1}{2}$.
    d) Cuyas soluciones son $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{1}{5}$.
    e) Cuyas soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.
    f) Cuya única solución es $x = -3$.

    Para cada ecuación obtenida diga cuál es el valor de a, b y c.

12. Determine para qué valores de α en $\mathbb{R}$, la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + \alpha^2 = 0$ tiene una única solución real.

13. Para cada una de las siguientes expresiones, determine qué valor se le debería sumar para que corresponda a un cuadrado del binomio, e indique cuál sería tal cuadrado del binomio.

    a) $x^2 + 2x$
    b) $x^2 + 10x$
    c) $x^2 - 8x$
    d) $x^2 - 4x$
    e) $x^2 - x$
    f) $x^2 + 14x$
    g) $x^2 - 18x$
    h) $x^2 + 5x$
    i) $x^2 - 7x$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas,

    14.1) Usando factorización, cambio de variable y o completación de cuadrado, según sea el caso.

    14.2) Usando la fórmula de la solución de una ecuación cuadrática.

    a) $x^2 - 169 = 0$
    b) $x^2 + x = 0$
    c) $x^2 - 13x + 36 = 0$
    d) $x^2 + 400 = 0$
    e) $x^2 - 2x - 35 = 0$
    f) $x^2 + 2x - 35 = 0$
    g) $4x^2 - 20x = 24$
    h) $x^2 - x - 6 = 0$
    i) $x^2 = 108 - 3x$
    j) $2x^2 - x - 1 = 0$
    k) $3x^2 - 7x + 4 = 0$
    l) $4x^2 + 7x - 2 = 0$
    m) $9x^2 + 6x + 1 = 0$
    n) $4x^2 - 4x - 3 = 0$
    ñ) $x^2 - 2x - 1 = 0$
    o) $x^2 - 4x + 1 = 0$
    p) $x^2 + x = -1$
    q) $x^2 - 10x + 20 = 0$
    r) $x^2 - 2ax + (a^2 - b) = 0$ con a, b constantes reales y $b > 0$
    s) $4x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$
    t) $x^2 + 1 = \dfrac{7x^2}{9} + 3$

15. Sea $c \in \mathbb{R}$. Considere la ecuación

$$x^2 - 6x + c = 0$$

¿Cuáles son todos los valores de c para los cuales esta ecuación tiene

    a) dos soluciones distintas?
    b) una sola solución?
    c) ninguna solución?

en $\mathbb{R}$?

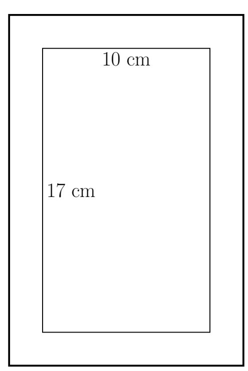
16. Resuelva cada problema siguiente, planteando y resolviendo una ecuación cuadrática

   a) Don José desea cercar un terreno para cobijar a sus animales, en el cual el largo sea el doble del ancho. Si la longitud se aumenta en 15 m y el ancho disminuye en 1 m, don José podría cobijar el doble de animales que con el plan inicial. ¿Cuáles serán entonces, las dimensiones del nuevo terreno?

   b) La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados es 53. Encuentre los números.

   c) Una escalera está apoyada sobre una pared. Si la altura que alcanza la escalera sobre la pared es de 3 metros, y la distancia desde el pie de la escalera hasta la pared es la mitad de la longitud de la escalera, ¿cuánto mide la escalera? Dato: Use $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

   d) Un connotado escritor de novelas, manda a hacer su última novela a la imprenta de Don Daniel. Le solicita que cada hoja tenga 260 cm^2 de área y que el texto tenga un largo de 17 cm y un ancho de 10 cm, con márgenes de igual medida, tal como se ve en la figura:



      d1) ¿Cuál es la longitud del margen?

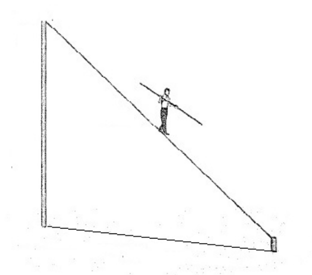
      d2) ¿Cuáles son las medidas de la hoja?

e) El peso ideal P, en kilogramos, de un hombre entre 25 y 59 años, de constitución mediana, que mide x metros, viene dado por

$$P = 52{,}9x^2 - 126{,}8243x + 131{,}08 \; textcon \; 1{,}55 \leq x \leq 1{,}9$$

Actualmente Marcelo pesa $74,2$ kgs. Para que éste fuera su peso ideal, ¿cuál debiese ser su estatura? Use calculadora.

f) Un equilibrista debe recorrer una cuerda, la cual tiene cada extremo atado a un poste, tal como muestra el dibujo:



Se pretenden ubicar los postes a 12 metros de distancia entre sí. Además el poste más pequeño mide 1 metro de altura. Si la cuerda, mide 15 metros, ¿qué altura debe tener el poste mayor?

g) Un pequeño empresario que vende floreros de vidrio, desea comprar floreros al por mayor. Para ello, dispone de un total de \$360000. Su idea es vender cada florero en \$2000 más de lo que valían originalmente. Una ganancia de \$407000 lo dejaría conforme. Sin embargo, se acuerda que debe regalar 3 floreros a su madre

g1) Si compró x floreros, determine, en función de x, el precio de compra de cada florero, y el precio de venta de cada florero

g2) En virtud de lo obtenido en a), determine, en función de x, la ganancia total obtenida al vender 3 floreros menos que x.

g3) ¿Cuántos floreros debe comprar?

h) Don Hernán, que toda su vida ha vivido en Puerto Varas, usualmente va en su auto particular a ver su sobrina Beatriz a Valparaíso, recorriendo una distancia en carretera de 1120 kms. Debido a una emergencia, Beatriz llama a su tío, para que venga urgente a Valparaíso. El decide ir, y pretender ir a 20 $\frac{km}{h}$ más rápido de lo usual, de modo de llegar a destino 3 horas antes de lo presupuestado.

h1) Sea x la rapidez usual de Hernán. Determine en función de x, la rapidez con la que debe ir ahora, el tiempo que demoraba usualmente, y el tiempo que demorará ahora.

h2) ¿Cuál debe ser la rapidez del auto de Don Hernán, para cumplir con lo pedido?

17. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $x + 3 < 7$

b) $-2x \leq -8$

c) $\dfrac{3}{2}x - 1 \leq 2$

d) $\frac{1}{10}x + \frac{3}{4} > 1$

e) $x \leq 2x - 1 \leq 3 - x$

f) $x^2 > 25$

g) $x^2 > -25$

h) $4x^2 - 16x < 0$

i) $x^3 + x > 0$

j) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

k) $x^2 + 2x + 10 < 0$

l) $\dfrac{2}{x-3} < 0$

m) $\dfrac{2}{x} < 1$

n) $\dfrac{1}{x^2} \leq 1$

ñ) $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x}{3x-1}$

o) $\dfrac{4-x^2}{x} < 0$

p) $\dfrac{3x+1}{1-x} > x$

q) $x \leq x^2$

r) $\dfrac{x+1}{x-3} \leq \dfrac{x}{x+2} + 1$

s) $\dfrac{x^3+1}{x+1} < 0$

18. Resuelva cada problema siguiente, planteando y resolviendo una inecuación:

   a) Una compañía de telefonía ofrece un plan mensual que consiste en un cargo fijo de \$8500 y \$80 por cada minuto que se habla. ¿Cuántos minutos mensuales debe hablar Daniela para que el valor del plan sea menor de \$14900?

   b) Oscar trabaja en la tienda de vestuario "Nuevo Sol". En esta tienda, recibe un sueldo mensual base de \$300000 más una comisión del 6 % por ventas. Decide cambiarse de trabajo, ahora a la tienda de vestuario "Sólo moda", en el cual recibe un sueldo mensual base de 290000 más una comisión del 8 % por ventas. ¿Cuánto debe vender Oscar en el mes, para que le convenga el cambio de trabajo?

   c) El porcentaje de ganancia R, al vender un determinado artículo, cuyo costo de fabricación es de C pesos, y cuyo precio en el mercado es de P pesos, viene dado por
   $$R = 100\left(\frac{P-C}{P}\right).$$
   Juanito instaló un negocio de hamburguesas. El costo de fabricación de cada hamburguesa es de \$1500. Juanito pretende obtener una ganancia por lo menos del 40 %, de modo de poder pagar sus deudas, pero no superior al 60 %, de lo contrario violaría las reglas de competencia del mercado. ¿Entre qué valores debe estará el posible precio de las hamburguesas?

   d) Desde la azotea de un edificio de 54 metros de altura se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $30\frac{m}{s}$. La altura de la pelota a los t segundos de ser lanzada, viene dada por
   $$h(t) = -5t^2 + 30t + 54.$$
   ¿En qué intervalo de tiempo, la pelota está más alto que el edificio?

   e) Don Leonel debe comprar una máquina fumigadora para su campo. La opción A es una fumigadora que cuesta \$100000, y cuya mantención anual se estima en los \$20000. La opción B es una fumigadora que cuesta \$80000, y cuya mantención anual es del orden de los \$25000. ¿Cuál es el mínimo de años de uso de la fumigadora, de modo que a Don Leonel le sea más económica la opción A?

f) Para que un cierto medicamento tenga efecto en un paciente, su concentración en el torrente sanguíneo debe exceder de cierto valor, que se denomina concentración mínima eficaz, denotada por CME. Suponga que la concentración c de un medicamento (en $\frac{mg}{L}$), a las t horas de haberlo consumido (en una dosis fija), viene dada por

$$C = \frac{20t}{t^2 + 4}$$

y que su CME es de $4\frac{mg}{L}$. ¿En que período de tiempo se sobrepasa esta concentración mínima?

19. En cada caso, determine y resuelva

a) la inecuación que representa a todos los números reales que están a 3 unidades de 0.

b) la inecuación que representa a todos los números reales que están a 3 unidades de 5.

c) la inecuación que representa a todos los números reales que están a lo más a 4 unidades de 5.

d) la inecuación que representa a todos los números reales a más de 6 unidades de 5.

e) la inecuación que representa a todos los números reales que están a menos de 7 unidades de -3.

f) la inecuación que representa a todos los números reales que están a lo menos a 4 unidades de -3.

g) las inecuaciones que representan a todos los números reales que están a más de 4 unidades y menos de 7 unidades de 3.

h) las inecuaciones que representan a todos los números reales que están a lo menos a 5 unidades y a lo más a 8 unidades de -1.

En cada caso, grafique el conjunto solución obtenido, y verifique que cumple con la condición planteada.

20. Determine el conjunto solución de

a) $|4x+3| = 7$

b) $|3-x| = 0$

c) $|x+3| = |5-7x|$

d) $|x| \geq -3$

e) $|x-1| \leq -2$

f) $|4x+3| < 7$

g) $|2x+3| \geq 4$

h) $\dfrac{2}{|1-2x|} < 1$

i) $\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \leq 1$

j) $2 + \left|\dfrac{x^2}{5x-1}\right| > 1$

k) $|x+2|+|1-x| > 7$

l) $|2x+8| \leq |x+1| + 3$

m) $\frac{x^2+2}{-3|x|} < 0$

21. Extrayendo raíz cuadrada cuando sea necesario, resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 > 49$

b) $x^2 \leq 144$

c) $4x^2 - 8 > 0$

d) $9 - 25x^2 \geq 0$

22. Usando completación de cuadrado y luego extrayendo raíz, obtenga el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

a) $x^2 - 2x \geq 8$

b) $x^2 + 8x - 9 < 0$

c) $x^2 - 3x - 4 > 0$

d) $x^2 - 5x - 36 \leq 0$

23. Obtenga el conjunto solución de:

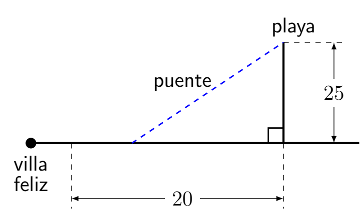
   a) $\sqrt{x^2+4x} = x+1$
   b) $\sqrt{x^2-12} = x-6$
   c) $\sqrt{x^2+4x} < x+1$
   d) $\sqrt{5x-6} \leq x$
   e) $x < \sqrt{-x-1}$
   f) $2x-2 < \sqrt{x+2}$
   g) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} < 1$
   h) $\sqrt{x} > x-2$
   i) $\sqrt{x^2+1} \leq x$
   j) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x} < 5$
   k) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-7} > 1$

24. De un grupo de 50000 recién nacidos en 2017, se estima que la cantidad $p(x)$ de personas que vivirán hasta la edad de x años, viene dada por

$$p(x) = 5000\sqrt{100-x}$$

   a) ¿Cuántas personas vivirán hasta los 64 años?
   b) ¿Hasta que edad vivirán los últimos 20000 sobrevivientes?
   c) ¿Desde que año ya no quedarán personas vivas de este grupo?

25. Para ir desde la ciudad de Villa Feliz hasta una cierta playa, se deben recorrer 20 kms en línea recta hacia el este y luego 25 kms hacia el norte. La alcaldía de la zona pretender invertir en la construcción de un puente, el cual estaría ubicado de modo que desde Villa Feliz se recorra una cierta cantidad de kms hacia el este, y luego se avanze por el puente directamente hacia la playa.



Se pretende que el puente acorte el trayecto, de modo que un auto se demore 20 minutos en llegar a la isla, todo esto considerando que la rapidez promedio por la autopista hacia el este es de $60\frac{km}{h}$ y que se pretende que la rapidez promedio por el puente sea de $100\frac{km}{h}$. ¿A cuántos kms de Villa Feliz se debe ubicar el puente? (Use calculadora)

26. Determine si cada conjunto siguiente es acotado superior y/o inferiormente. En caso afirmativo, determine su ínfimo y/o supremo según corresponda.

    a) $]\infty, -2] \cup]2, 3[$
    b) $]-3, -2[\cup]2, +\infty[$
    c) $]-3, -2[\cup]2, 3[$
    d) $[-3, -2] \cup [2, 3]$
    e) $\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$
    f) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

Capítulo 5

Inducción, progresiones y teorema del binomio.

5.1. Introducción.

En este capítulo primero estudiaremos el principio de Inducción Matemática, el cual nos permite demostrar propiedades de los números naturales, a través de una especie de efecto dominó: es decir, si en primer lugar una propiedad es válida para 1, y en segundo lugar, cada vez que es cierta para un número natural k, también lo es para su sucesor $k+1$, entonces es cierta para cualquier número natural. La razón de esto, es que si la propiedad es cierta para $n = 1$, según lo mencionado también será cierta para su sucesor $n = 2$, y luego también para el sucesor de $n = 2$, es decir para $n = 3$, y así sucesivamente.

Con este principio, probaremos por ejemplo, que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales, o sea, la suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

tiene como resultado $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Esto quiere decir, por ejemplo que

$$1^2 + +2^2 + 3^2 + \ldots + 20^2 = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 2870.$$

En segundo lugar, estudiaremos progresiones aritméticas y geométricas, las cuales son secuencias de números reales, en las cue existe un patrón que ya especifícaremos. Un ejemplo de una progresión aritmética ($P.A.$) es

$$2, 5, 8, 11$$

y un ejemplo de una progresión geométrica ($P.G.$) es

$$3, 12, 48, 192.$$

También veremos algunos problemas los cuales pueden resueltos mediantes progresiones de este tipo, tales como:

Una persona viajó a Brasil de vacaciones y contrajo un virus. Llegó a Chile, y durante el 1 de Marzo contagió a 3 personas. Cada una de estas 3 personas, durante el 2 de Marzo, contagió a 3 personas cada una. A su vez, cada uno de los contagiados el segundo día, durante el 3 de Marzo contagió a 3 personas, y así sucesivamente. Considere que cada persona solo contagió a 3 personas. Si el 12 de Marzo llegó el antídoto a Chile y nadie se había sanado hasta ese momento ¿Cuántas personas debieron consumirlo?

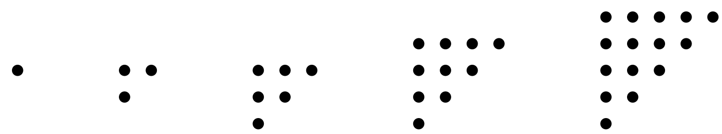
En tercer lugar, estudiaremos el teorema del binomio, el cual nos permite calcular potencias de expresiones de la forma $(a+b)^n$, a través de ciertas regularidades en los términos resultantes. Recordemos, por ejemplo, que la potencia $(a+b)^3$ corresponde a

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Aquí notamos que, de izquierda a derecha, las potencias de a van disminuyendo, y las potencias de b van aumentando. Además los coeficientes son $1, 3, 3, 1$. Por otro lado, los coeficientes de $(a+b)^2$ son 1,2,1. Todo esto, nos va dando una idea de cómo obtener una fórmula general para $(a+b)^n$, y así poder calcular potencias o términos de potencias tales como $(1-3x)^6$, sin necesidad de realizar la multiplicación del factor $1-3x$.

5.2. Inducción matemática.

Analizemos la siguiente secuencia:



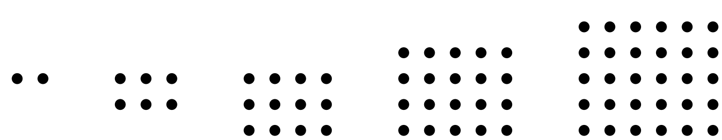
Observando cada figura por filas, desde abajo hacia arriba, vemos que:

- La primera figura tiene
$$1 \text{ punto.}$$
- La segunda figura tiene
$$1 + 2 \text{ puntos.}$$
- La tercera figura tiene
$$1 + 2 + 3 \text{ puntos.}$$
- La cuarta figura tiene
$$1 + 2 + 3 + 4 \text{ puntos.}$$

En general, la n-ésima figura tiene

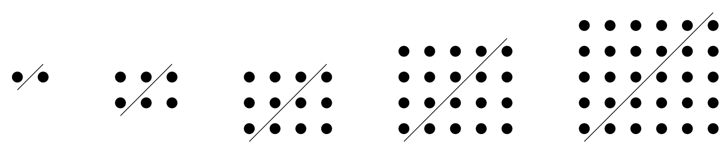
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \text{ puntos.}$$

Por otro lado, consideramos la secuencia de rectángulos



en la cual, la cantidad de puntos de cada figura se puede obtener multiplicando el número de filas por el número de columnas. Por otro lado, cada figura tiene 1 columna más que filas. De este modo, la n-ésima figura tiene n filas y $n + 1$ columnas. Por lo tanto, la n-ésima figura tiene $n(n + 1)$ puntos.

Además, cada rectángulo de esta sucesión tiene el doble de puntos que la figura que está en la misma posición de la primera secuencia planteada, lo cual se puede apreciar trazando una especie de diagonal en cada rectángulo:



Así, establecemos la conjetura que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.2.1}$$

Visto desde otro punto de vista, esta conjetura nos plantea que la suma de los n primeros números naturales corresponde a la mitad del producto entre n y su sucesor $n + 1$.

Podríamos comprobar que la fórmula (**??**) es verdadera para varios valores de n, sin embargo, ¿cómo poder estar seguros que esta fórmula es cierta para cualquier número natural n?

Note que la fórmula (**??**) es cierta para el primer número natural, es decir, para $n = 1$, en efecto

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

(es decir, considerando sólo el primer número natural en la suma de la izquierda, en este caso 1.)

Supongamos ahora que (**??**) es válida para un cierto valor de n, llamado $n = k$. O sea, que la fórmula se cumple para la suma de los k primeros números naturales. Intentaremos probar que (**??**) es cierta para su sucesor $n = k + 1$. Es decir, queremos probar la fórmula es válida para la suma de los $k + 1$ primeros números naturales.

Si probamos la aseveración del párrafo anterior, entonces habremos probado que (**??**) es cierta para todo número natural n. La razón es que como sabemos que (**??**) es cierta para $n = 1$, entonces también será cierta para su sucesor $n = 2$, y como es cierta para $n = 2$, entonces también es válida para su sucesor $n = 3$, y así sucesivamente. Es decir, se produce un "efecto dominó".

Intentemos probar lo mencionado. Si (**??**) se cumple para $n = k$, entonces

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{5.2.2}$$

aseveración que recibe el nombre de **hipótesis inductiva** y es denotada por $H.I.$ Debemos probar que (**??**) es cierta para $n = k + 1$. O sea, debemos probar que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \tag{5.2.3}$$

aseveración que recibe el nombre de **tesis inductiva** y es denotada por $T.I.$ Note que la tesis inductiva corresponde a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

Luego, sumando $k + 1$ en $H.I$ (**??**) (dado que $k + 1$ es el término que nos falta en la suma de la H.I.), se deduce que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

De este modo, la tesis inductiva es verdadera. Por lo tanto, es verdad que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.2.4}$$

Generalizamos el método con el cual demostramos (**??**), el cual llamamos **principio de inducción matemática**.

Principio de Inducción Matemática: Sea $f(n)$ una función proposicional, para $n \in \mathbb{N}$. Si

- $f(1)$ es verdadera.
- $\forall k \in \mathbb{N} : f(k)$ es verdadera $\Rightarrow f(k+1)$ es verdadera.

Entonces, $f(n)$ es cierta para cualquier número natural n, es decir,

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n)$$

es verdadera.

Observación 5.2.1. El principio de inducción matemática nos afirma que si $f(n)$ es una función proposicional en $\mathbb{N}$, la cual

- Es válida para el primer número natural, es decir para $n = 1$,
- Cada vez que es válida para un número natural k, también lo es para su sucesor $k+1$,

entonces $f(n)$ es verdadera para cualquier número natural n. Un argumento para justificar esto, es que como $f(n)$ es cierta para $n = 1$, entonces por la segunda condición, también será cierta para su sucesor $n = 2$, y como es cierta para $n = 2$, de nuevo por la segunda condición, también será cierta para su sucesor $n = 3$, y así sucesivamente, de modo que $f(n)$ es cierta para todo número natural n.

Ejercicio 5.2.1. *Considere las sumas*

- $1 = 1$
- $1 + 3 = 4$
- $1 + 3 + 5 = 9$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

a) *Conjeture: ¿Cuál es el valor de la suma de los n primeros naturales impares?*

Solución. Observando las sumas dadas, conjeturamos que para cualquier número natural n, la suma de los n primeros impares corresponde a n^2, o sea que

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \tag{5.2.5}$$

b) *Demuestre la fórmula obtenida en a), usando el principio de inducción matemática.*

Solución. Se tiene que

- la aseveración (**??**) es cierta para $n = 1$, dado que

$$1 = 1^2.$$

(es decir, si consideramos sólo el primer número impar en la suma, en este caso 1).

- suponemos que (**??**) es cierta para $n = k$. O sea, que la suma de los k primeros impares es k^2. Así,

$$H.I. : 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

(esta última expresión se obtiene simplemente reemplazando $n = k$ en (**??**)). Probemos que (**??**) es cierta para el sucesor de k, es decir, para $n = k + 1$. O sea, debemos probar, que la suma de los $k + 1$ primeros números impares es $(k + 1)^2$. De este modo,

$$T.I. : 1 + 3 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

(esta expresión se obtiene simplemente reemplazando $n = k + 1$ en (**??**)). La tesis inductiva también puede expresarse como

$$T.I. : 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

(dado que $2k-1$ es el impar anterior a $2k+1$). Sumando $2k+1$ en ambos miembros de la $H.I.$ (dado que $2k+1$ es el impar que falta en la suma de la $H.I.$), obtenemos que

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1.$$

O sea,

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

De este modo, hemos probado la $T.I.$.

Por lo tanto, debido al principio de Inducción Matemática, (??) es verdadera. Es decir, para cualquier número natural n, la suma de los n primeros impares, corresponde al cuadrado de la cantidad de números impares que se suman, o sea a n^2. □

Ejercicio 5.2.2. *Consideremos la sucesión de término general* $a_n = 4^n - 1$. *Algunos términos de esta sucesión son*

$$3, 15, 63, 255, \ldots$$

Note que los primeros términos de esta sucesión son divisibles por 3. Nuestra conjetura es que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4^n - 1 \text{ es divisible por 3.}$$

Demuestre esta conjetura usando inducción matemática.

Solución. Usamos el principio de Inducción Matemática:

- El primer término de esta sucesión, el cual es 3, es divisible por 3, dado que

$$\frac{3}{3}=1.$$

- Suponemos que el k-ésimo término de esta sucesión es divisible por 3, es decir, suponemos que 4^k-1 es divisible por 3, lo cual formalizamos como

$$H.I. : \exists q \in \mathbb{N} : \frac{4^k-1}{3}=q.$$

(Es decir, que la división $\frac{4^k-1}{3}$ nos da como resultado un número natural q).

Queremos probar nuestra $T.I.$, la cual corresponde a que el término que está en la posición $k+1$ de la sucesión, es decir $4^{k+1}-1$, es divisible por 3. Así:

$$T.I.: \exists p \in \mathbb{N} : \frac{4^{k+1}-1}{3} = p.$$

De este modo, para probar la $T.I.$, debemos mostrar que la división $\frac{4^{k+1}-1}{3}$ nos da como resultado un número natural p. Consideramos la expresión $\frac{4^{k+1}-1}{3}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{4^{k+1}-1}{3} &= \frac{4^k \cdot 4 - 1}{3} \\
&= \frac{(3q+1)\cdot 4 - 1}{3} \quad \text{(despejando } 4^k \text{ de la H.I. y reemplazándolo.)} \\
&= \frac{12q+3}{3} \\
&= 4q+1.
\end{aligned}$$

Como $q \in \mathbb{N}$, entonces $4q+1 \in \mathbb{N}$, y de este modo $p = 4q+1$, con lo cual probamos nuestra tesis inductiva (en el fondo, nuestro trabajo apuntó a simplificar el 3 del denominador de $\frac{4^{k+1}-1}{3}$, de modo que lo obtenido sea un número natural). Así, por el principio de Inducción Matemática, nuestra conjetura es válida. $\square$

Nos planteamos la pregunta: ¿qué ocurre si la propiedad que queremos probar es válida a partir de un número natural $a > 1$ en adelante? Para estos casos, tenemos el principio de inducción matemática, en una versión más general:

Principio de Inducción Matemática, versión general: Sea $f(n)$ una función proposicional, para $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{N}$ fijo. Si

- $f(a)$ es verdadera.
- $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq a : f(k)$ es verdadera $\Rightarrow f(k+1)$ es verdadera.

Entonces, $f(n)$ es cierta para cualquier número natural $n \geq a$, es decir,

$$\forall n \geq a : f(n)$$

es verdadera.

Ejercicio 5.2.3. *Considere algunas potencias de 2:*

- $2^1 = 2$
- $2^2 = 4$
- $2^3 = 8$

a) *Conjeture: ¿a partir de qué valor de n, se cumple que $2^n > n+1$?*

Solución. Conjeturamos que esto es cierto a partir de $n = 2$, es decir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \ 2^n > n+1.$$

b) *Demuestre la conjetura establecida en a), usando el principio de Inducción Matemática*

Solución. Usamos el principio de inducción matemática como sigue:

- Si $n = 2$, entonces
$$2^n = 4$$
y
$$n+1 = 3,$$
por lo que la aseveración es verdadera para $n = 2$.

- Sea $k \geq 2$. Suponemos que la desigualdad es cierta para la k-ésima potencia de 2, es decir,
$$H.I : 2^k > k+1.$$
Intentaremos probar que la desigualdad es cierta para la $(k+1)$-ésima potencia de 2. Es decir, debemos probar que
$$T.I. : 2^{k+1} > k+2.$$

Multiplicando la $H.I.$ por 2, obtenemos

$$2^{k+1} > 2k + 2. \tag{5.2.6}$$

Si además se cumpliera que

$$2^{k+1} > 2k + 2 > k + 2 \tag{5.2.7}$$

entonces, por transitividad, nuestra tesis estaría probada.

Vemos que

$$2k + 2 > k + 2 \Leftrightarrow k > 0$$

Como $k \geq 2$, entonces (**??**) es verdadera, y nuestra T.I. queda probada.

De este modo, nuestra conjetura queda demostrada. □

5.3. Sumatorias.

Consideremos la suma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2, \tag{5.3.1}$$

en la cual se adicionan los cuadrados de los n primeros números naturales. Queremos obtener una fórmula para obtener su resultado. En primer lugar, introduciremos el símbolo $\sum$ (el cual corresponde a la letra griega Sigma) para denotar nuestra suma (**??**), la cual se expresa como

$$\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

En la notación dada:

- i^2 nos indica el patrón que siguen los términos que se están sumando.
- $i = 1$ es el valor que se debe reemplazar en i^2, de modo de obtener el primer término de la suma, el cual es 1^2.

- el valor n que aparece en la parte superior corresponde al número que debe ser reemplazado en i^2, de modo de obtener el último término de la suma, el cual es n^2.
- los valores de i que deben ser reemplazados para formar nuestra suma (??) son los números naturales que cumplen que $1 \leq i \leq n$.
- esta se lee como “sumatoria desde $i = 1$ hasta n de los i^2”.

Antes de encontrar la fórmula planteada al inicio, vemos la definición de sumatoria:

Definición 5.3.1. *Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una sucesión finita de números reales. La suma*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

*denotada en **notación sigma**, corresponde a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{5.3.2}$$

lo cual se lee como “sumatoria desde $i = 1$ hasta n de los a_i”.

En la notación dada:

- a_i nos indica el patrón que siguen los términos que se están sumando.
- $i = 1$ es el valor que se debe reemplazar en a_i, de modo de obtener el primer término de la suma, el cual es a_1.
- el valor n que aparece en la parte superior corresponde al número que debe ser reemplazado en a_i, de modo de obtener el último término de la suma, el cual es a_n.
- los valores de i que deben ser reemplazados para formar nuestra suma (??) son los números naturales que cumplen que $1 \leq i \leq n$.
- esta se lee como “sumatoria desde $i = 1$ hasta n de los a_i”.

Veamos algunas propiedades de la notación sigma.

Ejercicio 5.3.1. *Considere la suma*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i).$$

Esta suma corresponde a

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n).$$

Reagrupando los a_i y los b_i, esta queda como

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \tag{5.3.3}$$

*Usando la notación sigma, ¿cómo podemos expresar (**??**)?*

Solución. La expresión (**??**) corresponde a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

□

En base al ejercicio anterior, tenemos la propiedad:

Proposición 5.3.2. *Sean $(a_i)_{i=1}^n$ y $(b_i)_{i=1}^n$ dos sucesiones finitas de números reales. Se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Observación 5.3.1. Es decir, la sumatoria de una suma de términos, se puede separar en suma de sumatorias.

Ejercicio 5.3.2. *Sea $c \in \mathbb{R}$. Considere la suma*

$$\sum_{i=1}^{n}(ca_i).$$

Esta suma corresponde a

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n.$$

Factorizando c en la igualdad anterior, obtenemos

$$c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \tag{5.3.4}$$

*Usando la notación sigma, ¿cómo podemos expresar (**??**)?*

Solución. La expresión (**??**) corresponde a

$$c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

□

Enunciamos la segunda propiedad de sumatorias:

Proposición 5.3.3. *Sea $(a_i)_{i=1}^{n}$ una sucesión finita de números reales y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Observación 5.3.2. Es decir, si una constante c es factor común de todos los términos de una sumatoria, entonces c "sale" de esta, multiplicando a la sumatoria resultante.

Con estas dos propiedades, estamos en condiciones de resolver nuestra interrogante, es decir, encontrar una fórmula para

$$\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Ejercicio 5.3.3. *Sea i un número natural. Notemos que*

$$(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$$

(Lo cual se deduce al desarollar $(i+1)^3$). De este modo,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^3 - i^3\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[3i^2 + 3i + 1\right] \tag{5.3.5}$$

a) Usando las propiedades enunciadas de sumatorias, reexprese la sumatoria de la derecha en (**??**).

Solución. Aplicando la propiedad de la suma, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[3i^2 + 3i + 1\right] = \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1.$$

Ahora sacando las constantes multiplicativas "hacia afuera" de cada sumatoria, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \left[3i^2 + 3i + 1\right] = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1.$$

b) ¿A qué expresión de n corresponde la sumatoria de la derecha en (**??**)?

Solución. Vemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^3 - i^3\right] = \left[2^3 - 1^3\right] + \left[3^3 - 2^3\right] + \left[4^3 - 3^3\right] \ldots + \left[n^3 - (n-1)^3\right] + \left[(n+1)^3 - n^3\right].$$

Note que se cancelan todos los términos excepto $(n+1)^3$ y -1^3. De este modo,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^3 - i^3\right] = (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

c) Reemplaze las expresiones obtenidas en a) y b) en (**??**), y despeje $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Solución. Realizando lo pedido, obtenemos

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1. \tag{5.3.6}$$

Antes de despejar $\sum_{i=1}^{n} i^2$, notamos que

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{5.3.7}$$

(según lo visto en el capítulo de inducción). Además,

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 (n \text{ veces}) = n. \tag{5.3.8}$$

Reemplazando (??) y (??) en (??), se deduce que

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Despejamos la sumatoria en cuestión, obteniendo que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}.$$

Factorizando a la derecha, se deduce finalmente que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Observación 5.3.3. Las propiedades de la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

también son válidas si la suma parte desde $i = m$, con $m > 1$. Nos referimos a

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Ejercicio 5.3.4. *Considere la suma*

$$5^2 + 6^2 + \ldots + 30^2.$$

a) Exprese tal suma en notación sigma.

Solución. Se tiene que

$$5^2 + 6^2 + \ldots + 30^2 = \sum_{i=5}^{30} i^2.$$

b) Obtenga el valor de la suma en cuestión.

Solución. Planteamos dos formas:

- Primera forma: Para que nuestra suma partiera desde $i = 1$ hasta $i = 30$, le faltan los términos desde $i = 1$ hasta $i = 4$, por lo que

$$\sum_{i=5}^{30} i^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2 - \sum_{i=1}^{4} i^2.$$

Usando la fórmula (**??**) en las sumatorias de la derecha, se deduce que

$$\sum_{i=5}^{30} i^2 = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = 9425.$$

- Segunda forma: Queremos que $\sum\limits_{i=5}^{30} i^2$ parta desde 1 y no desde 5. Para tal efecto, hacemos un cambio del índice i al índice j. Este cambio corresponde a $j = i - 4$. Notemos que si $i = 5$ entonces $j = 1$, y si $i = 30$ entonces $j = 26$. Además $i = j + 4$, por lo que nuestra sumatoria queda como

$$\sum_{i=5}^{30} i^2 = \sum_{j=1}^{26} (j+4)^2$$

Desarrollamos el cuadrado del binomio y aplicamos propiedades de sumatorias, deduciendo que

$$\sum_{i=5}^{30} i^2 = \sum_{j=1}^{26} j^2 + 8\sum_{j=1}^{26} j + 16\sum_{j=1}^{26} 1.$$

De este modo, aplicando fórmulas de sumatorias ya obtenidas, se tiene que

$$\sum_{i=5}^{30} i^2 = \frac{26 \cdot 27 \cdot 53}{6} + 8\frac{26 \cdot 27}{2} + 16 \cdot 26 = 9425.$$

5.4. Progresiones.

5.4.1. Progresiones aritméticas.

Ejemplos de progresiones aritméticas son

- la progresión
$$2, 6, 10, 14,$$
en la cual los términos van creciendo de 4 en 4. De otro modo, cada término después del primero, se obtiene sumándole 4 al término anterior.

- la progresión
$$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2},$$
en la cual, cada término después del primero, se obtiene sumándole $\frac{1}{2}$ al término anterior.

- la progresión
$$10, 7, 4, 1, -2, -5,$$
en la cual, cada término después del primero, se obtiene restándole 3 al término anterior, o sea, sumándole -3.

Formalmente, tenemos que

Definición 5.4.1. *Una **progresión aritmética**, denotada por P.A., es una secuencia de números reales, en la cual cada término después del primero, se obtiene sumándole al término anterior, una cantidad fija d, llamada **diferencia común**. De este modo, si a es el primer término, entonces la P.A. de n términos es*

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d.$$

Ejercicio 5.4.1. *Considere la P.A.*

$$a, 2, x, y, 14$$

¿Cuáles son los valores de a, x, y?

Solución. Note que, por la definición de $P.A.$, si d es la diferencia común, entonces

$$2 = a + d \text{ y } 14 = a + 4d.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $d = 4$ y $a = -2$. De este modo, la $P.A.$ es

$$-2, 2, 6, 10, 14,$$

y así $x = 6$ e $y = 10$. □

Ejercicio 5.4.2. *Obtenga una fórmula para calcular la suma de los n términos de una $P.A.$*

Solución. Consideremos la $P.A.$ de n términos

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n-1)d.$$

Su suma S_n viene dada por

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n-1)d).$$

El término a se suma n veces, por lo que

$$S_n = na + [d + 2d + \ldots + (n-1)d].$$

Factorizando por d, se deduce que

$$S_n = na + d\,[1 + 2 + \ldots + (n-1)].$$

La expresión del corchete corresponde a la suma de los $n-1$ primeros números naturales, cuyo valor, según la fórmula vista en la sección anterior (**??**), corresponde a $\frac{(n-1)n}{2}$. De este modo, reemplazando obtenemos que

$$S_n = na + d\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2na + dn(n-1)}{2}.$$

Finalmente, factorizando por $\frac{n}{2}$, se deduce que

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d), \tag{5.4.1}$$

o equivalentemente que

$$S_n = n\left(\frac{a+a_n}{2}\right) \tag{5.4.2}$$

(Note que (**??**) se obtiene expresando (**??**) como $S_n = \dfrac{n}{2}(a + a + (n-1)d))$. □

Proposición 5.4.2. *La suma de los n primeros términos de una P.A., la cual es denotada por S_n, viene dada por*

$$S_n = na + d\frac{n(n-1)}{2} \tag{5.4.3}$$

o equivalentemente por

$$S_n = n\left(\frac{a+a_n}{2}\right), \tag{5.4.4}$$

donde a es el primer término, d es la diferencia común y a_n es el n-ésimo término.

Ejercicio 5.4.3. *Calcule la suma de los múltiplos de 3 que están entre 20 y 136.*

Solución. El primer múltiplo de 3 que está entre 20 y 136 es 21. Por otro lado, como al dividir 136 por 3, nos da resto 1, entonces el último múltiplo de 3 que está entre los números mencionados es 135.

Los múltiplos indicados forman la *P.A.*

$$21, 24, 27, \ldots, 135,$$

con $a = 21, d = 3$. Además, como $135 = 45 \cdot 3$ y $21 = 7 \cdot 3$, entonces la *P.A.* tiene $45 - 6 = 39$ términos (desde el 21 hacia atrás, hay 6 múltiplos de 3 que no están en la *P.A.*). O sea, $n = 39$. De este modo, usando (**??**), se deduce que

$$S_{39} = 39\left(\frac{a+a_{39}}{2}\right) = 39\left(\frac{21+135}{2}\right) = 3042.$$

□

Ejercicio 5.4.4. *Se desea llenar con agua un estanque vacío, cuya capacidad es de 800 litros. En el primer minuto entran 21 litros de agua al estanque, y en cada minuto posterior entran 2 litros más que en el minuto anterior.*

a) *¿En cuántos minutos se llenó el estanque?*

Solución. Las cantidades de litros que entran al estanque en cada minuto, forman la $P.A.$

$$21, 23, 25, 27, \ldots$$

Es decir, $a = 21$ y $d = 2$. Como el estanque se debe llenar, entonces la suma de los litros que entran debe ser 800. Luego

$$S_n = 800 \Leftrightarrow n\left(\frac{2a + (n-1)d}{2}\right) = 800 \tag{5.4.5}$$

$$\Leftrightarrow n\left(\frac{42 + 2(n-1)}{2}\right) = 800. \tag{5.4.6}$$

De la última expresión, debemos obtener el valor de n, el cual corresponde a la cantidad de minutos que se demora el estanque en llenarse. La ecuación (5.3.6), es equivalente a la ecuación cuadrática

$$n^2 + 20n - 800 = 0,$$

cuyas soluciones son $n = -40$ o $n = 20$. Como n debe ser positivo, entonces concluimos que el estanque se llenó a los 20 minutos de iniciado el proceso. □

b) *¿Cuántos litros de agua entraron al estanque en el último minuto de llenado?*

Solución. Note que $a_{20} = 21 + 19 \cdot 2 = 59$, por lo que en el último minuto entraron 59 litros de agua al estanque. □

5.4.2. Progresiones geométricas.

Ejemplos de progresiones geométricas son

- la progresión

$$2, 6, 18, 54,$$

  en la cual, cada término a partir del segundo, se obtiene multiplicando el término anterior por 3.

- la progresión

$$320, 80, 20, 5, \frac{5}{4},$$

  en la cual, cada término a partir del segundo, se obtiene dividiendo el término anterior por 4, o equivalentemente, multiplicándolo por $\frac{1}{4}$.

- la progresión

$$3, -6, 12, -24, 48,$$

  en la cual, cada término a partir del segundo, se obtiene multiplicando el término anterior por -2.

En general, tenemos que

Definición 5.4.3. *Una* ***progresión geométrica****, denotada por P.G., es una secuencia de números reales, en la cual cada término después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad fija r, llamada* ***razón común****. De este modo, si a es el primer término, entonces la P.G. de n términos es*

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}.$$

Ejercicio 5.4.5. *Considere la P.G.*

$$a, 4, x, y, 108$$

¿Cuáles son los valores de a, x, y?

Solución. Por definición de *P.G.*, si r es la razón común, entonces

$$4 = ar \text{ y } 108 = ar^4.$$

Resolviendo tal sistema de ecuaciones (puede ser despejando a de ambas ecuaciones y luego igualando), obtenemos que $r = 3$ y que $a = \frac{4}{3}$. De este modo, la *P.G.* es

$$\frac{4}{3}, 4, 12, 36, 108,$$

y así $x = 12$ e $y = 36$. □

Ejercicio 5.4.6. *Determine una fórmula para la suma de los n términos de una P.G.*

Solución. Consideremos la *P.G.*

$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-2}, ar^{n-1}.$$

Su suma S_n es

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}. \tag{5.4.7}$$

Multiplicando (**??**) por r, obtenemos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n. \tag{5.4.8}$$

Restando (**??**) con (**??**), se cancelan prácticamente todos los sumandos del término de la izquierda, quedando que

$$rS_n - S_n = ar^n - a,$$

de donde

$$S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

□

Proposición 5.4.4. *La suma de los n primeros términos de una P.G., la cual es denotada por S_n, viene dada por*

$$S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

donde a es el primer término y r es la razón común.

Ejercicio 5.4.7. *Considere la P.G.*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \dots$$

a) *Si la P.G. tiene 15 términos, determine su suma. Dato: Use* $\frac{1}{2^{14}} \approx 0{,}01$.

Solución. Vemos que $a = 1$ y $r = \frac{1}{2}$, luego

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{15} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= \frac{2^{15} - 1}{2^{14}} \\ &= 2 - \frac{1}{2^{14}} \\ &\approx 1{,}99. \end{aligned}$$

b) *Si la P.G. tiene n términos, determine una expresión de n para su suma.*

Solución. En este caso,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= \frac{2^{n} - 1}{2^{n-1}} \\ &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

c) *Si la progresión tiene cada vez más términos, ¿qué ocurre con el valor de su suma?*

Solución. En b), obtuvimos que

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Si la progresión tiene cada vez más términos, esto quiere decir que n es cada vez un número natural más grande. Si es así, entonces $\frac{1}{2^{n-1}}$ es cada vez más cercano a 0. Luego, el valor de la suma es cada vez más cercano a 2. □

Ejercicio 5.4.8. *Una persona viajó a Brasil de vacaciones y contrajo un virus. Llegó a Chile, y durante el 1 de Marzo contagió a 3 personas. Cada una de estas 3 personas, durante el 2 de Marzo, contagió a 3 personas cada una. A su vez, cada uno de los contagiados el segundo día, durante el 3 de Marzo contagió a 3 personas, y así sucesivamente. Si cada persona solo contagió a 3 personas.*

a) *¿Cuántos personas se contagiaron el 10 de Marzo?*

Solución. Note que los contagiados por día forman la P.G. cuyos primeros términos son

$$3, 9, 27, \ldots$$

Vemos que en esta progresión, $a = 3$ y $r = 3$. Además, su término general es $a_n = 3^n$. Por lo tanto, el 10 de Marzo se contagiaron $a_{10} = 3^{10} = 59049$ personas.

b) *El 12 de Marzo llegó el antídoto a Chile. Si nadie se había sanado hasta ese momento ¿Cuántas personas debieron consumirlo?*

Solución. Determinamos cuántos contagiados en total habían hasta el día 12 de Marzo. Para ello, debemos obtener la suma S_{12} de la progresión de contagiados. Se tiene que

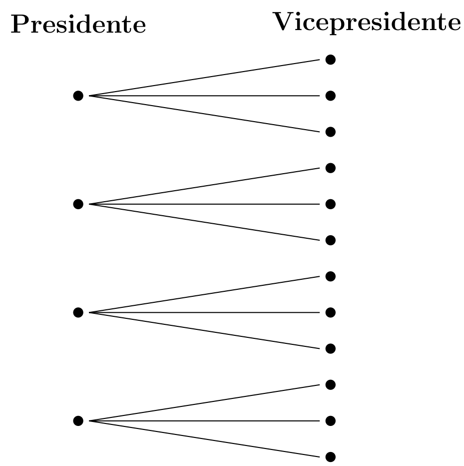
$$S_{12} = a \cdot \frac{r^{12} - 1}{r - 1} = 3 \cdot \frac{3^{12} - 1}{2} = 797160,$$

por lo que 797.161 personas debieron consumir el antídoto. $\square$

5.5. Teorema del binomio.

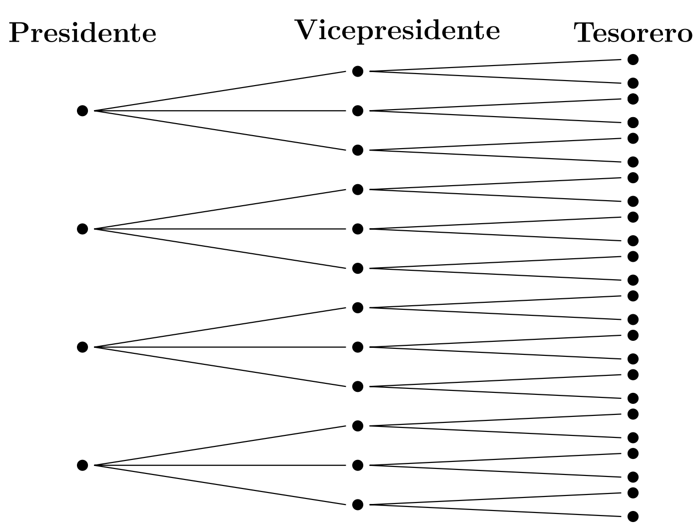
Ejercicio 5.5.1. *En una fábrica textil, se ofrecieron 4 personas para ocupar los 4 cargos directivos del sindicato de trabajadores, los cuales son presidente, vicepresidente, tesorero y secretario. ¿De cuántas formas se puede organizar la directiva, si asumimos que una persona puede ocupar un sólo cargo?*

Solución. Si partimos escogiendo al presidente, entonces para escogerlo tenemos 4 opciones. Una vez escogido el presidente, nos quedan 3 opciones para vicepresidente:



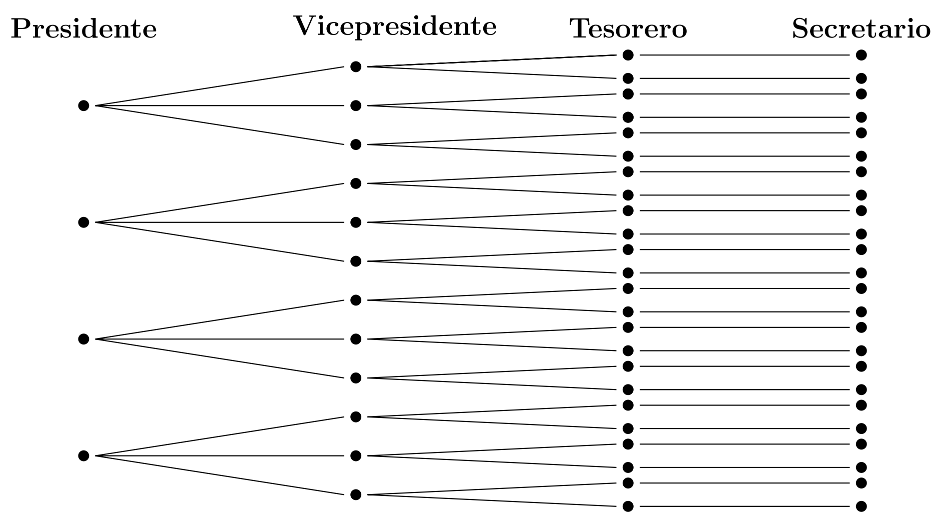
Es decir, tenemos 4 veces 3 opciones, o sea, $4 \cdot 3 = 12$ opciones para la dupla presidente-vicepresidente.

Una vez escogido presidente y vicepresidente, nos quedan 2 opciones para tesorero:



Es decir, tenemos 12 veces 2 opciones, o sea $12 \cdot 2 = 24$ opciones para la terna presidente-vicepresidente-tesorero.

Finalmente, ya escogido presidente, vicepresidente y tesorero, nos queda 1 opción para secretario:



Así, tenemos 24 veces 1 opción, o sea tenemos en total $24 \cdot 1 = 24$ opciones para el cuarteto mencionado.

□

Observación 5.5.1. Note que en el ejercicio anterior,

$$24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

El producto $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ se denomina 4 **factorial**, y se denota por $4!$. Es decir, $4! = 24$.

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 5.5.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Llamamos n **factorial**, el cual es denotado por $n!$, al producto de los n primeros números naturales, es decir*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Observación 5.5.2. En general, la cantidad de formas en la cual podemos ordenar n objetos, viene dada por $n!$.

Observación 5.5.3. De la definición de factorial de un número natural, se deduce inmediatamente que

$$n! = n(n-1)!, \tag{5.5.1}$$

para $n \geq 2$.

Observación 5.5.4. Si $n = 1$, entonces la igualdad (**??**) queda como

$$1! = 1 \cdot 0!. \tag{5.5.2}$$

Sin embargo, $0!$ no está definido. Como $1! = 1$, entonces para que (**??**) se cumpla y en definitiva (**??**) sea cierta para $n \geq 1$, definimos

$$0! = 1.$$

Definición 5.5.2. *Se tiene que* $0! = 1$.

Ejercicio 5.5.2. *En una fábrica textil, se debe escoger un equipo directivo consistente en un presidente, vicepresidente y secretario, entre un grupo de 5 personas, los cuales fueron seleccionados luego de un exhaustivo proceso. ¿De cuántas formas se puede escoger la directiva?*

Solución. Se deben escoger 3 personas entre un grupo de 5 personas. Para el presidente tenemos 5 opciones. Haciendo un diagrama de árbol, vemos que para cada una de las opciones de presidente, tenemos 4 opciones de vicepresidente. Es decir, para presidente y vicepresidente tenemos 5 veces 4 opciones, o sea

$$5 \cdot 4 = 20 \text{ opciones.}$$

Siguiendo con el diagrama, vemos que para cada una de las 20 opciones, tenemos 3 alternativas para secretario. O sea, para escoger la directiva, tenemos 20 veces 3 opciones, es decir

$$(5 \cdot 4) \cdot 3 = 60 \text{ opciones.}$$

$\square$

Observación 5.5.5. En el ejercicio anterior, se tiene que

$$60 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!},$$

donde 5 es el número de personas y 3 es el número de cargos.

En general, supongamos que de un grupo de n objetos, escogemos k de ellos, y luego los ordenamos. La cantidad de grupos ordenados de k objetos que se forman, corresponde a

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejercicio 5.5.3. *En la misma fábrica textil, se ofrecieron 5 personas para integrar un equipo de trabajo de 3 personas, cuya misión es preparar el aniversario de la empresa. ¿De cuántas formas se puede escoger el equipo de trabajo?*

Solución. Note que si la elección del equipo de trabajo, tuviera cargos (tal como en el ejemplo anterior), entonces tendríamos

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ opciones.}$$

Como en nuestro caso no hay cargos, entonces las 60 opciones deben reducirse, dado que se repiten los grupos. La pregunta es, ¿cúantas veces se repite cada opción?. Para responder esta pregunta, debemos determinar de cuántas formas se puede ordenar un grupo de 3 personas, lo cual es $3! = 6$. Así, las formas en la cual se puede escoger el equipo de trabajo son $\frac{60}{6} = 10$. $\square$

Observación 5.5.6. Note que en el ejercicio anterior, el número de opciones corresponde a

$$10 = \frac{60}{6} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{(5-3)!3!},$$

donde 5 es el número de personas y 3 es la cantidad de personas por grupo escogido.

En general, supongamos que de un grupo de n objetos, escogemos k de ellos, sin importar el orden en el que fueron escogidos. La cantidad de grupos de k objetos que se forman, corresponde a

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Luego de esto, tenemos la siguiente definición:

Definición 5.5.3. *Sean $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $k \leq n$. El* ***coeficiente binomial*** $\binom{n}{k}$ *viene dado por*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ejercicio 5.5.4. *Determine el valor de*

a) $\binom{7}{3}$.

Solución.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{6 \cdot 4!} = 35.$$

b) $\binom{n}{0}$, *con n un número natural cualquiera o 0.*

Solución.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

c) $\binom{n}{n}$, *con n un número natural cualquiera o 0.*

Solución.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

d) $\binom{n}{1}$, *con n un número natural cualquiera o 0.*

Solución.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1!(n-1)!} = n.$$

□

Ejercicio 5.5.5. *Sean* $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *¿Qué relación existe entre* $\binom{n}{k}$ *y* $\binom{n}{n-k}$*?*

Solución. Note que

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

deducimos que

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

para n y k números naturales o 0. $\square$

Consideremos la siguiente disposición númerica en forma triangular, la cual se denomina **Triángulo de Pascal**, en honor al matemático francés Blaise Pascal

$$\begin{array}{c}
\mathbf{1}\\
\mathbf{1 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 2 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1}\\
\mathbf{1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1}
\end{array}$$

Este triángulo nos aporta un modo sencillo de obtener los coeficientes binomiales. En efecto, note que:

- en la primera fila aparece el número

$$\binom{0}{0} = 1.$$

- en la segunda fila aparecen los números

$$\binom{1}{0} = 1, \ \binom{1}{1} = 1.$$

- en la tercera fila aparecen los números

$$\binom{2}{0} = 1, \ \binom{2}{1} = 2, \ \binom{2}{2} = 1.$$

- en la cuarta fila aparecen los números

$$\binom{3}{0} = 1, \ \binom{3}{1} = 3, \ \binom{3}{2} = 3, \ \binom{3}{3} = 1,$$

y así sucesivamente. Por ejemplo, la novena fila corresponde a los coeficientes binomiales de la forma $\binom{8}{k}$. En particular, en esta fila, contando desde izquierda a derecha a partir de 0, obtenemos por ejemplo que $\binom{8}{5} = 56$, lo cual usted lo puede comprobar calculando este coeficiente a través de su definición.

En general, la n-ésima fila del triángulo de Pascal corresponde a los coeficientes de la forma $\binom{n-1}{k}$ con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

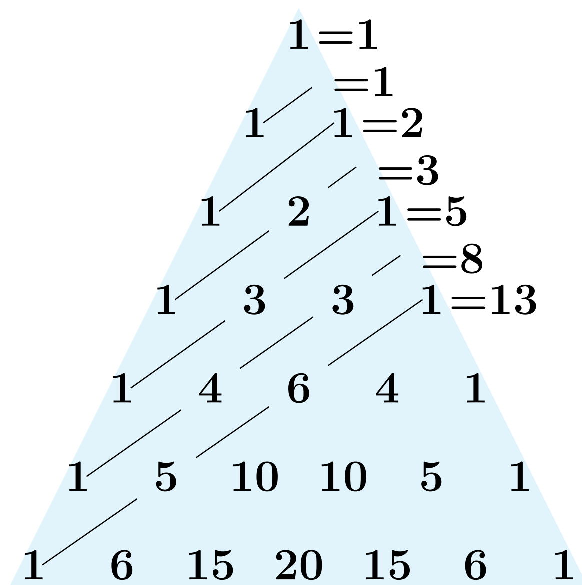
El triángulo de Pascal tiene algunas otras particularidades, como por ejemplo que la suma de los términos de cada fila son potencias de dos:

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{2}$$
$$\mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{4}$$
$$\mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{1} = \mathbf{8}$$
$$\mathbf{1} + \mathbf{4} + \mathbf{6} + \mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{16}$$
$$\mathbf{1} + \mathbf{5} + \mathbf{10} + \mathbf{10} + \mathbf{5} + \mathbf{1} = \mathbf{32}$$
$$\mathbf{1} + \mathbf{6} + \mathbf{15} + \mathbf{20} + \mathbf{15} + \mathbf{6} + \mathbf{1} = \mathbf{64}$$

o la obtención de la sucesión de Fibonacci (La sucesión de Fibonacci, es una famosa sucesión de números la cual debe su nombre al matemático italiano Leonardo de Pisa, apodado Fibonacci. Algunos de sus términos son

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Podemos ver, que en esta sucesión, cada término a partir del tercero, se obtiene sumando los dos términos anteriores), la cual se obtiene sumando diagonalmente hacia arriba a partir del 1 que está a la izquierda



Introduzcámonos en el estudio del Teorema del Binomio, descubriendo en que parte aparecen los coeficientes binomiales. Del Álgebra elemental, sabemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{5.5.3}$$

y que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{5.5.4}$$

En los desarrollos (**??**) y (**??**), podemos observar que:

- De izquierda a derecha, las potencias del primer término del binomio, en este caso a, van decreciendo.

- De izquierda a derecha, las potencias del segundo término del binomio, en este caso b, van creciendo.

- Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^2$ son 1,2 y 1, correspondientes a la tercera fila del Triángulo de Pascal. Es decir, los coeficientes tienen la forma $\binom{2}{k}$ con $k = 0, 1, 2$.

  Análogamente, los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^3$ son 1,3,3 y 1, correspondientes a la cuarta fila del Triángulo de Pascal. Es decir, los coeficientes tienen la forma $\binom{3}{k}$, con $k = 0, 1, 2, 3$.

En general, si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

En el desarrollo de $(a+b)^n$:

- De izquierda a derecha, las potencias del primer término del binomio, en este caso a, van decreciendo.

- De izquierda a derecha, las potencias del segundo término del binomio, en este caso b, van creciendo.

- Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$ son los coeficientes de la forma $\binom{n}{k}$, $(n+1)$-ésima fila del Triángulo de Pascal.

Esta idea se resume en el siguiente teorema:

Teorema 5.5.4. *Sean a, b números reales y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Ejercicio 5.5.6. *Obtenga el desarrollo de*

a) $(a+b)^5$.

Solución. Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^5$ corresponden a los de la forma $\binom{5}{k}$, sexta fila del Triángulo de Pascal. Además, las potencias de a decrecen desde a^5 hasta a^0, y las potencias de b crecen desde b^0 hasta b^5. En definitiva, tenemos que

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 15a^3b^2 + 20a^2b^3 + 15ab^4 + b^5.$$

b) $(3x-2y)^4$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}(3x-2y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (3x)^{4-k}(-2y)^k \\ &= (3x)^4 + 4(3x)^3(-2y) + 6(3x)^2(-2y)^2 + 4\cdot(3x)(-2y)^3 + (-2y)^4 \\ &= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 5.5.7. *Sean a y b números reales, y n un número natural. El desarrollo de $(a+b)^n$,*

a) *¿Cuántos términos posee?*

Solución. Como en la definición

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k,$$

entonces vemos que k va desde 0 hasta n, por lo que el desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ términos.

b) *¿Cuál es el término que está en la posición $k+1$ de este desarrollo?*

Solución. Note que

- $t_1 = \binom{n}{0} a^n b^0$
- $t_2 = \binom{n}{1} a^{n-1} b^1$
- $t_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2$

Por lo que en general, el término t_{k+1} es

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{5.5.5}$$

c) *¿Cuánto suman los exponentes de a y b en cada término?*

Solución. Como el término general es

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

entonces los exponentes de a y b siempre suman n.

d) *¿Qué regularidad se observa en los coeficientes de los términos que están a la misma distancia del o de los términos centrales?*

Solución. Para cualquier potencia de $a+b$ que intentemos calcular, los coeficientes corresponden a las filas del Triángulo de Pascal. Observando estas filas, deducimos en forma informal, que los coeficientes mencionados son iguales. Formalmente los coeficientes equidistantes del centro son $\binom{n}{k}$ y $\binom{n}{n-k}$, por lo que son iguales. $\square$

Ejercicio 5.5.8. *Lea y responda*

a) *¿Cuál es el cuarto término en el desarrollo de* $(x-2)^{20}$*?*

Solución. En base a (**??**), el término general de este desarrollo es

$$t_{k+1} = \binom{20}{k} x^{20-k}(-2)^k,$$

por lo que el cuarto término t_4, lo obtenemos reemplazando $k = 3$ en esta expresión. En efecto,

$$t_4 = \binom{20}{3} x^{17}(-2)^3 = -9120x^{17}.$$

b) *Calcule, si es que existe, el término independiente de* x *en el desarollo de* $\left(2x + \frac{1}{x^3}\right)^{16}$.

Solución. Según (**??**), el término general de este desarrollo es

$$t_{k+1} = \binom{16}{k}(2x)^{16-k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^k = \binom{16}{k} 2^{16-k}x^{16-4k}.$$

Luego, para que un término de este desarrollo no contenga a x, entonces el exponente de x, debe ser 0. O sea, $16 - 4k = 0$, es decir $k = 4$. Por lo tanto, el término independiente de x es el quinto término, y corresponde a

$$t_5 = \binom{16}{3} 2^{13}.$$

c) *Determine el o los términos centrales del desarrollo de* $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$

Solución. Note que este desarrollo tiene 16 términos. Además

- Si hay 1 sólo término central, entonces nos quedan 15 términos, los cuales no se pueden distribuir de forma equitativa antes y después de tal término central (serían 7 antes y 8 después del término central, o viceversa).
- Si hay dos términos centrales, entonces nos quedan 14 términos, los cuales se distribuyen de modo que haya 7 términos antes y 7 términos después de ellos.

En definitiva, hay dos términos centrales, los cuales, en base a nuestro análisis, se ubican en la posición 8 y 9 respectivamente, o sea son t_8 y t_9. Como

$$t_{k+1} = \binom{15}{k} x^{15-k} x^{-\frac{1}{2}k} = \binom{15}{k} x^{15-\frac{3}{2}k},$$

entonces los términos centrales, corresponden a $k = 7$ y $k = 8$, en ese orden. Estos son

$$t_8 = \binom{15}{7} x^{\frac{9}{2}} \text{ y } t_9 = \binom{15}{8} x^3.$$

$\square$

5.6. Ejercicios propuestos.

1. Usando el principio de inducción matemática pruebe que:

   a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

   c) Si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, entonces

   $$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

   d) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

   e) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

   f) Para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, se tiene que

   $$3^n > 1 + 2n.$$

   g) Si $a > -1$, $a \neq 0$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, se tiene que

   $$(1 + a)^n > 1 + an.$$

   h) $\forall n \in \mathbb{N} : 2n \leq 2^n$.

i) $\forall n \in \mathbb{N} : 2^{n-1} \leq n!$.

j) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

k) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

l) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $4^n - 3n - 1$ es divisible por 9.

m) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $6^{2n} - 2^{2n}$ es divisible por 4.

n) Si $x, y \in \mathbb{N}$ con $x > y$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x - y$.

ñ) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

o) $\forall n \in \mathbb{N} : (-1)^{2n} = 1$.

p) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que si un conjunto A tiene n elementos, entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos.

2. Obtenga el valor de la suma

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i + 5)$

b) $\displaystyle\sum_{i=6}^{n} i^2$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i + 4)^2$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(i + 1)^4 - i^4$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i$

f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right)$

3. Lea y responda:

a) Obtenga la diferencia $(i + 1)^4 - i^4$, para $i \in \mathbb{N}$.

b) Usando la igualdad obtenida en a), deduzca una expresión de n para $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3$.

c) Determine la suma

$$4^3 + 5^3 + \ldots + 10^3.$$

4. Determine una fórmula para la suma de los n primeros números naturales pares ¿Cuánto suman los números pares que están entre 1 y 100, incluyendo al 100?

5. ¿De cuántas formas se pueden ordenar 7 pelotas, las cuales están enumeradas?

6. De un grupo de 7 pelotas, ¿cuántos grupos ordenados de 4 pelotas se pueden formar?

7. De un grupo de 6 pelotas,

    a) ¿Cuántos grupos ordenados de 4 pelotas se pueden formar?

    b) Cada grupo de 4 pelotas obtenido, ¿de cuántas formas se puede ordenar?

    c) Use lo obtenido en *a*) y *b*) para responder: ¿Cuántos grupos de 4 pelotas, sin importar el orden, se pueden formar con las 6 pelotas?

8. En la carrera de los 100 metros planos compiten 8 atletas

    a) ¿De cuántas formas se pueden establecer sus posiciones al llegar a la meta?

    b) ¿De cuántas formas se pueden repartir la medalla de oro,de plata y de bronce?

    c) ¿De cuántas formas se puede formar el podio de 3 atletas, sin importar quién ganó cada medalla?

9. Sean $k, n \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$. Demuestre que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

10. Demuestre que los términos de la $n+1$-ésima fila del triángulo de Pascal suman 2^n.

11. Encuentre todos los valores de n para los cuales $\binom{n}{2} = 6$.

12. Usando el teorema del binomio, demuestre que

$$(\sqrt{2}-1)^6 + 70\sqrt{2} = 99.$$

13. Considere el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^{100}$. Determine:

    a) el quinto término.

    b) el término que contiene a x^5, si es que existe.

    c) el término independiente de x, si es que existe.

    d) el o los términos centrales.

14. Considere el desarrollo de $\left(3y + \frac{2}{y^2}\right)^{27}$. Determine:

    a) el último término.

    b) el término que contiene a y^{18}, si es que existe.

    c) el término independiente de y, si es que existe.

    d) el o los términos centrales.

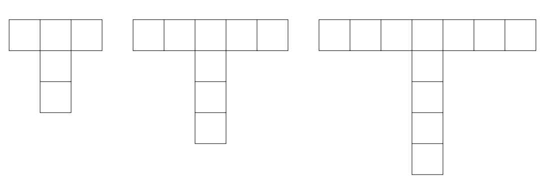
15. En el desarrollo de $\left(\frac{x}{y} - x^2y^3\right)^{18}$, determine el término en el que x e y tienen el mismo exponente.

16. Determine el valor de n de modo que los terceros términos del desarrollo de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n \text{ y } \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$$

    son iguales.

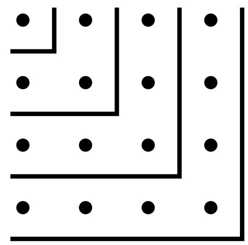
17. Considere la sucesión de figuras:



    a) ¿Cuántos cuadrados tiene la figura que está en la n- ésima posición?

    b) ¿Existe alguna figura de esta sucesión que tenga 151 cuadrados?

18. Considere la sucesión de figuras, que va de arriba hacia abajo:



    a) ¿Cuántos puntos tiene la figura que está en la n- ésima posición?

    b) ¿Existe alguna figura de esta sucesión que tenga 295 puntos?

19. Se ordenan 200 tablas poniendo primero 20 en una fila, 19 sobre ella en una segunda fila, y así sucesivamente, ¿cuántas filas hay? ¿cuántas tablas habrá en la fila superior?

20. Leí un libro, de modo que el primer día leí 20 páginas y cada día posterior leí 4 páginas más que el día anterior. Si el libro tenía 720 páginas, ¿En cuántos días lo terminé de leer?

21. Una pelota cae desde una cierta altura dando un primer bote de 256 cms. Posteriormente, cada uno de los 6 botes que da hasta quedar en el suelo es de la cuarta del bote anterior. ¿Qué altura tiene el último bote?

22. Andrés desea ahorrar dinero para sus vacaciones del próximo verano, a partir de la primera semana de Marzo. Él ya tiene en su cuenta un monto de \$7000. En la segunda semana, ahorró \$10000. Andrés montó un negocio de jugos naturales, y le empezó a ir bastante bien. Gracias a esto, posterior a la segunda semana se propone ahorrar \$3000 más que lo que ahorró en la semana anterior. Suponiendo que todos los meses tienen 4 semanas,

    a) ¿Cuánto dinero lleva en total ahorrado en la segunda semana de Agosto?

    b) Andrés desea ir a Europa, por lo que desea ahorrar 2 millones y 30 mil pesos, ¿En qué mes y semana obtendrá esa cantidad?

23. En Chile, y a las 9 de la mañana, 1 persona cuenta un secreto a 4 personas. Media hora después, cada una de estas 4 personas cuenta el secreto a otras 4 personas y así sucesivamente cada media hora. Cada persona cuenta el secreto presencialmente sólo a 4 personas y nadie recibe el secreto más de una vez. Además hasta que no se entere todo el país, nadie sale del territorio nacional. ¿Sabrá todo Chile el secreto a las 3 de la tarde, considerando que su población actual estimada es de 18 millones de personas? Use calculadora cuando sea necesario.

24. La suma de n primeros términos de una P.A. viene dada por $S_n = \frac{n^2}{2}$. Determine sus 4 primeros términos y su diferencia común d.

25. Una $P.A.$ tiene tercer término 6 y duodécimo término 42. ¿Cuál es su primer término y su diferencia común?

26. Una $P.G.$ tiene tercer término 72 y séptimo término $\frac{8}{9}$. ¿Cuál es su primer término y su diferencia común? (hay más de una solución)

27. Una $P.A.$ de diferencia común 3 tiene primer término 12 y último término 30.

    a) ¿Cuántos términos tiene esta P.A.?

    b) ¿Cuál es el valor de la suma de los términos de esta $P.A.$?

28. Una $P.G.$ de razón común 2 tiene primer término 3 y último término 768.

    a) ¿Cuántos términos tiene esta P.G.?

    b) ¿Cuál es el valor de la suma de los términos de esta $P.G.$?

29. Determine la suma de los múltiplos de 7 entre 48 y 2889.

30. Determine la suma de las potencias de 2 entre 32 y 2^{30}.

31. Determine el(los) valor(es) de k de modo que los números $k+1, k+4, 4k+4$

    a) formen una progresión aritmética.

    b) formen una progresión geométrica.

En cada caso, obtenga la progresión en cuestión.

Capítulo 6

Geometría Analítica.

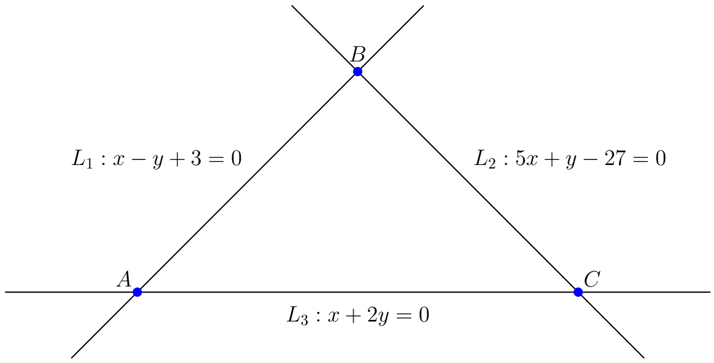
6.1. Introducción.

El gran precursor de la Geometría Analítica es el matemático francés René Descartes. En esta teoría, la base es el llamado plano cartesiano (en honor justamente a René Descartes), en el cual a cada punto del plano se le asocian un par de coordenadas (x, y). En este plano, se pueden graficar distintos tipos de figuras geométricas, tales como rectas, triángulos, circunferencias, etc. Lo interesante es que por ejemplo una recta, puede ser caracterizada mediante una ecuación de las variables x e y, la cual es verificada por cada punto (x, y) que pertenece a ella. En general, rectas, circunferencias, parábolas, elipses, etc. pueden ser caracterizadas por una ecuación, que no es otra que la condición que satisface cada punto (x, y) del plano que pertenece a esta.

Además, gracias a este sistema de coordenadas, se pueden resolver problemas que involucran figuras geométricas, tales como rectas, circunferencias o parábolas, entre otras, usando sus ecuaciones. Por ejemplo, un problema clásico, el cual se aborda en este texto, es obtener el área del triángulo cuyos lados están determinados por las rectas L_1, L_2 y L_3, cuyas ecuaciones respectivas son

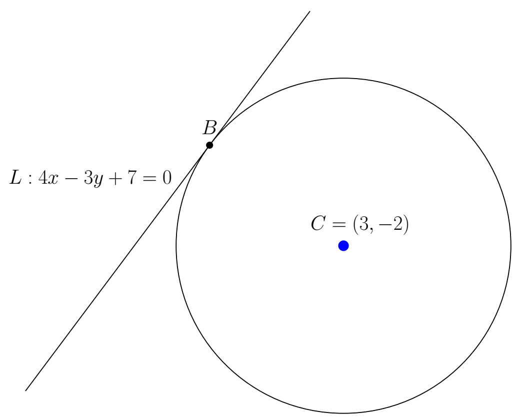
$$L_1 : x - y + 3 = 0, L_2 : 5x + y - 27 = 0, L_3 : x + 2y = 0.$$

Un esquema de la situación es:



A través de sistemas de ecuaciones, podemos determinar sus vértices, y luego gracias a ello, calculando la distancia entre dos ellos, podemos obtener la longitud de su base. Comprendiendo un poco más la teoría, podemos calcular su altura, y luego su área.

Otro problema abordado es encontrar el radio de una circunferencia, dado su centro $C = (3, -2)$ y una recta L que la toca en un sólo punto B (recta tangente), la cual tiene ecuación $L : 4x - 3y + 7 = 0$:

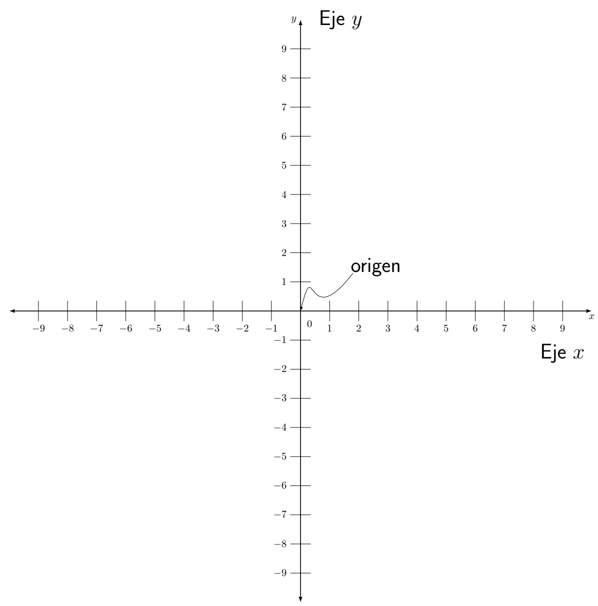


Para encontrar el radio, debemos trazar alguna recta adicional, de modo de encontrar las coordenadas del punto B primero. Finalmente calculamos la distancia entre C y B.

En definitiva, la Geometría Analítica es la rama de la Matemática que une la Geometría clásica con el Álgebra. En este capítulo se discuten este tipo de problemas, no sin antes primero comprender como obtener la ecuación característica de una recta, de una circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.

Finalmente veremos algunas aplicaciones de las cónicas a otros contextos, el más llamativo de todos, el hecho que la trayectoria que la Tierra describe alrededor del Sol corresponde a una elipse.

6.2. Acerca del plano cartesiano.

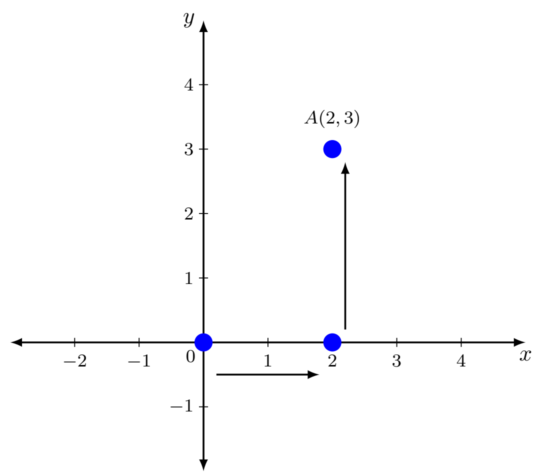


Definición 6.2.1. *El* ***plano cartesiano*** *es un plano determinado por dos rectas perpendiculares entre sí, las cuales llamamos* ***ejes coordenados****. A la recta horizontal la llamaremos* ***eje*** *x(o eje de las abcisas) y a la recta vertical* ***eje*** *y(o eje de las ordenadas). El punto de intersección de ambos ejes es denominado* ***origen****.*

Cada punto P del plano es caracterizado de forma única por medio de un par de coordenadas (x, y), con x e y números reales. Viceversa, a cualquier par ordenado (x, y) del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el cual es denotado por $\mathbb{R}^2$, le corresponde un único punto P del plano. Veamos algunos ejemplos.

Ejercicio 6.2.1. *Localize los puntos* $A = (2, 3), B = (-1, -4), C = (-2, 1),$ $D = (1, -3), E = (0, 4), F = (\frac{3}{2}, 0)$ *en el plano cartesiano.*

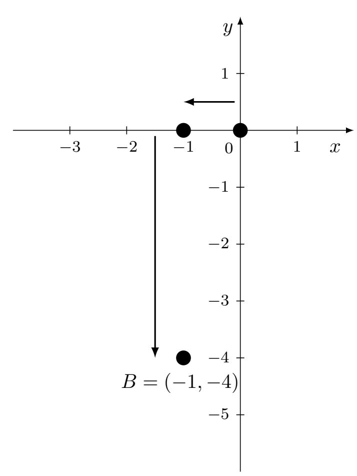
Solución. Para localizar el punto $A = (2, 3)$ en el plano, observemos la figura:



En ella se puede apreciar que:

- Partimos de $(0, 0)$ y nos desplazamos en el eje x hacia 2.
- Luego de estar posicionados en el eje x en $x = 2$, nos desplazamos en la dirección del eje y hacia 3. El punto obtenido en este paso es $A = (2, 3)$.

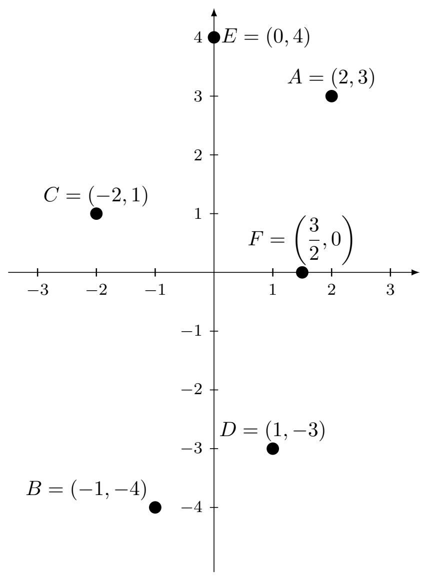
Para localizar el punto $B = (-1, -4)$ en el plano, observemos la figura:



En ella se puede apreciar que:

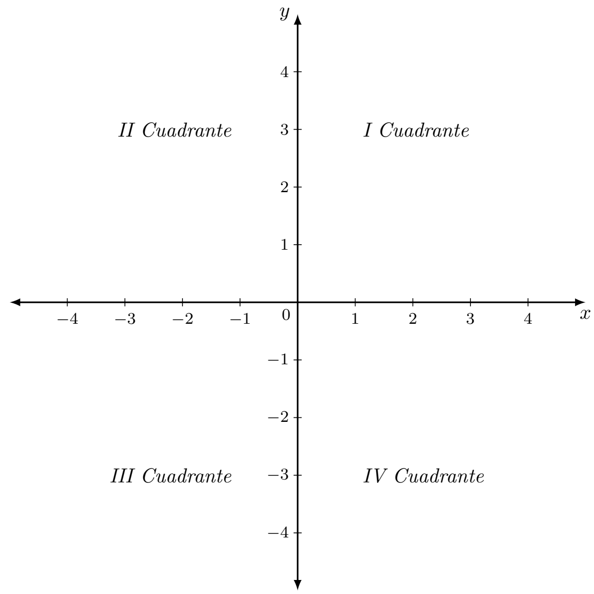
- Partimos de $(0,0)$ y nos desplazamos en el eje x hacia -1.
- Luego de estar posicionados en el eje x en $x=-1$, nos desplazamos en la dirección del eje y hacia -4. El punto obtenido en este paso es $B=(-1,-4)$.

Finalmente, un plano cartesiano con todos los puntos pedidos corresponde a:



$\square$

Observación 6.2.1. Los ejes coordenados dividen al plano cartesiano en 4 semiplanos, los cuales son llamados **cuadrantes**, y son representados del siguiente modo:



Note que los puntos (x, y) que pertenecen al primer cuadrante, son aquellos tales que $x > 0$ e $y > 0$.

Ejercicio 6.2.2. *Qué condición cumple* (x, y) *si pertenece a*

a) *al segundo cuadrante?*

Solución. Cumple que $x < 0$ e $y > 0$.

b) *al tercer cuadrante?*

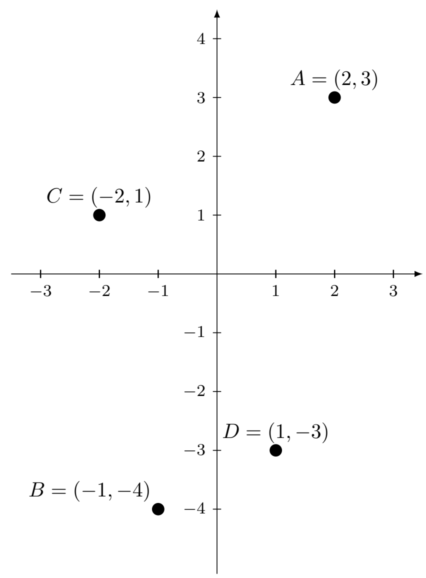
Solución. Cumple que $x < 0$ e $y < 0$.

c) *al cuarto cuadrante?*

Solución. Cumple que $x > 0$ e $y < 0$. □

Ejercicio 6.2.3. *¿En qué cuadrante se ubica cada uno de los puntos* $A = (2, 3)$, $B = (-1, -4), C = (-2, 1),\ D = (1, -3)$*?*

Solución. Consideramos un plano cartesiano con los puntos mencionados:



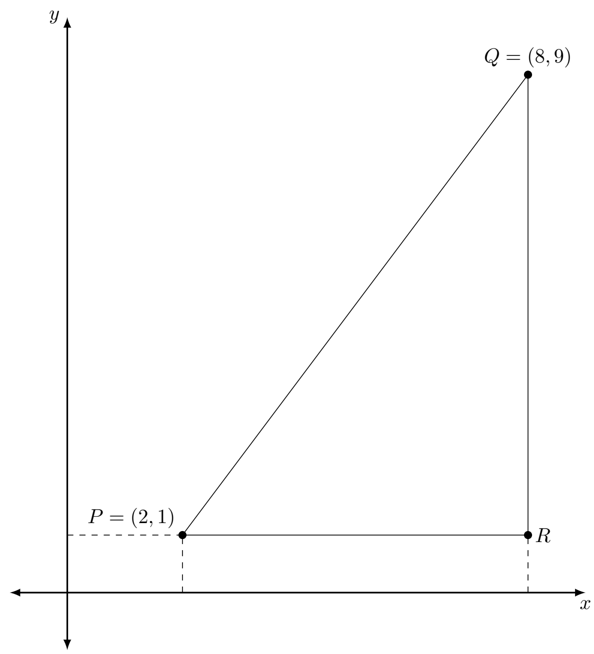
En él podemos ver que

- A pertenece al primer cuadrante.
- B pertenece al tercer cuadrante.
- C pertenece al segundo cuadrante.
- D pertenece al cuarto cuadrante.

$\square$

6.3. Distancia entre dos puntos.

Ejercicio 6.3.1. *Consideremos la figura*



a) *¿cuáles deben ser las coordenadas de R de modo $\triangle PRQ$ sea un triángulo rectángulo en R?*

Solución. $R = (8, 1)$.

b) *determine la distancia entre P y Q.*

Solución. Note que, por simple observación

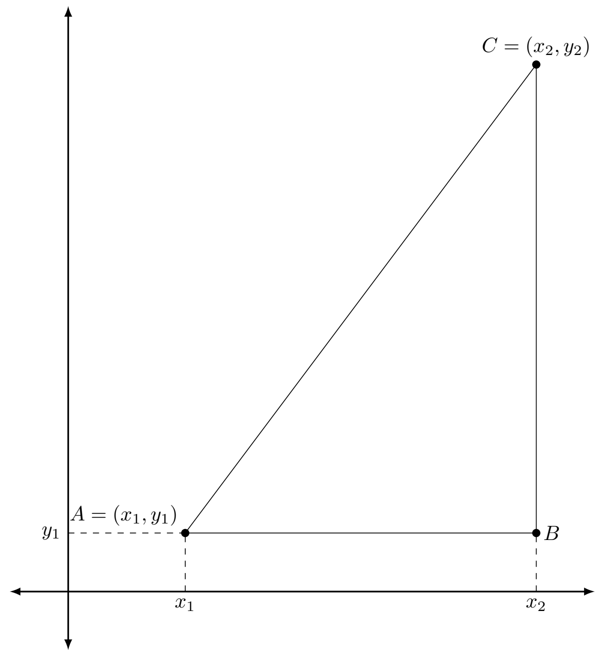
$$PR = 6, \;\; RQ = 8.$$

De este modo, por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$PQ^2 = 6^2 + 8^2 = 100,$$

de donde concluimos que la distancia entre P y Q es $PQ = 10$.

Ejercicio 6.3.2. *Consideremos la figura*



a) *¿Cuáles deben ser las coordenadas de R de modo $\triangle PRQ$ sea un triángulo rectángulo en R?*

Solución. $R = (x_2, y_1)$.

b) *Determine la distancia entre P y Q.*

Solución. Note que según el gráfico

$$PR = x_2 - x_1, \ RQ = y_2 - y_1.$$

Por el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Así, la distancia entre $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ es

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{6.3.1}$$

□

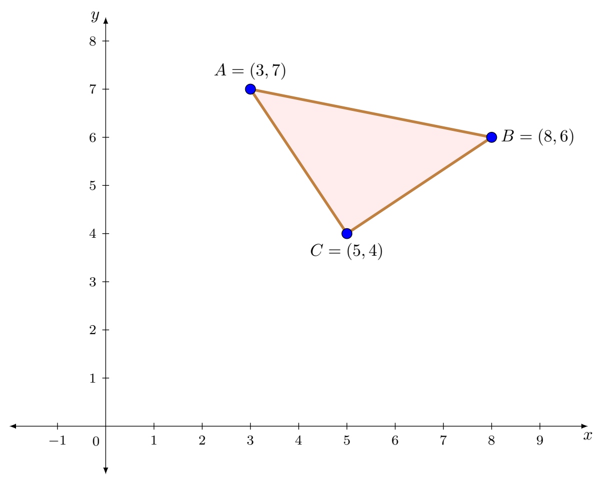
La fórmula (**??**) es válida para calcular la distancia entre cualquier par de puntos del plano. Esto lo enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema 6.3.1. *Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$. La* ***distancia*** *entre P y Q, la cual es denotada por PQ (o $d(P, Q)$), viene dada por*

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejercicio 6.3.3. *Considere el triángulo $\triangle ABC$ de vértices $A = (3, 7), B = (5, 4)$, $C = (8, 6)$. ¿Es un triángulo isósceles?*

Solución. En general, en la Geometría Analítica, es muy útil graficar o hacer un esquema con los datos que tenemos, para ver con más claridad cómo resolver el problema. En este caso, graficamos $\triangle ABC$:



Recordemos que un triángulo es isósceles, cuando tiene sólo dos lados de igual medida. De este modo, para determinar si $\triangle ABC$ es isósceles, calculamos las longitudes de sus lados, mediante la fórmula de la distancia entre dos puntos.

Determinemos AB. Calculamos la distancia entre A y B, dejando $A = (3, 7) = (x_1, y_1)$ y $B = (5, 4) = (x_2, y_2)$ (al revés también funciona). De este modo,

$$AB = \sqrt{(5 - 3)^2 + (4 - 7)^2} = \sqrt{13}.$$

Usted también puede comprobar, que $BC = \sqrt{13}$ y $AC = \sqrt{26}$. Como

$$AB = BC \neq AC,$$

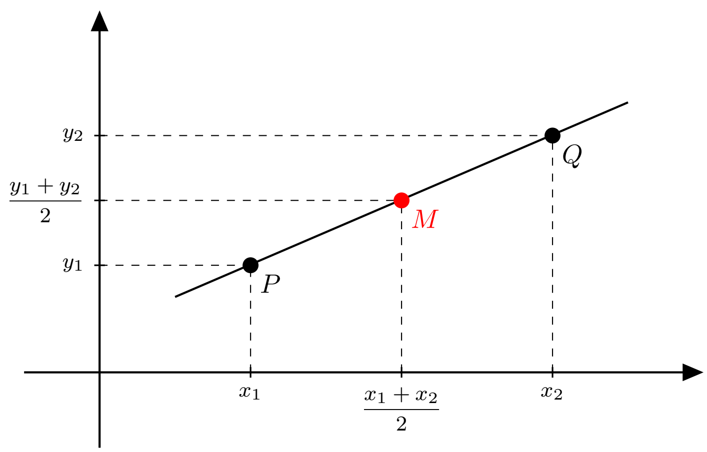
entonces $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles. $\square$

6.4. Punto medio de un segmento.

Informalmente, el punto medio de un segmento es el punto que está justo en la mitad de éste. Veamos como determinar sus coordenadas:

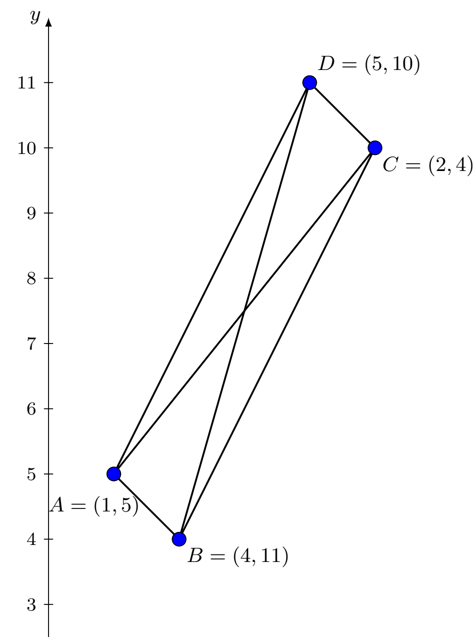
Definición 6.4.1. *Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$. El* ***punto medio*** *entre P y Q, es el punto M de coordenadas*

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$



Ejercicio 6.4.1. *Considere el cuadrilátero de vértices* $A = (1,5), B = (4,11)$, $C = (2,4), D = (5,10)$. *Demuestre que sus diagonales se bisecan.*

Solución. Gráficamente, tenemos:



Cuando decimos que las diagonales se bisecan, esto quiere decir éstas se dividen mutuamente en dos partes iguales. Para que esto ocurra, entonces su punto medio debe ser el mismo.

Calculamos el punto medio M de $\overline{AD}$, escogiendo $A = (1,5) = (x_1, y_1)$ y $D = (4,11) = (x_2, y_2)$. Se tiene que

$$M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{5+10}{2}\right) = (3,5).$$

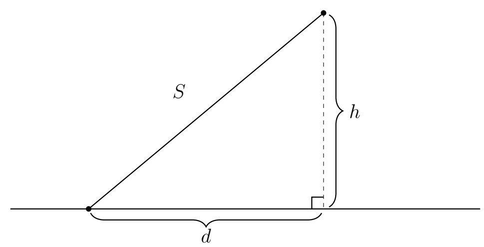
Además, usted mismo puede comprobar que el punto medio N de $\overline{BD}$ es $N = (3,5)$. De este modo, $M = N$. Por lo tanto, las diagonales del paralelogramo dado se bisecan.

□

6.5. La Recta.

6.5.1. Pendiente de un segmento.

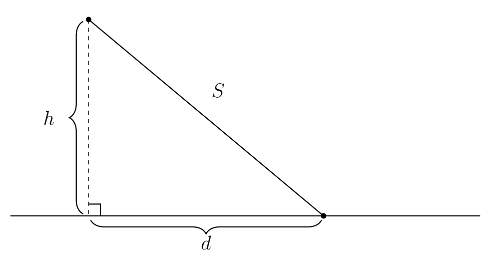
Definición 6.5.1. *Sea S un segmento dirigido hacia la derecha en forma creciente, para el cual su extremo inicial reside en una recta horizontal dada:*



Sea h la altura de S con respecto a la recta horizontal, y d el desplazamiento horizontal determinado por S. La ***pendiente*** *m de S, con respecto a esta recta horizontal, viene dada por*

$$m = \frac{h}{d}.$$

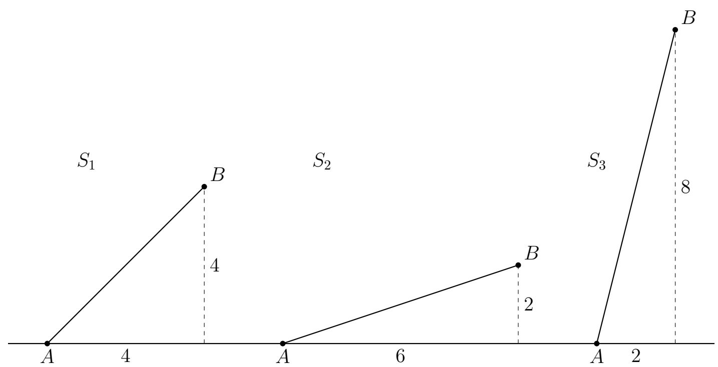
Definición 6.5.2. *Sea S un segmento dirigido hacia la derecha en forma decreciente, para el cual su extremo final reside en una recta horizontal:*



Sea h la altura de S con respecto a la recta horizontal, y d el desplazamiento horizontal determinado por S. La ***pendiente*** *m de S, con respecto a esta recta horizontal, viene dado por*

$$m = -\frac{h}{d}.$$

Ejercicio 6.5.1. *Considere cada segmento $\overline{AB}$ siguiente:*



a) *En cada caso, calcule su pendiente con respecto a la recta horizontal de la figura.*

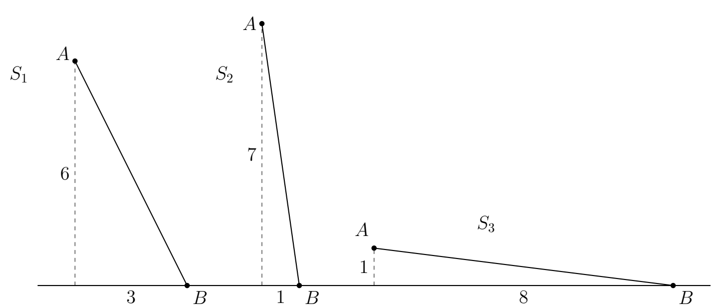
Solución. Para S_1, note que $h = 4$ y $d = 4$. De este modo, su pendiente es $m_1 = \frac{h}{d} = \frac{4}{4} = 1$. Además, podemos ver que el segmento S_2 tiene pendiente $m_2 = \frac{1}{3}$ y que el segmento S_3 tiene pendiente $m_3 = 4$.

b) *Conjeture en base a lo obtenido en a):*

En el caso de segmentos crecientes, mientras mayor pendiente tenga el segmento, ¿qué ocurre con su inclinación con respecto a la horizontal?

Solución. A mayor pendiente tenga el segmento, mayor es su inclinación con respecto a la horizontal. □

Ejercicio 6.5.2. *Considere cada segmento $\overline{AB}$ siguiente:*



a) *En cada caso, determine la pendiente del segmento dado.*

Solución. Sean m_1, m_2, m_3 las pendientes de S_1, S_2 y S_3 respectivamente. Tenemos que $m_1 = -2$, $m_2 = -7$ y $m_3 = -\frac{1}{8}$.

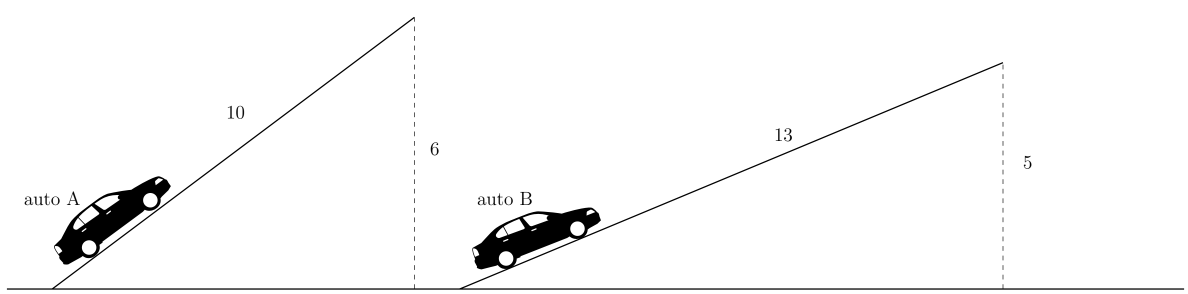
b) *Conjeture en base a lo obtenido en a):*
En el caso de segmentos decrecientes, mientras menor sea su pendiente, ¿qué ocurre con su inclinación con respecto a la horizontal?

Solución. Mientras menor sea su pendiente, es decir, más lejana de 0, entonces más inclinado con respecto a la horizontal está. □

Observación 6.5.1. En general, la pendiente de un segmento determina su inclinación con respecto a la horizontal. En particular, en el caso de segmentos crecientes, a mayor pendiente, mayor es su inclinación; en el caso segmentos decrecientes, a menor pendiente (o sea más lejana de 0), entonces el segmento tiene mayor inclinación.

Ejercicio 6.5.3. *Un auto A sube un camino de* 10 *km de largo, para llegar a una casa que está a una altura de* 6 *km. Un auto B sube un camino de* 13 *km de largo, para llegar a una casa que está a una altura de 5 km. ¿cuál auto subió el camino más empinado?*

Solución. Para determinar que camino está más empinado, calculamos la pendiente de cada uno de ellos, suponiendo que ambos caminos son crecientes hacia la derecha:



- Consideremos la figura correspondiente al auto A. Usando el teorema de Pitágoras, se tiene que $d = 8$. Así, la pendiente del camino es $m_A = \frac{3}{4}$.
- En la figura correspondiente al auto B, de nuevo por Pitágoras, deducimos que $d = 12$. De este modo, la pendiente del camino es $m_B = \frac{5}{12}$.

Note que

$$m_A = \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{12},$$

por lo que $m_A > m_B$. Así, el auto A subió el camino más empinado.

Ejercicio 6.5.4. *En virtud de la definición de pendiente para segmentos crecientes hacia la derecha, ¿cual debería ser la pendiente de un segmento horizontal con respecto a la horizontal determinada por él mismo?*

Solución. Dado que el segmento es horizontal, entonces $h = 0$, por lo que su pendiente m deberá ser tal que

$$m = \frac{h}{d} = \frac{0}{d} = 0.$$

$\square$

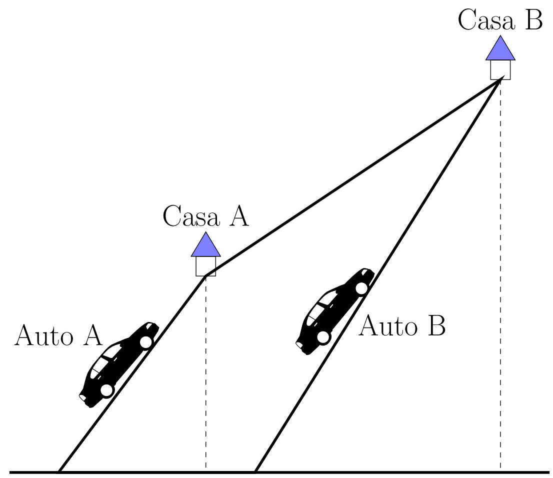
Ejercicio 6.5.5. *En virtud de la definición dada de pendiente para segmentos crecientes hacia la derecha, ¿que debería ser la pendiente de un segmento vertical?*

Solución. Dado que el segmento es vertical, entonces $d = 0$. Así, su pendiente $m = \frac{h}{d}$ no debería estar definida. $\square$

Definición 6.5.3. *Sea S un segmento horizontal. La* ***pendiente*** *m de S, es $m = 0$.*

Definición 6.5.4. *Sea S un segmento vertical. La* ***pendiente*** *m de S, no está definida.*

Ejercicio 6.5.6. *En la figura, un auto A y un auto B, deben llegar a la casa A y a la casa B respectivamente.*



Consideremos que

- *el camino que debe recorrer el auto A es de 5 km y además, la casa A está a 4 km de altura.*

- *el camino que debe recorrer el auto B es de 10 km y además, la casa B está a 8 km de altura.*

a) *Determine la pendiente de cada camino.*

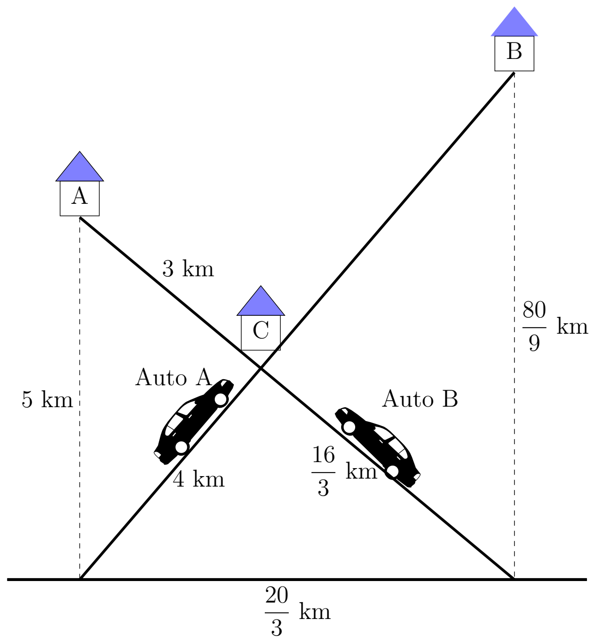
Solución. Por el teorema de Pitágoras, el desplazamiento horizontal d efectuado por el auto A es $d = 3$, luego la pendiente de su camino es $m_A = \frac{4}{3}$. También por el teorema de Pitágoras, el desplazamiento horizontal d efectuado por el auto B es $d = 6$, luego la pendiente de su camino es $m_B = \frac{4}{3}$.

b) *Si cada camino continua hacia arriba en línea recta, ¿cree usted posible que estos caminos se cruzen?*

Solución. No, dado que ambos caminos están igualmente inclinados, por lo que son paralelos. $\square$

Proposición 6.5.5. *Sean S_1 y S_2 dos segmentos no verticales, de pendiente m_1 y m_2 respectivamente. Se tiene que S_1 y S_2 son paralelos, si y sólo si, $m_1 = m_2$, es decir, si tienen la misma pendiente.*

Ejercicio 6.5.7. *Considere la siguiente figura, donde el auto A va hacia la casa A y el auto B va bajando desde la casa B.*



En el dibujo se aprecia que la distancia desde la casa C hasta la casa B es de 3 km, y que la distancia que debe recorrer el auto A desde el inicio del camino hasta la casa C es de 4 km.

a) *Determine la pendiente del camino que debe recorrer el auto A y la pendiente del camino que debe recorrer el auto B.*

Solución. La pendiente m_1 del camino que recorre el auto A es

$$m_1 = \frac{\frac{80}{9}}{\frac{20}{3}} = \frac{4}{3}.$$

La pendiente m_2 del camino que recorre el auto B es

$$m_2 = -\frac{5}{\frac{20}{3}} = -\frac{3}{4}.$$

b) *¿A qué valor corresponde el producto de sus pendientes?*

Solución. Se tiene que

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{4} = -1.$$

c) *Si el auto A cambiara repentinamente de dirección, y girara hacia la casa B ¿De cuántos grados sería tal giro?*

Solución. Note que $\triangle ACO$ es rectángulo en C, dado que sus lados satisfacen el Teorema de Pitágoras (3,4 y 5 son números pitágoricos). De este modo, el giro es de 90°. □

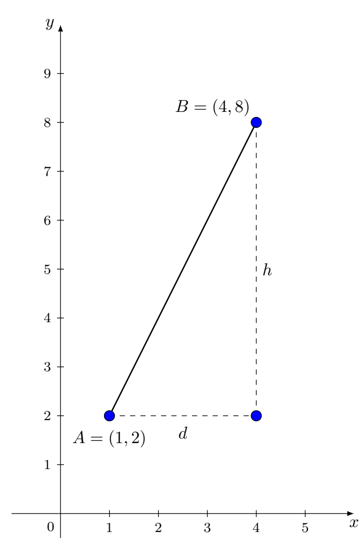
Proposición 6.5.6. *Sean S_1 y S_2 dos segmentos no verticales, de pendiente m_1 y m_2, respectivamente. Se tiene que S_1 y S_2 son perpendiculares entre sí, si y sólo si*

$$m_1 \cdot m_1 = -1,$$

es decir, si el producto de sus pendientes es -1.

6.5.2. Pendiente de un segmento en el plano cartesiano.

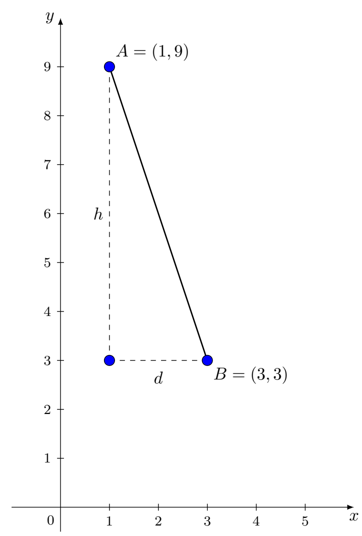
Ejercicio 6.5.8. *Considere el segmento $\overline{AB}$ con $A(1,2)$ y $B(4,8)$.*



¿Cuál es el valor de h,d y m?

Solución. Se tiene que $h = 3$, $d = 6$ y $m = \frac{h}{d} = 2$.

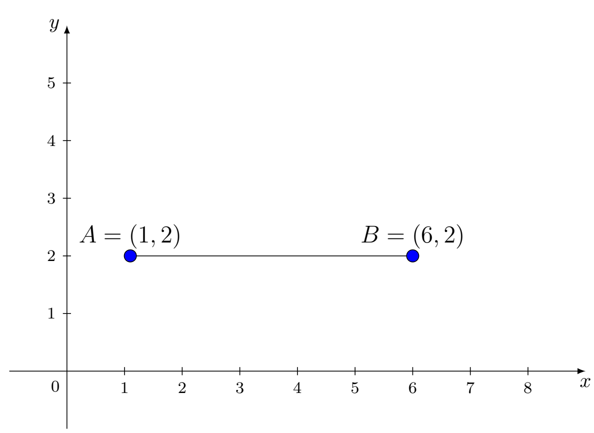
Ejercicio 6.5.9. *Considere el segmento* $\overline{AB}$ *con* $A(1, 9)$ *y* $B(3, 3)$.



¿Cuál es el valor de h*,* d *y* m*?*

Solución. Se tiene que $h = 2$, $d = 6$ y $m = -\dfrac{h}{d} = -3$.

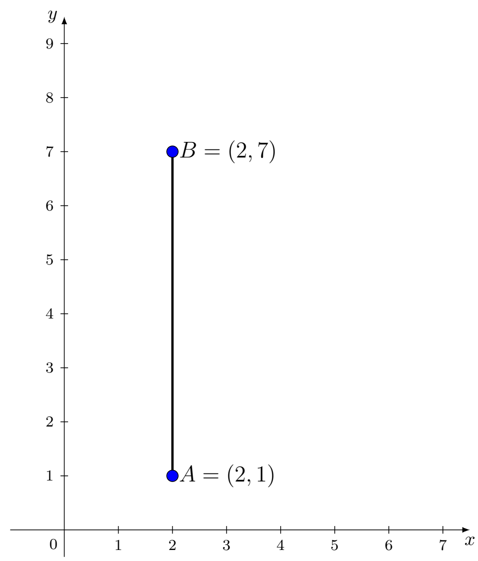
Ejercicio 6.5.10. *Considere el segmento* L *que pasa por* $(1, 2)$ *y* $(6, 2)$.



¿Cuál es el valor de su pendiente m*?*

Solución. Dado que el segmento es horizontal, se tiene que $m = 0$. $\square$

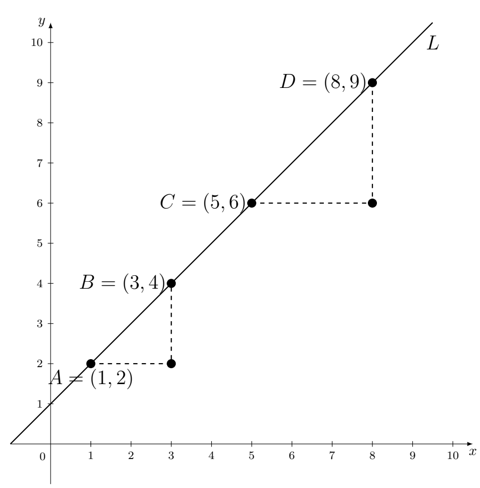
Ejercicio 6.5.11. *Considere el segmento L que pasa por $(2,1)$ y $(2,7)$.*



¿Cuál es el valor de su pendiente m?

Solución. Como el segmento es vertical, entonces su pendiente m no está definida. $\square$

Ejercicio 6.5.12. *Considere la recta que pasa por los puntos $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(5,6)$ y $D=(8,9)$.*



a) *¿Cuál es la pendiente de* $\overline{AB}$*?*

Solución. La pendiente de $\overline{AB}$ es $m_1 = 1$.

b) *¿Cuál es la pendiente de* $\overline{CD}$*?*

Solución. La pendiente de $\overline{CD}$ es $m_2 = 1$.

Proposición 6.5.7. *Dos segmentos que están contenidos en la misma recta, tienen la misma pendiente.*

6.5.3. Pendiente de una recta.

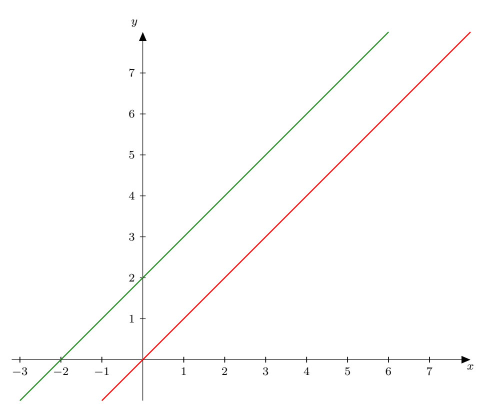
Definición 6.5.8. *Sea L una recta no vertical. La* ***pendiente*** *de L corresponde a la pendiente de cualquier segmento que esté contenido en L.*

Ejercicio 6.5.13. *Determine la pendiente de la recta L que pasa por $A = (1, 4)$ y $B = (3, 8)$.*

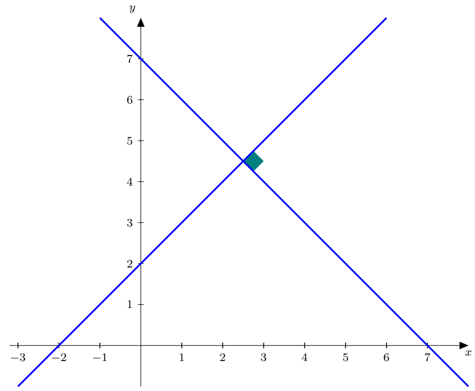
Solución. La pendiente de L corresponde a la pendiente de $\overline{AB}$ y esta es $m = 2$. □

Proposición 6.5.9. *Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales, de pendientes m_1 y m_2 respectivamente*

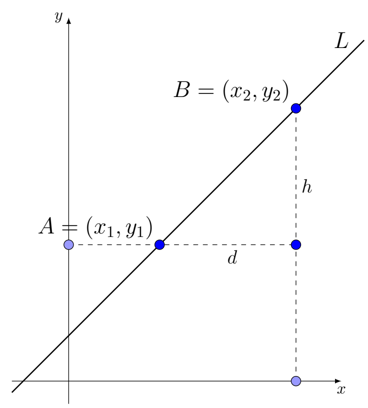
- *L_1 y L_2 son paralelas, si y sólo si, $m_1 = m_2$. .*



- *L_1 y L_2 son perpendiculares, si y sólo si, $m_1 \cdot m_2 = -1$.*



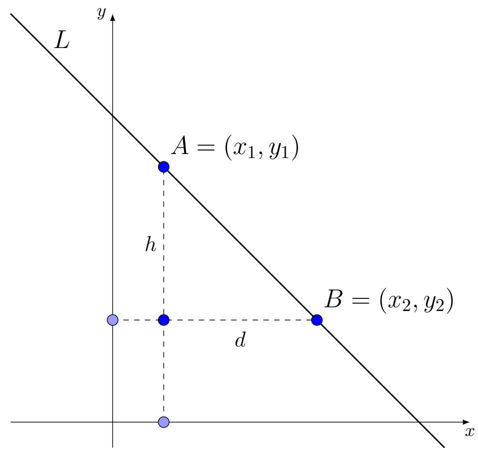
Ejercicio 6.5.14. *¿Cuál es la pendiente de la recta dada?*



Solución. Note que $h = y_2 - y_1$ y $d = x_2 - x_1$, por lo que

$$m = \frac{h}{d} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Ejercicio 6.5.15. *¿Cuál es la pendiente de la recta dada?*



Solución. Note que $h = y_1 - y_2$ y $d = x_2 - x_1$, por lo que

$$m = -\frac{h}{d} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

□

Proposición 6.5.10. *Sea L una recta no vertical, que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La pendiente de L viene dada por*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{6.5.1}$$

Observación 6.5.2. La última proposición nos dice que la fórmula de la pendiente de una recta es una sola, y corresponde a (**??**), independiente de la posición de la recta con respecto a la horizontal.

Ejercicio 6.5.16. *Usando la fórmula, obtenga la pendiente de la recta L que pasa por $(-2, 1)$ y $(1, -6)$.*

Solución. Si $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ y $(x_2, y_2) = (1, -6)$, entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6 - 1}{1 - (-2)} = -\frac{7}{3}.$$

Note que si escogemos $(x_1, y_1) = (1, -6)$ y $(x_2, y_2) = (-2, 1)$, y usamos la fórmula recién planteada para calcular la pendiente, entonces el valor obtenido es también $m = -\frac{7}{3}$.

Observación 6.5.3. Dada una recta no vertical, el valor de su pendiente no depende de los puntos escogidos para calcularla, ni del orden en el cual fueron escogidos.

Ejercicio 6.5.17. *Considere la recta L que pasa por $(1,3)$ y de pendiente $m = 2$. Llamamos (x,y) a cualquier otro punto de L.*

a) *Obtenga una expresión de x e y para la pendiente de L, usando los puntos $(1,3)$ y (x,y).*

Solución. La pendiente de L, calculada usando los puntos $(1,3)$ y (x,y), viene dada por la expresión

$$\frac{y-3}{x-1}.$$

b) *Como $m = 2$, ¿que podemos concluir de lo obtenido en a)?*

Solución. Como la pendiente de una recta es independiente de los puntos que se usaron para calcularla, entonces

$$\frac{y-3}{x-1} = 2.$$

□

6.5.4. Ecuación de la recta.

En el último ejercicio de la sección anterior, al calcular la pendiente de la recta mencionada, obtuvimos la igualdad

$$\frac{y-3}{x-1} = 2.$$

De esta expresión, podemos obtener la ecuación equivalente

$$y - 3 = 2(x-1), \tag{6.5.2}$$

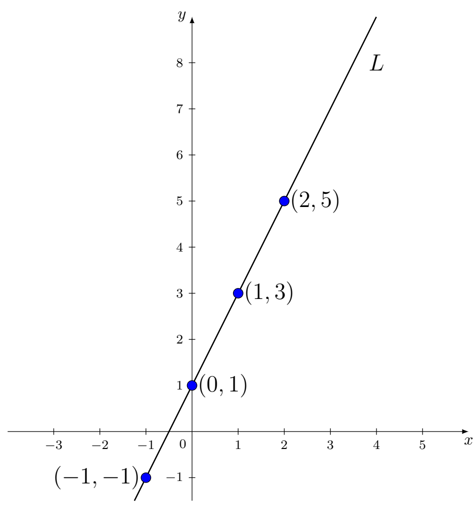
la cual recibe el nombre de **ecuación canónica de la recta** L, con la cual, entre otras cosas, podremos calcular infinitos puntos que pertenecen a dicha recta. En efecto, despejamos y de (**??**), y así

$$y = 2x + 1 \tag{6.5.3}$$

Realizamos la siguiente tabla de valores:

x	$y = 2x + 1$
0	1
1	3
2	5
-1	-1

De este modo, graficamos la recta con los puntos obtenidos:



Note que en la ecuación $y = 2x + 1$, el coeficiente de x es 2, el cual corresponde a la pendiente, y el término libre es 1, el cual determina la intersección de la recta con el eje y.

En general, consideremos la recta L que pasa por (x_1, y_1) y de pendiente m. Llamamos (x, y) a cualquier otro punto de L. Si calculamos su pendiente usando los puntos (x_1, y_1) y (x, y), obtenemos la expresión

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Como el cálculo de la pendiente es independiente de los puntos escogidos para calcularla, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

de donde obtenemos la expresión

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

la cual se denomina **ecuación canónica de la recta** L que pasa por (x_1, y_1) y pendiente m.

Definición 6.5.11. *Sea L una recta que pasa por (x_1, y_1) y que tiene pendiente m. La **ecuación canónica** de la recta L es*

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{6.5.4}$$

Observación 6.5.4. De la ecuación canónica de una recta dada, podemos obtener una ecuación de la forma

$$y = mx + b,$$

donde el coeficiente de x es m, el cual corresponde a la pendiente, y el término libre es b, el cual determina a la intersección de la recta con el eje y.

Ejercicio 6.5.18. *Considere la recta L que pasa por $P = (3, 1)$ y tiene pendiente $m = -2$.*

a) *Determine su ecuación.*

   Solución. Como vimos en la definición, para determinar la ecuación de una recta, necesitamos de un punto y de su pendiente. En este caso, tenemos ambos elementos, por lo que la ecuación de L viene dada por

$$y - 1 = -2(x - 3).$$

   Despejando y, obtenemos

$$y = -2x + 7. \tag{6.5.5}$$

b) *¿Pertenece $(4, -1)$ a la recta L?*

   Solución. Para determinarlo, reemplazamos $x = 4$ en la ecuación (**??**), obteniendo que $y = -1$, por lo que $(4, -1)$ si pertenece a L.

c) ¿Pertenece $(1, -5)$ a la recta L?

Solución. Para determinarlo, reemplazamos $x = 1$ en la ecuación (**??**), obteniendo que $y = 5$, por lo que $(1, -5)$ no pertenece a L. $\square$

Ejercicio 6.5.19. *Sea L la recta de pendiente $m_L = -2$ y que pasa por el origen. ¿Es L paralela a*

a) *la recta $L' : x + 2y = 2$?*

Solución. Recordemos que para que dos rectas sean paralelas, estas deben tener la misma pendiente. Sabemos que la pendiente de L' la podemos obtener despejando y de la ecuación dada. Despejando y, obtenemos que

$$y = -\frac{1}{2}x + 1,$$

por lo que la pendiente de L' es $m_{L'} = -\frac{1}{2}$. Como

$$m_L = -2 \neq -\frac{1}{2} = m_{L'},$$

entonces las rectas no son paralelas.

b) *la recta L' que es perpendicular a la recta $S : x - 2y = 0$?*

Solución. Despejando y de la ecuación de S, obtenemos que $y = \frac{1}{2}x$, por lo que la pendiente de S es $m_S = \frac{1}{2}$. Como L' es perpendicular a S, entonces

$$m_{L'} = -\frac{1}{m_S} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Como $m_{L'} = -2 = m_L$, entonces L y L' son paralelas. $\square$

Observación 6.5.5. En general, si L_1 y L_2 son dos rectas no verticales y perpendiculares entre sí, entonces la pendiente de L_1 es el recíproco de la pendiente de L_2, pero con signo contrario. Por ejemplo, si la pendiente de L_1 es 2, entonces la pendiente de L_2 es $-\frac{1}{2}$. Otro ejemplo es, que si la pendiente de L_1 es $\frac{1}{3}$, entonces la pendiente de L_2 es -3.

Ejercicio 6.5.20. *Determine la ecuación de la recta L que pasa por $(1,2)$ y $(5,6)$.*

Solución. Necesitamos de un punto y de la pendiente de L. Puntos tenemos dos, nos falta la pendiente. Para obtener la pendiente, la calculamos usando los dos puntos dados. Se tiene que

$$m = \frac{6-2}{5-1} = 1,$$

por lo que usando uno de los puntos y el valor de m, obtenemos que la ecuación de la recta es $y = x + 1$. Despejando 0 de esta ecuación, se deduce que

$$x - y + 1 = 0,$$

la cual se denomina **ecuación general** de la recta L. □

Observación 6.5.6. De la ecuación canónica de una recta dada, podemos obtener una expresión de la forma

$$ax + by + c = 0,$$

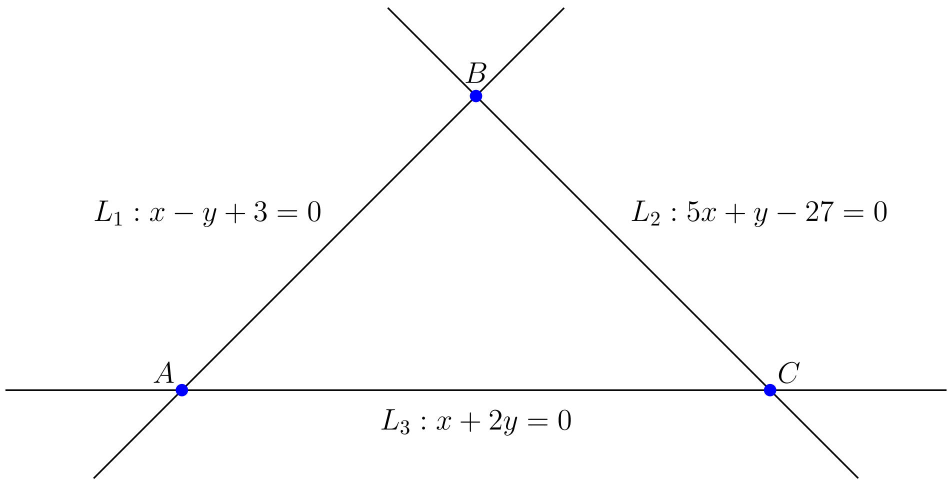
con a y b no simultáneamente 0, la cual llamamos **ecuación general** de la recta L.

Para determinar si dos rectas L_1 y L_2 se intersectan en algún punto, debemos resolver el sistema de ecuaciones compuesto por las ecuaciones de ambas rectas.

Ejercicio 6.5.21. *Considere el triángulo determinado por las rectas $L_1 : x - y + 3 = 0$ $L_2 : 5x + y - 27 = 0$, $L_3 : x + 2y = 0$.*

a) *Determine los vértices de este triángulo.*

   Solución. Hacemos un esquema, tal vez algo lejano a la realidad, pero una fiel representación:



Determinemos los vértices A, B y C del triángulo. Según el esquema, el punto A corresponde a la intersección entre las rectas L_1 y L_3, por lo que para obtener A, resolvemos el sistema de sus ecuaciones. Es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + 2y = 0, \end{cases}$$

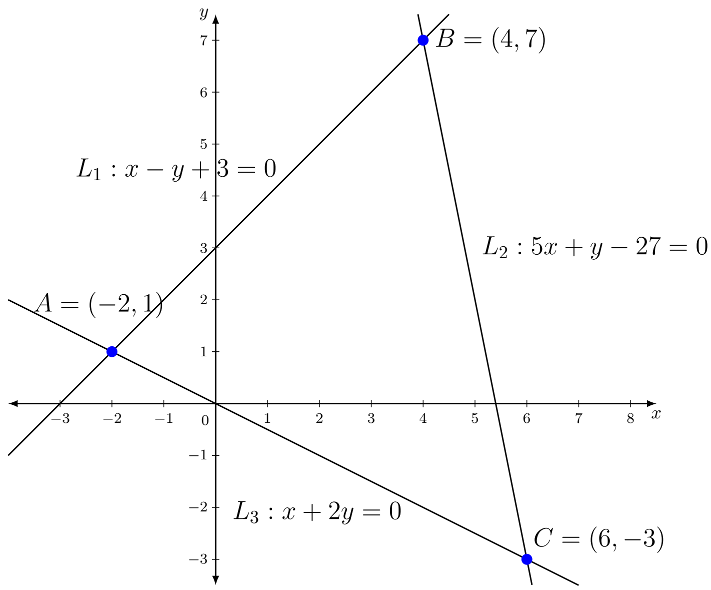
de donde $A = (-2, 1)$.

Análogamente, según el esquema, el punto B corresponde a la intersección de las rectas L_1 y L_2, por lo que resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + y = 27, \end{cases}$$

de donde $B = (4, 7)$.

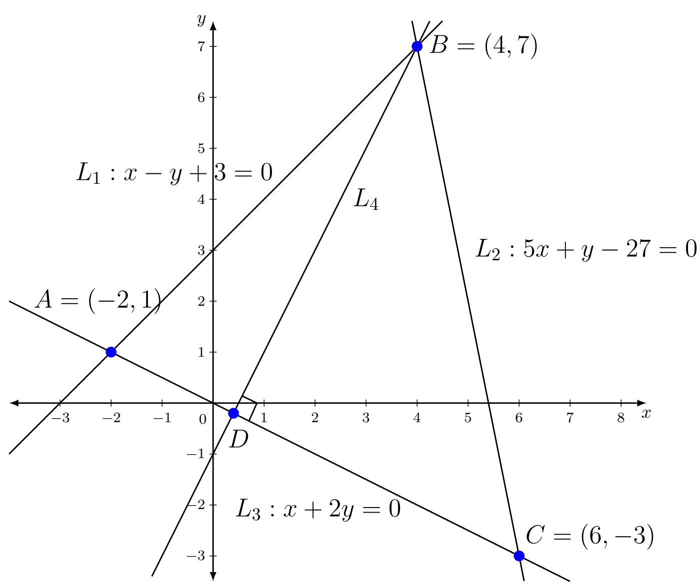
Finalmente, como según el esquema, C corresponde a la intersección de L_2 y L_3, entonces resolvemos el sistema de sus ecuaciones, obteniendo que $C = (6, -3)$. De este modo, graficamos el triángulo con sus vértices y las rectas que determinan sus lados:



b) *Determine su área.*

Solución. Sabemos que el área de un triángulo corresponde a la mitad del producto entre su base y su altura. Si escogemos como base a $\overline{AC}$, por la fórmula de la distancia entre dos puntos, vemos que su longitud es $b = AC = 4\sqrt{5}$.

Queremos calcular la longitud de la altura que va desde B hasta la recta que contiene a la base $\overline{AC}$. En base a lo obtenido en a), un esquema de la situación problema es



donde L_4 es la recta que determina la altura y D es el pie de la altura. Debemos determinar la longitud de $\overline{BD}$. Para ello debemos determinar primero D. Note que D corresponde a la intersección entre L_4 y L_3. Por lo tanto, calculamos la ecuación de L_4, dado que ya tenemos la ecuación de L_3.

La recta L_4 es perpendicular a L_3. Como $L_3 : y = -\frac{1}{2}x$, entonces su pendiente es $m_3 = -\frac{1}{2}$. Así, la pendiente de L_4 es $m_4 = 2$. Además, L_4 pasa por $B = (4, 7)$, por lo que su ecuación es

$$y - 7 = 2(x - 4),$$

la cual es equivalente a

$$2x - y = 1. \tag{6.5.6}$$

De este modo, resolviendo, el sistema de las ecuaciones de L_3 y L_4, es decir, el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 1, \end{cases}$$

obtenemos que $D = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Por lo tanto, la altura es

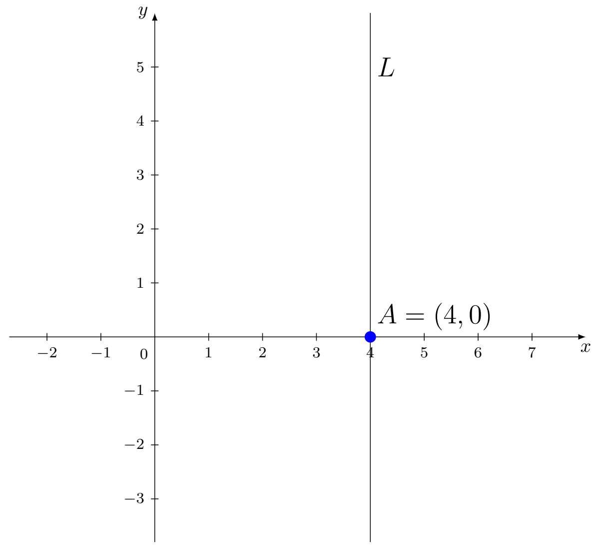
$$h = BD = \frac{18}{5}\sqrt{5}.$$

Finalmente, el área A del triángulo, viene dada por

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{5} \cdot \frac{18}{5}\sqrt{5}}{2} = 36 \text{ unidades cuadradas.}$$

$\square$

Consideremos la recta vertical L de la figura:

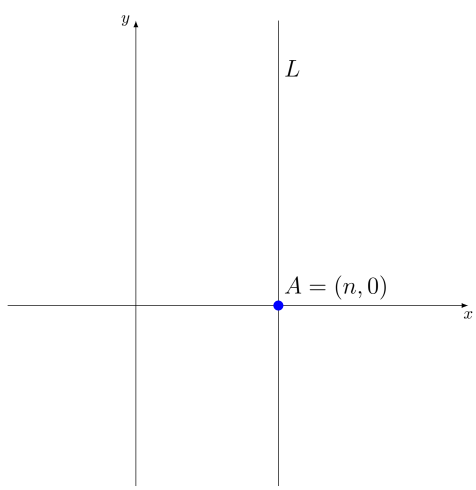


Note que L no tiene pendiente, sin embargo, queremos obtener una ecuación que satisfagan todos sus puntos. Como la recta es vertical, y pasa por $(4, 0)$, entonces para que (x, y) pertenezca a ella, debe satisfacer que

$$x = 4.$$

De este modo, $x = 4$ es la ecuación de L.

Definición 6.5.12. *Sea L una recta vertical que intersecta al eje x en $(n, 0)$*



La ecuación

$$x = n,$$

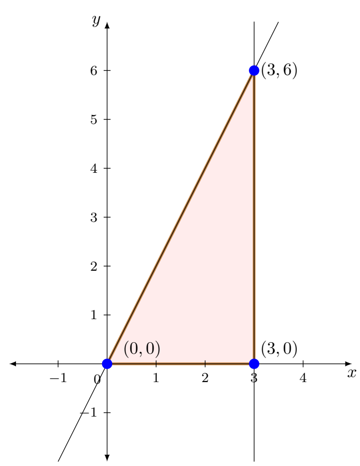
es llamada ***ecuación general de la recta vertical*** L *que pasa por* $(n, 0)$.

Ejercicio 6.5.22. *Determine el área del triángulo determinado por las rectas de ecuación* $y = 2x, y = 0, x = 3$.

Solución. Graficamos estas rectas, notando que

- $y = 0$ corresponde al eje x.
- $x = 3$ corresponde a la recta vertical que pasa por $(3, 0)$.
- $y = 2x$ pasa por $(0, 0)$ y además se intersecta con la recta $x = 3$ en $(3, 6)$.

El gráfico es



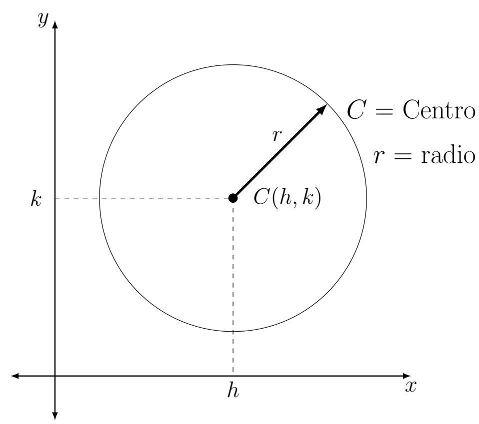
El triángulo es rectángulo en $(3, 0)$. Si consideramos como base el lado que está sobre el eje x, entonces $b = 3$ y $h = 6$. De este modo, el área del triángulo es

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ unidades cuadradas.}$$

$\square$

6.6. La Circunferencia.

Definición 6.6.1. *Se llama* ***circunferencia*** *al conjunto de puntos que están a una misma distancia fija de un punto fijo. A la distancia fija le llamamos* ***radio*** *de la circunferencia y al punto fijo lo llamamos* ***centro*** *de la circunferencia.*



Ejercicio 6.6.1. *Considere una circunferencia de centro en* $(1, 2)$ *y radio* $r = 4$*. Sea* (x, y) *un punto de la circunferencia.*

a) *Usando la fórmula de la distancia, obtenga una expresión de* x *e* y *para la distancia entre* (x, y) *y* $(1, 2)$.

Solución. Esta distancia viene dada por la expresión

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}.$$

b) *¿Qué relación existe entre la expresión obtenida en a) y el radio de la cicunferencia?*

Solución. Como $(1, 2)$ es el centro de la circunferencia y (x, y) es un punto cualquiera de ella, entonces, la distancia obtenida en a) es igual al radio, es decir,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 4. \tag{6.6.1}$$

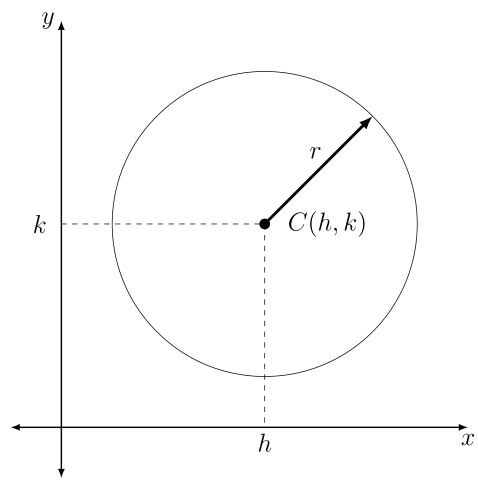
□

Observación 6.6.1. Elevando al cuadrado la expresión (**??**), obtenemos la ecuación

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16,$$

la cual se denomina **ecuación canónica** de la circunferencia de centro $(1, 2)$ y radio 4. Esta ecuación, nos servirá, entre otras cosas, para determinar las coordenadas de puntos que pertenecen a esta circunferencia.

En general, consideremos una circunferencia de centro (h, k) y radio r:



Si (x, y) es un punto cualquiera de esta circunferencia, su distancia a (h, k) es igual al radio, es decir

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r. \tag{6.6.2}$$

Elevando al cuadrado en (**??**), obtenemos la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

la cual recibe el nombre de **ecuación canónica** de la circunferencia de centro (h, k) y radio r.

Definición 6.6.2. *Considere una circunferencia de centro (h, k) y radio r. La ecuación*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

*recibe el nombre de **ecuación canónica** de esta circunferencia.*

Observación 6.6.2. Notemos que, si el centro de la circunferencia es el origen, la ecuación de la circunferencia se reduce a

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ejercicio 6.6.2. *Considere la circunferencia*

$$C : x^2 + y^2 = 25$$

a) *Identifique el centro y radio de C.*

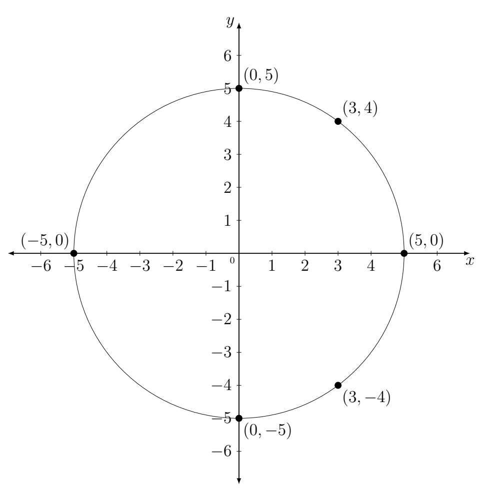
Solución. En virtud de la ecuación dada, el centro es $(0, 0)$ y el radio es 5.

b) *Determine 6 puntos pertenecientes a C y grafíquela junto con tales puntos.*

Solución. Se tiene que

- Si reemplazamos $x = 0$ en la ecuación dada, entonces $y = \pm 5$. De este modo, $(0, 5)$ y $(0, -5)$ son puntos de la circunferencia.
- Por otro lado, si reemplazamos $y = 0$ en la ecuación dada, entonces $x = \pm 5$. Así, $(5, 0)$ y $(-5, 0)$ son puntos de la circunferencia.
- Finalmente, si reemplazamos $x = 3$ en la ecuación dada, entonces $y = \pm 4$. Por lo tanto, $(3, 4)$ y $(3, -4)$ son puntos de la circunferencia.

El gráfico pedido es



c) ¿pertenece $(-1, 2\sqrt{6})$ a C?

Solución. Reeemplazando $x = -1$ e $y = 2\sqrt{6}$ en la ecuación dada, obtenemos que

$$x^2 + y^2 = (-1)^2 + (2\sqrt{6})^2 = 1 + 24 = 25,$$

por lo que $(-1, 2\sqrt{6})$ pertenece a la circunferencia. $\square$

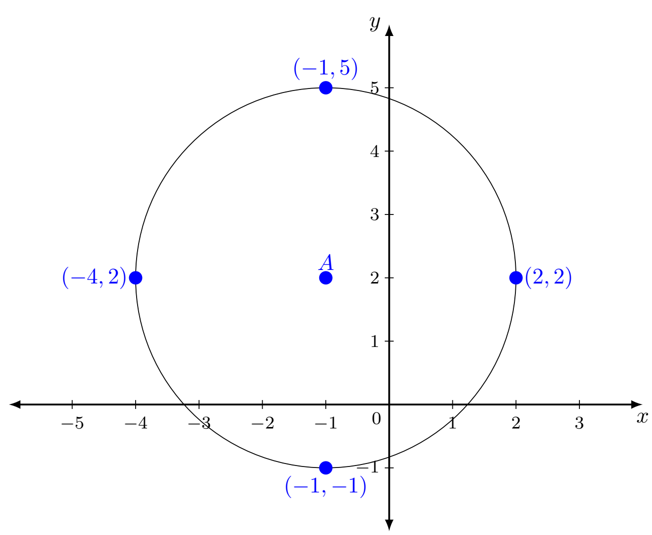
Ejercicio 6.6.3. *Determine la ecuación de la circunferencia*

a) *cuyo centro es $C = (-1, 2)$ y cuyo radio es $r = 3$. Grafíquela.*

Solución. Para obtener la ecuación de una circunferencia, necesitamos conocer su centro y su radio. En este caso, conocemos ambos elementos. Por lo tanto, su ecuación es

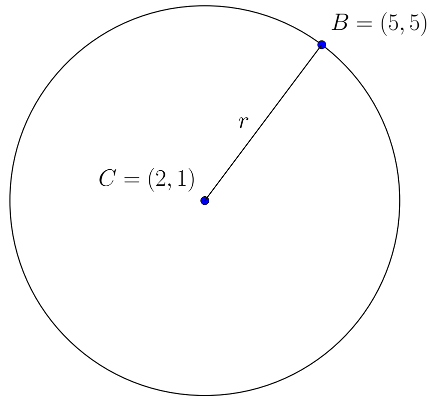
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Graficando el centro $C = (-1, 2)$, y sabiendo que el radio es $r = 3$, podemos contar 3 unidades en dirección paralela a los ejes a partir de C y de este modo obtener los puntos de la circunferencia $(2, 2), (-4, 2), (-1, -1)$ y $(-1, 5)$ (sin necesidad de usar la ecuación obtenida) y así graficarla. Su gráfico es $\square$



b) *cuyo centro es* $C = (2, 1)$ *y que pasa por* $B = (5, 5)$.

Solución. Un esquema de la situación es (insistimos en que un esquema es una representación del problema, no necesariamente en el plano cartesiano, la cual nos sirve de ayuda para resolver el problema):



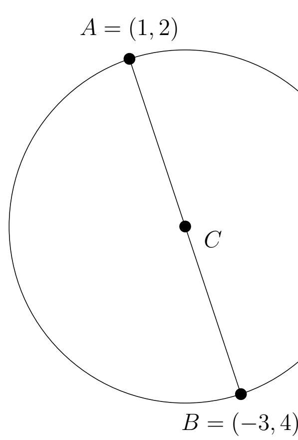
Según este esquema, sólo nos falta el radio r, el cual es obtenido calculando la distancia entre C y B. De este modo, $r = 5$, y la ecuación de la circunferencia pedida es

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

$\square$

c) *de diamétro* $\overline{AB}$, *con* $A = (1, 2)$ *y* $B = (-3, 4)$.

Solución. Un esquema del problema es



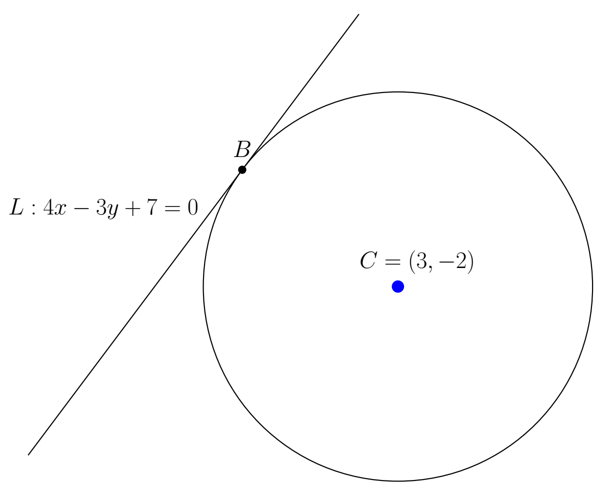
Del esquema se deduce que el centro C corresponde al punto medio del diámetro $\overline{AB}$, por lo que $C = (-1, 3)$. Además, del mismo esquema, podemos ver que una forma de obtener el radio es calculando la distancia entre C y A (Hay dos formas más, ¿cuáles son?), por lo que $r = \sqrt{10}$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

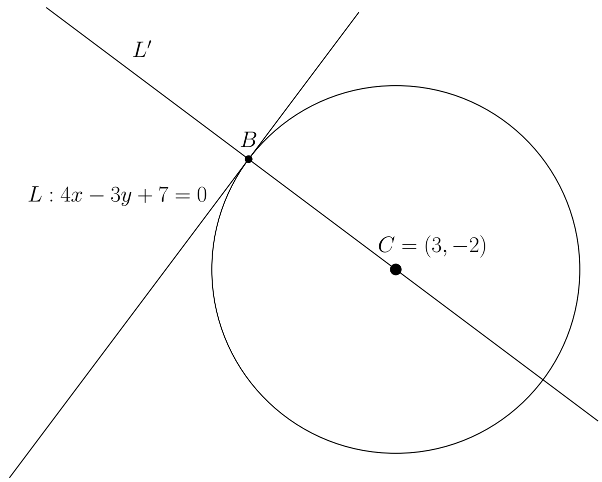
$\square$

d) *de centro* $C = (3, -2)$ *y que es tangente a la recta* $L : 4x - 3y + 7 = 0$.

Solución. Recordemos que una circunferencia y una recta se dicen tangentes entre sí, cuando estas se tocan en un sólo punto, el cual llamamos punto de tangencia. Realizamos un esquema de lo pedido, denotando por B al punto de tangencia:



Nos falta obtener el radio. Para ello, basta obtener la distancia entre C y B, pero no tenemos las coordenadas de B. Veamos cómo obtenerlas. En el esquema, trazamos la recta L' que pasa por C y por B:



En cualquier circunferencia, el radio hacia el punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente, por lo que L' es perpendicular a L en el punto B. De este modo, podemos obtener la pendiente y luego la ecuación de L'. Posteriormente, las coordenadas de B se logran resolviendo el sistema de ecuaciones de L y L'.

Obtengamos la ecuación de L'. Como la pendiente de L es $m_L = \frac{4}{3}$, entonces la pendiente de L' es $m_{L'} = -\frac{3}{4}$. Así, usando el punto C, obtenemos que la ecuación de L' es

$$3x + 4y = 1.$$

Resolvemos el sistema

$$4x - 3y = -7, \; 3x + 4y = 1,$$

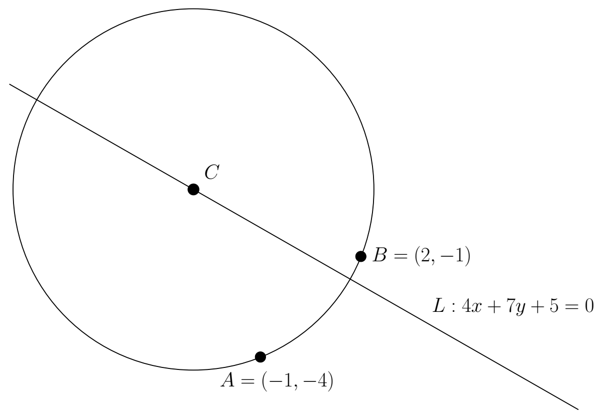
de donde $B = (-1, 1)$. Por lo tanto, calculando la distancia entre C y B, obtenemos que el radio es $r = 5$. Finalmente, la ecuación de la circunferencia es

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

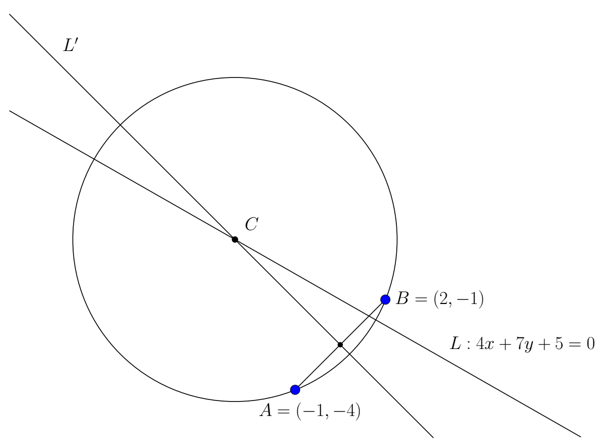
□

e) *que pasa por los puntos* $A = (-1, -4), B = (2, -1)$ *y cuyo centro está sobre la recta* $L : 4x + 7y + 5 = 0$.

Solución. Un esquema del problema es



No tenemos ni el centro ni el radio, sin embargo, si obtenemos el centro, obtener el radio es trivial. En el esquema, trazamos $\overline{AB}$, y luego su mediatriz L' (recta perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$), la cual pasa por el centro de la circunferencia (en la mediatriz viven todos los puntos que están a la misma distancia de A y B, en particular el centro C cumple con esta condición):



De este modo, para obtener C, calculamos la ecuación de L', y luego resolvemos el sistema de ecuaciones de L y L'.

Note que el punto medio de $\overline{AB}$ es $M = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. Además, como la pendiente de $\overline{AB}$ es $m = 1$, entonces la pendiente de L' es $m_{L'} = -1$. De este modo, la ecuación de L' es $y = -x - 2$. Resolviendo el sistema de las ecuaciones de L y L', es decir, el sistema

$$4x + 7y = -5, \; x + y = -2,$$

obtenemos que $C = (-3, 1)$. Así, calculando la distancia entre C y A, obtenemos que $r = \sqrt{29}$, por lo que la ecuación de la circunferencia es

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 29.$$

□

Ejercicio 6.6.4. *Una circunferencia es tangente*

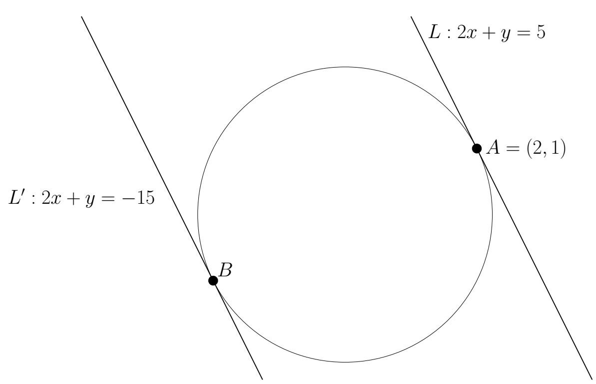
- *a la recta* $L : 2x + y = 5$ *en el punto* $A = (2, 1)$.
- *a la recta* $L' : 2x + y = -15$ *en el punto* B.

a) *¿Son paralelas* L *y* L'*?*

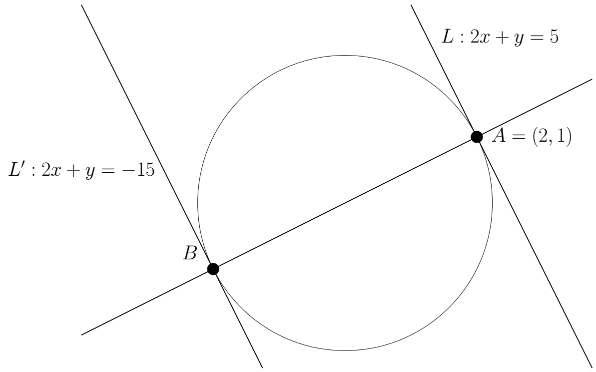
Solución. Despejando y de la ecuación de L y de L', obtenemos que $m_L = -2 = m_{L'}$, por lo que las rectas dadas son paralelas.

b) *Determine las coordenadas de* B.

Solución. Hacemos un esquema de la situación:



Como L y L' son paralelas, entonces $\overline{AB}$, el cual es un diámetro, es perpendicular a estas dos rectas:



De este modo, para obtener B calculamos la ecuación de $\overline{AB}$, y luego resolvemos el sistema de ecuaciones de $\overline{AB}$ y L'.

Obtengamos la ecuación de $\overline{AB}$. Como la pendiente de L es $m_L = -2$, entonces la pendiente de $\overline{AB}$ es $m = \frac{1}{2}$. Usando el punto A, obtenemos que la ecuación de $\overline{AB}$ es

$$x - 2y = 0.$$

Así, resolvemos el sistema

$$x - 2y = 0, \ 2x + y = -15,$$

de donde $B = (-6, -3)$.

c) *Determine la ecuación de la circunferencia.*

Solución. El centro C es el punto medio de $\overline{AB}$, por lo que $C = (-2, -1)$. Luego, el radio es $r = CA = 2\sqrt{5}$. Así, la ecuación de la circunferencia es

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20.$$

$\square$

Observación 6.6.3. En el último ejercicio resuelto, la ecuación de la circunferencia obtenida fue

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20.$$

Desarrollando los cuadrado del binomio y despejando 0, obtenemos la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0,$$

la cual recibe el nombre de **ecuación general de la circunferencia** en cuestión.

En general, a partir de la ecuación canónica de la circunferencia, podemos obtener una expresión de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \tag{6.6.3}$$

con $A, B \neq 0$ y $A = B$, la cual llamamos **ecuación general** de la circunferencia.

Ejercicio 6.6.5. *Consideremos la ecuación*

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$$

a) *¿Corresponde a la ecuación de una circunferencia?*

Solución. La ecuación dada es de la forma (**??**), con $A = 1 = B$, es decir, existe un término en x^2 y otro en y^2, cuyos coeficientes son iguales, entonces corresponde a una circunferencia.

b) *Si la respuesta a) es afirmativa, obtenga el centro y radio de la circunferencia en cuestión.*

Solución. Pretendemos llegar a una ecuación de la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

con h, k y r por determinar.

Para tal efecto, en la ecuación dada, agrupamos los términos en x y agrupamos los términos en y:

$$(x^2 - 12x) + (y^2 - 8y) = -27$$

Completamos cuadrado en x y lo mismo en y:

$$(x^2 - 12x + 36) + (y^2 - 8y + 16) = -27 + 36 + 16.$$

De este modo, obtenemos la ecuación

$$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25,$$

por lo que el centro es $C = (6, 4)$ y el radio es $r = 5$.

c) *Obtenga sus intersecciones con los ejes coordenados, y luego grafíquela.*

Solución. Se tiene que

- Para determinar su intersección con el eje x, resolvemos el sistema de ecuaciones

  $$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0, \ \ y = 0.$$

  Al resolverlo, obtenemos la ecuación cuadrática

  $$x^2 - 12x + 27 = 0,$$

  cuyas soluciones son $x = 3$ y $x = 9$. De este modo, la circunferencia intersecta al eje x en los puntos $(3, 0)$ y $(9, 0)$.

- Para determinar su intersección con el eje y, resolvemos el sistema de ecuaciones

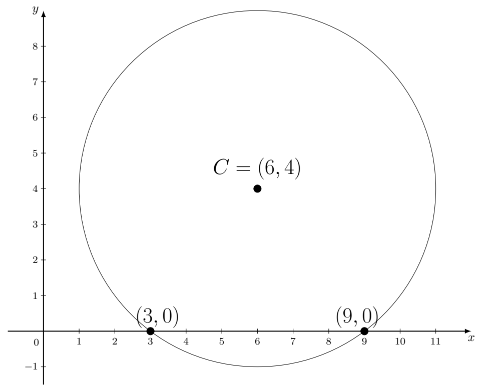
  $$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0, \ \ x = 0.$$

  Al resolverlo, obtenemos la ecuación cuadrática

  $$y^2 - 8y + 27 = 0,$$

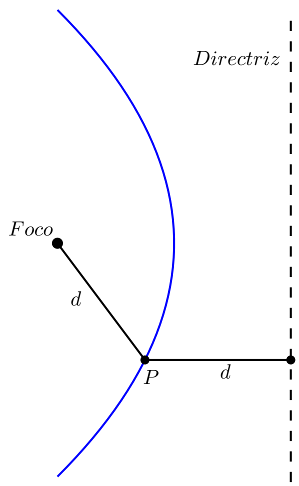
  la cual no tiene solución, dado que su discriminante es $\triangle = -44 < 0$. De este modo, la circunferencia no intersecta al eje y.

El gráfico, considerando las intersecciones con los ejes coordenados, y algún otro punto adicional, es:

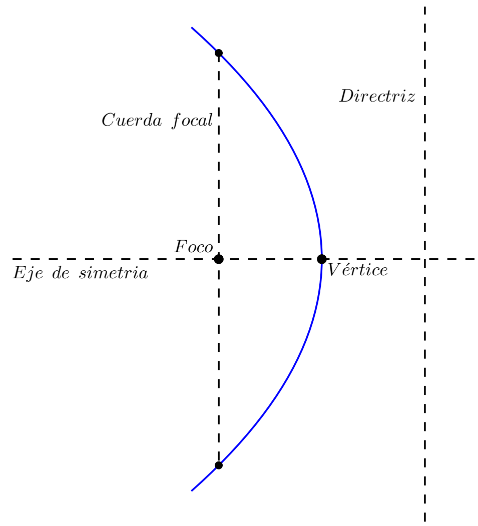


6.7. La Parábola.

Definición 6.7.1. *Se llama* ***parábola*** *al conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo recibe el nombre de* ***foco*** *y la recta fija recibe el nombre de* ***directriz****.*

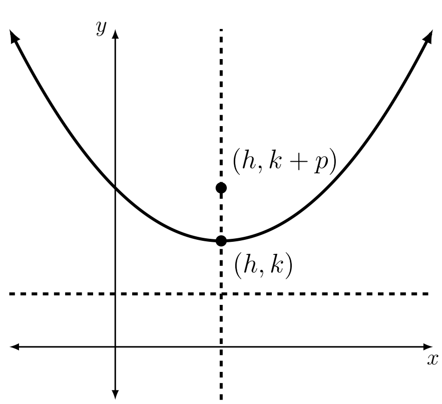


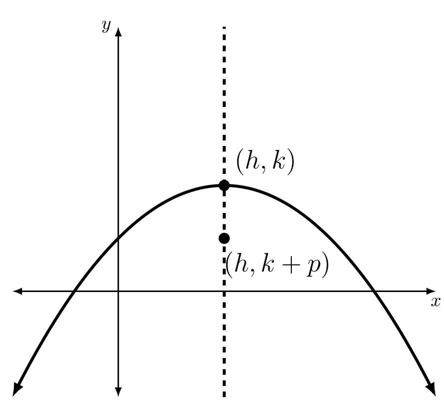
En una parábola distinguimos además:



- ***Eje de simetría:*** *Recta perpendicular a la directriz, la cual contiene al foco.*
- ***Vértice:*** *Punto de intersección del eje de símetría y la parábola. Es denotado por* V.
- ***Cuerda focal (o lado recto):*** *Segmento que pasa por el foco, cuyos extremos están en la parábola y que además es perpendicular al eje de simetría. El foco es punto medio de la cuerda focal.*

Consideremos una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje y. Esto quiere decir que la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Si su vértice es $V = (h, k)$, entonces el foco tiene la forma $F = (h, k + p)$:





Según la posición del foco, tenemos que

- la parábola abre hacia arriba, si y sólo si, $p > 0$.
- si la parábola abre hacia abajo, si y sólo si, $p < 0$.
- como el vértice es un punto de la parábola, entonces la distancia entre vértice y foco, y la distancia entre vértice y directriz son iguales, y su valor es $|p|$.
- la ecuación de la directriz es $y = k - p$.

Si (x, y) es un punto arbitrario de una parábola de este tipo, entonces su distancia al foco es igual a su distancia a la directriz, de donde obtenemos la igualdad

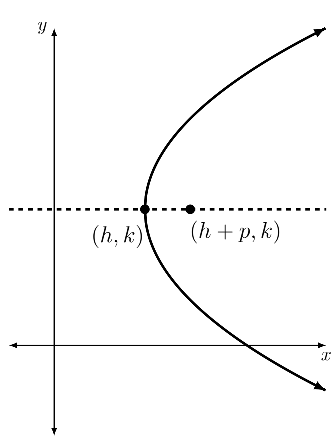
$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = |y-(k-p)|. \tag{6.7.1}$$

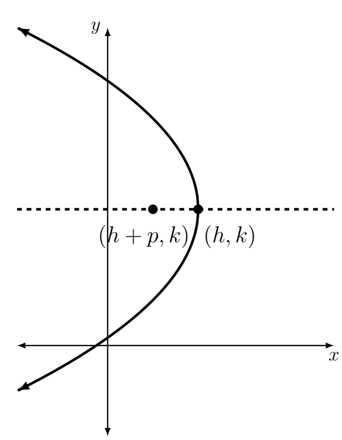
Si en la expresión (**??**) elevamos al cuadrado, desarrollamos los cuadrados del binomio, y cancelamos los términos semejantes, llegamos a la ecuación

$$(x-h)^2 = 4p(y-k),$$

la cual es llamada **ecuación canónica de la parábola** de vértice (h, k) y foco $(h, k+p)$.

Consideremos ahora una parábola que posee eje de simetría paralelo al eje x. En este caso, la parábola puede abrir hacia la derecha o hacia la izquierda. Como el vértice es $V = (h, k)$, entonces el foco tiene la forma $F = (h + p, k)$:





Note que:

- la parábola abre hacia la derecha, si y sólo si, $p > 0$.
- si la parábola abre hacia la izquierda, si y sólo si, $p < 0$.
- como el vértice es un punto de la parábola, entonces la distancia entre vértice y foco, y la distancia entre vértice y directriz son iguales, y su valor es $|p|$.
- la ecuación de la directriz es $x = h - p$.

En este caso, la **ecuación canónica de la parábola** de vértice (h, k) y foco $(h+p, k)$ es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

Observación 6.7.1. La longitud L de la cuerda focal, en cualquiera de los 4 casos vistos es

$$L = 4|p|.$$

En resumen, tenemos la siguiente definición:

Definición 6.7.2. *La ecuación*

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

se denomina ***ecuación canónica*** *de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje x, cuyo vértice es $V = (h, k)$ y cuyo foco supone un desplazamiento de p unidades a partir del vértice. En este caso:*

- $p > 0$, *si y sólo si, la parábola abre hacia arriba.*
- $p < 0$, *si y sólo si, la parábola abre hacia abajo.*

Por otro lado, la ecuación

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

se denomina ***ecuación canónica*** *de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje y, cuyo vértice es $V = (h, k)$ y cuyo foco supone un desplazamiento de p unidades a partir del vértice. En este caso:*

- $p > 0$, *si y sólo si, la parábola abre hacia la derecha.*
- $p < 0$, *si y sólo si, la parábola abre hacia la izquierda.*

Observación 6.7.2. Notemos que, si el vértice la parábola es el origen, las dos formas vistas de la ecuación de la parábola se reducen a

$$x^2 = 4py$$

y a

$$y^2 = 4px.$$

Ejercicio 6.7.1. *Grafique la parábola cuya ecuación es*

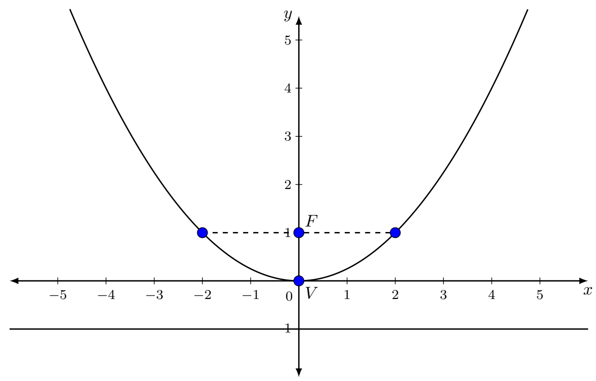
$$y = \frac{1}{4}x^2,$$

con sus principales elementos.

Solución. La ecuación dada es equivalente a

$$x^2 = 4 \cdot 1 \cdot y,$$

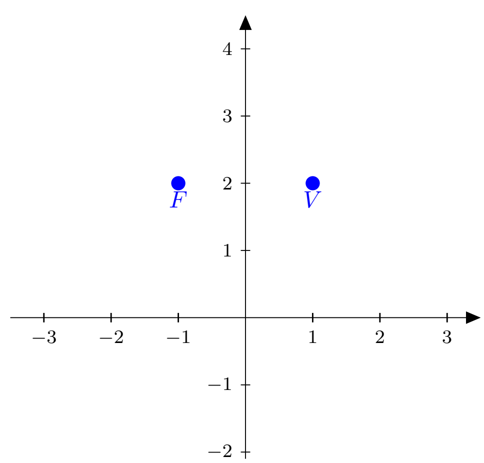
por lo que su vértice es $(0, 0)$. Como el término en x aparece al cuadrado, entonces esta parábola puede abrir hacia arriba o hacia abajo. Como $p = 1 > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba, con foco $F = (0, 1)$ (1 unidad arriba del vértice), y directriz $y = -1$ (1 unidad hacia abajo del vértice). La cuerda focal mide $L = 4$ unidades, por lo que para graficarla contamos dos unidades a la derecha y dos unidades a la izquierda del foco. De este modo, el gráfico pedido es



□

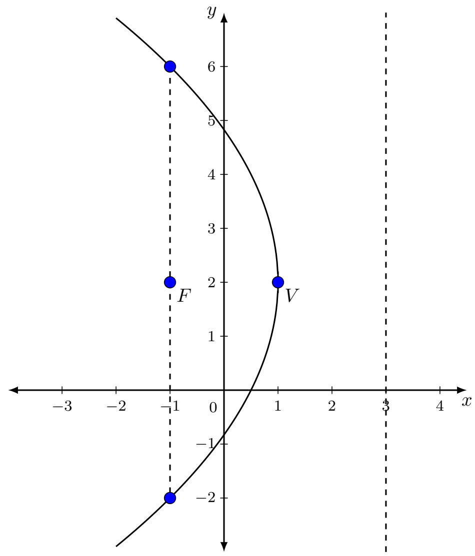
Ejercicio 6.7.2. *Considere la parábola de vértice* $(1,2)$ *y foco en* $(-1,2)$. *Obtenga su ecuación y además grafíquela junto con sus principales elementos.*

Solución. Es útil poder graficar los elementos ya conocidos de la parábola, en este caso vértice y el foco, para de este modo, obtener con mayor facilidad el resto de sus elementos:



Como el foco está a la izquierda del vértice, entonces la parábola abre hacia la izquierda (en cualquier caso, el foco siempre está por “dentro” de la abertura de la parábola). Como la distancia entre estos puntos es de 2 unidades, entonces $p = -2$. Como el vértice está a la misma distancia del foco que de la directriz, entonces la directriz es $D : x = 3$.

Además, $L = 8$, por lo que para graficar la cuerda focal contamos 4 unidades hacia arriba y 4 unidades hacia abajo a partir del foco. De este modo, el gráfico de la parábola es



Finalmente, su ecuación es

$$(y-2)^2 = -8(x-1). \tag{6.7.2}$$

$\square$

Observación 6.7.3. Consideremos la ecuación (**??**) de la parábola del ejemplo anterior. Si desarrollamos los parentésis, y despejamos 0, obtenemos la ecuación

$$y^2 - 4y + 8x - 4 = 0,$$

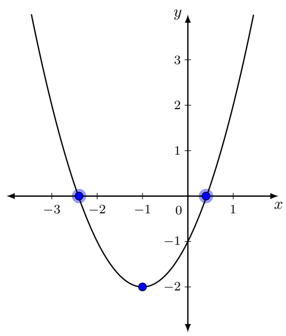
la cual recibe el nombre de **ecuación general de la parábola** en cuestión.

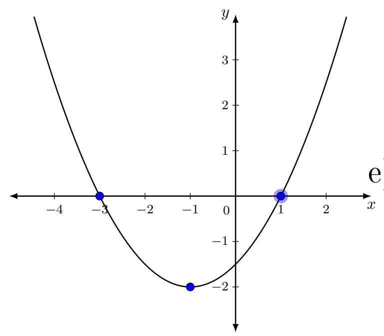
En general, a partir de la ecuación canónica de la parábola, podemos obtener una expresión de la forma

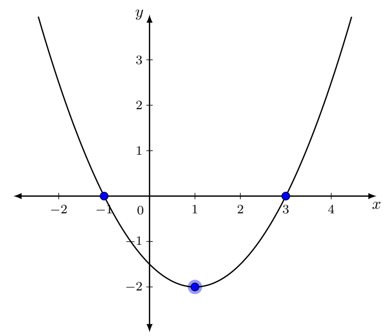
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

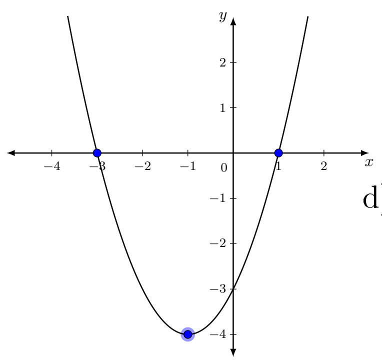
con A o B siendo 0, pero no ambos a la vez (esto quiere decir que en la ecuación siempre aparece sólo una variable al cuadrado, x o y, y no ambas.). Esta ecuación es llamada **ecuación general** de la parábola.

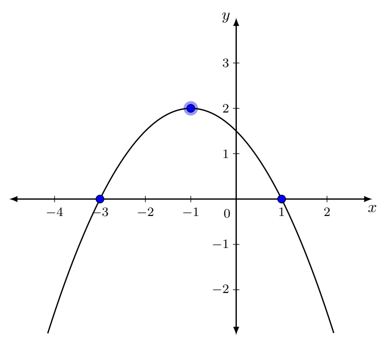
Ejercicio 6.7.3. *¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al de la parábola* $2y = x^2 + 2x - 3$*?*

a)


c)


e)


b)


d)


Solución. Note que como sólo x aparece al cuadrado, entonces la ecuación corresponde a la de una parábola. Para obtener su vértice, debemos obtener su ecuación canónica, la cual tiene la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k). \tag{6.7.3}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} 2y = x^2 + 2x - 3 &\Leftrightarrow x^2 + 2x = 2y + 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2y + 4 \text{ (completando cuadrado)} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2(y+2) \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2(y+2). \end{aligned}$$

En la última expresión, el número que aparece justo afuera del paréntesis de y es 2. Según la ecuación (**??**), este valor debe corresponder a $4p$. De este modo, de $4p = 2$

deducimos que $p = \frac{1}{2}$. Así, la ecuación canónica de nuestra parábola es

$$(x+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(y+2).$$

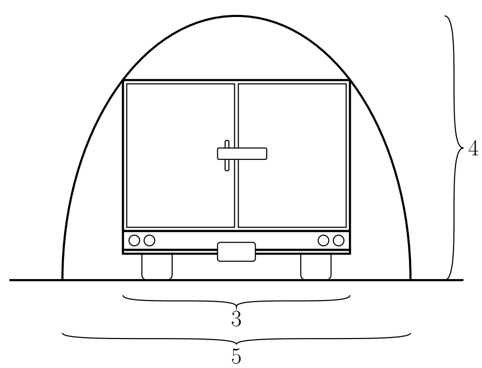
Por lo tanto, su vértice es $V = (-1, -2)$ y como $p = \frac{1}{2} > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba.

Por otro lado, determinemos su intersección con el eje x. Para ello resolvemos el sistema

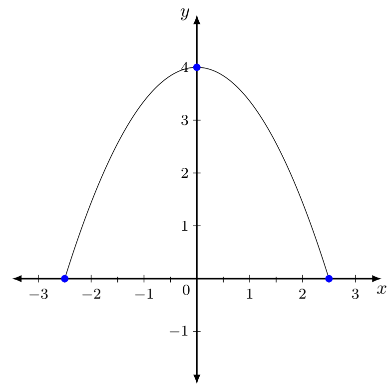
$$2y = x^2 + 2x - 3, \ y = 0,$$

de donde obtenemos que la parábola intersecta al eje x en los puntos $(-3, 0)$ y $(1, 0)$. La alternativa correcta es b). $\square$

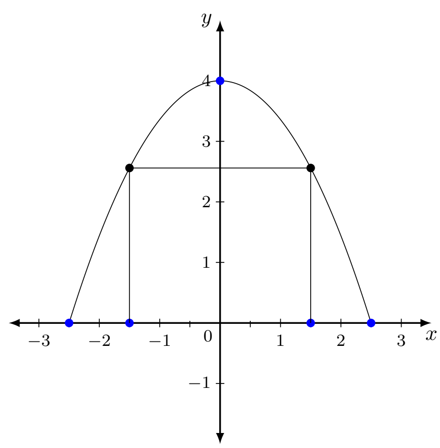
Ejercicio 6.7.4. *Un túnel de una carretera tiene forma de un arco parábolico, que tiene 5 metros de ancho y 4 metros de altura. ¿Cuál es la altura máxima que puede tener un vehículo de 3 metros de ancho, para poder pasar por el túnel?*



Solución. Graficamos el arco parábolico en el plano cartesiano, abriendo hacia abajo. Como tiene 4 metros de altura, entonces consideramos su vértice en $(0, 4)$. Como tiene 5 metros de ancho, entonces suponemos que este arco intersecta al eje x en $(-2.5, 0)$ y $(2.5, 0)$. Su gráfico es



Como el vehículo mide 3 metros de ancho, entonces ubicamos sus extremos en $(-1{,}5;0)$ y en $(1{,}5;0)$. Como la parábola es simétrica con respecto al eje x, la altura máxima del camión corresponde al valor y obtenido al reemplazar $x = 1{,}5$ en la ecuación de la parábola.



Es decir, debemos en primer lugar obtener tal ecuación. Dado el vértice, su ecuación tiene la forma

$$x^2 = 4p(y-4). \tag{6.7.4}$$

Por otro lado, si reemplazamos $x = 2{,}5 = \frac{5}{2}, y = 0$ en (**??**), obtenemos que $p = -\frac{25}{64}$. De este modo, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = -\frac{25}{16}(y-4). \tag{6.7.5}$$

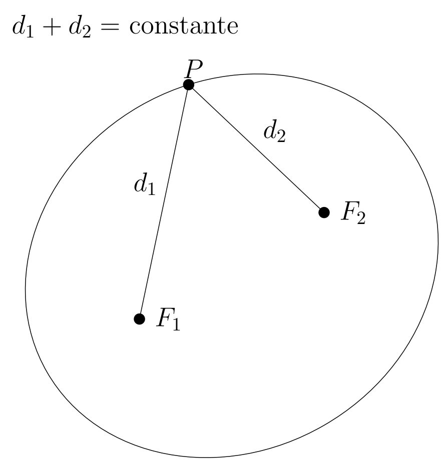
Así, reemplazando $x = 1{,}5 = \frac{3}{2}$ en (**??**), obtenemos que

$$y = \frac{64}{25} = 2\frac{14}{25} = 2\frac{56}{100}.$$

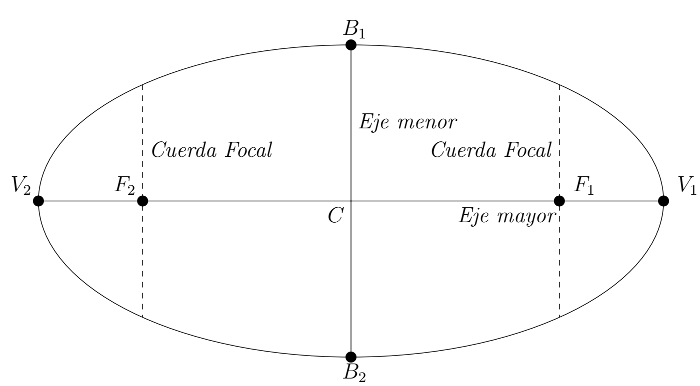
Por lo tanto, el vehículo debe medir, en rigor, menos de 2 metros y 56 cms de altura.
□

6.8. La Elipse.

Definición 6.8.1. *Se llama **elipse** al conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos reciben el nombre de **focos**.*



En una elipse distinguimos además:

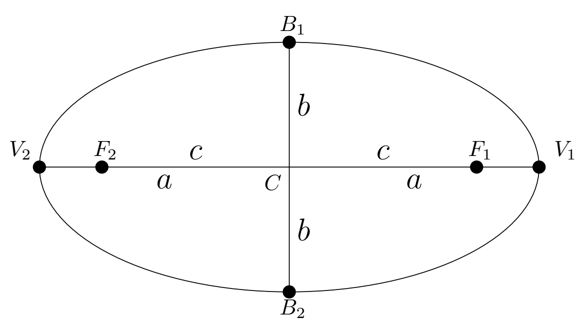


- **Centro:** Punto medio del segmento que une a los focos. Es denotado por C.

- **Vértices:** Puntos de intersección de la elipse con la recta que contiene a los focos. Son denotados por V_1 y V_2.
- **Eje mayor:** Segmento cuyos extremos son los vértices de la elipse.
- **Eje menor:** Segmento perpendicular al eje mayor en el centro de la elipse, cuyos extremos B_1 y B_2 están en la elipse.
- **Cuerdas focales:** Segmentos perpendiculares al eje mayor y que pasan por los focos. Sus extremos están en la elipse. Cada foco es punto medio de la cuerda focal respectiva.

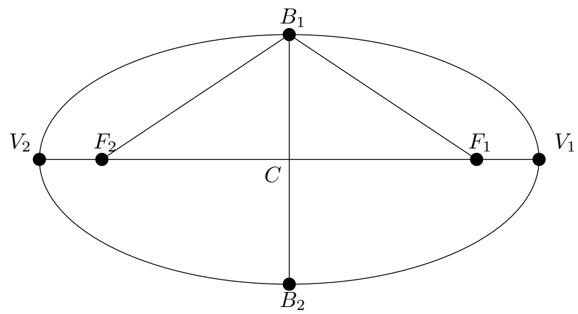
Además, denotamos por:

- c a la distancia del centro C a cada uno de los focos F_1 y F_2.
- $2a$ a la constante que corresponde suma de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la elipse, a los focos F_1 y F_2. Más aún, a corresponde a la distancia del centro C a cada uno de los vértices V_1 y V_2.
- b la distancia del centro C a cada uno de los extremos del eje menor B_1 y B_2.



Observación 6.8.1. La longitud de cada cuerda focal corresponde a $L = \dfrac{2b^2}{a}$.

Ejercicio 6.8.1. *Considere la elipse*



a) *¿Qué podemos afirmar acerca de la distancia desde B_1 a cada uno de los focos?*

Solución. Como $\triangle B_1CF_1$ y $\triangle B_1CF_2$ son congruentes, entonces $B_1F_1 = B_1F_2$, es decir, la distancia desde B_1 a cada uno de los focos es la misma.

b) *La suma de las distancias desde un punto fijo de la elipse a cada uno de los focos es $2a$. ¿Cuanto mide entonces $\overline{B_1F_1}$ y $\overline{B_2F_2}$?*

Solución. Como $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2}$, y ambas distancias suman $2a$, entonces

$$\overline{B_1F_1} = a = \overline{B_1F_2}.$$

c) *Considere el triángulo $\triangle B_1CF_1$ ¿Cuánto miden sus lados? ¿Qué tipo de triángulo es?*

Solución. Según lo convenido antes, $CF_1 = c$ y $B_1C = b$, y de b), tenemos que $B_1C = a$. Por otro lado, $\triangle B_1CF_1$ es un triángulo rectángulo.

d) *En base lo obtenido en c) ¿Qué relación existe entre a, b y c?*

Solución. Como $\triangle B_1CF_1$ es un triángulo rectángulo, entonces por el Teorema de Pitágoras se deduce que

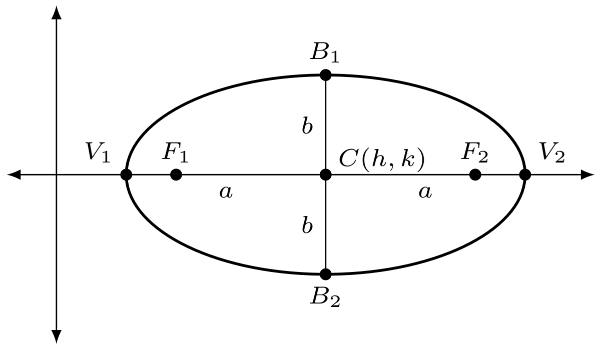
$$b^2 + c^2 = a^2. \tag{6.8.1}$$

□

Proposición 6.8.2. *En una elipse cualquiera, se cumple que*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Consideremos una elipse cuyo eje mayor es paralelo al eje x



Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario de esta elipse, entonces por definición de elipse

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \tag{6.8.2}$$

Como los focos son $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$, entonces de (**??**), obtenemos que

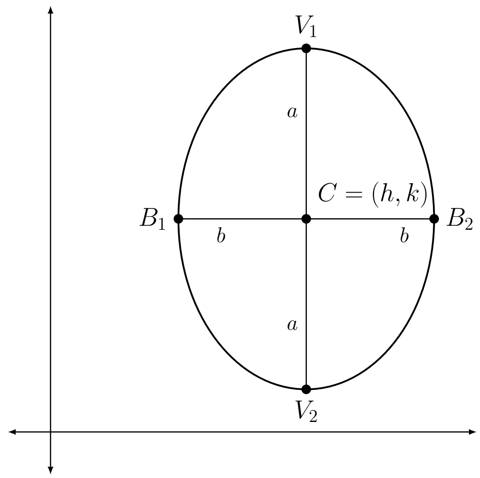
$$\sqrt{(x-(h-c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-(h+c)^2+(y-k)^2}=2a. \tag{6.8.3}$$

Manipulando algebraicamente (**??**), obtenemos la expresión

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

con $a > b$, la cual se denomina **ecuación canónica de la elipse** de centro (h, k), eje mayor paralelo al eje x de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$.

Análogamente, si la elipse tiene eje mayor paralelo al eje y



entonces su **ecuación canónica** es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

con $a > b$.

Definición 6.8.3. *La ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

se denomina ***ecuación canónica de la elipse*** *de centro (h, k), eje mayor paralelo al eje x de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$.*

Por otro lado,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

se denomina ***ecuación canónica de la elipse*** *de centro (h, k), eje mayor paralelo al eje y de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$.*

Observación 6.8.2. Si el centro de la elipse es el origen, las dos formas vistas de la ecuación de la elipse se reducen a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y

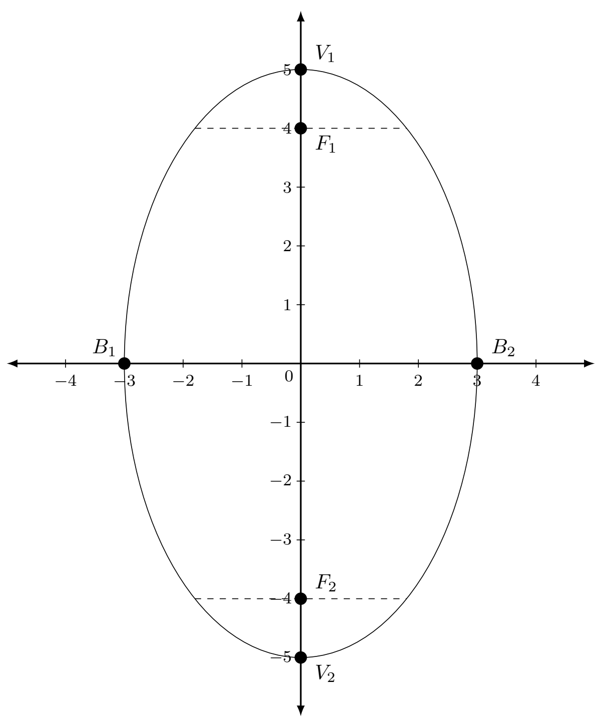
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Ejercicio 6.8.2. *Grafique la elipse de ecuación*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

con sus principales elementos.

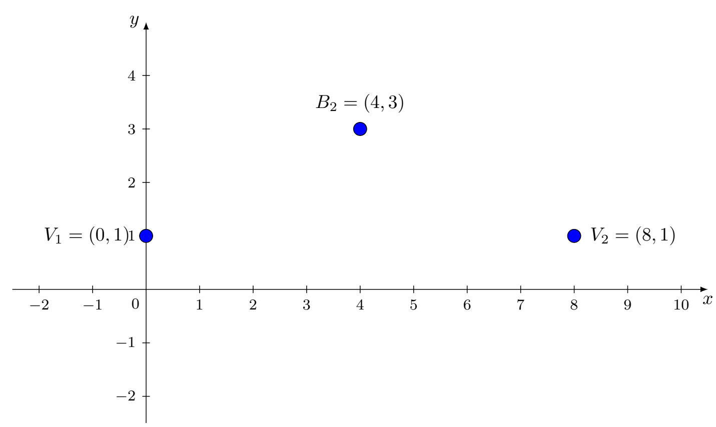
Solución. Su centro es $C = (0, 0)$. Como el término en y tiene mayor denominador que el término en x, entonces el eje mayor está contenido en el eje y, con $a = 5$. Esto quiere decir que los vértices son $V_1 = (0, 5)$ y $V_2 = (0, -5)$ (usted puede ir graficando los elementos que se van obteniendo). Por otro lado, $b = 3$, por lo que los extremos del eje menor son $B_1 = (-3, 0)$ y $B_2 = (3, 0)$. Además, usando la proposición 6.8.2, se tiene que $c = 4$, por lo que los focos son $F_1 = (0, 4)$ y $F_2 = (0, -4)$. Finalmente, la longitud de la cuerda focal es $L = \frac{18}{5} = 3{,}6$, por lo que en el gráfico contamos, a partir del foco, 1,8 unidades hacia la derecha y hacia la izquierda. Su gráfico es



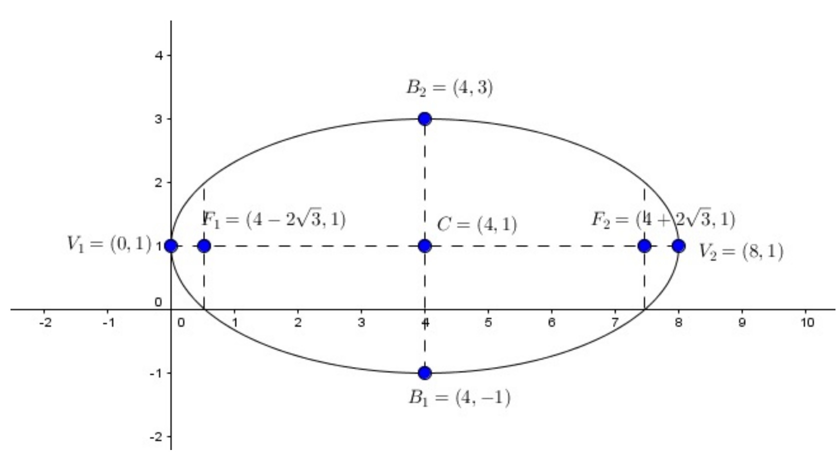
□

Ejercicio 6.8.3. *Considere la elipse con vértices en* $(0,1)$ *y* $(8,1)$ *y un extremo del eje menor en* $(4,3)$*. Encuentre su ecuación y grafíquela con sus principales elementos.*

Solución. Tal como en la parábola, nuevamente es útil graficar los elementos dados, esto nos permitirá obtener de forma más sencilla los elementos restantes de la elipse, y en consecuencia su gráfico.



En base al gráfico, se aprecia que el eje mayor es paralelo al eje x, que el centro es $C = (4,1)$, y $a = 4$. Por otro lado, $B_2 = (4,-1)$ y $b = 2$. De este modo $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3}$, por lo que los focos son $F_1 = (4 - 2\sqrt{3}, 1) \approx (0{,}5; 1)$ y $F_2 = (4 + 2\sqrt{3}, 1) \approx (7{,}5; 1)$ (use calculadora) y las cuerdas focales miden $L = 2$. Por lo tanto, el gráfico es



(donde la posición de los focos se puede obtener de forma aproximada). Así, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-4)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1. \tag{6.8.4}$$

□

Observación 6.8.3. Consideremos la ecuación (**??**) de la elipse del ejemplo anterior. Eliminando las fracciones, desarrollando los cuadrados del binomio, y despejando 0, obtenemos la ecuación

$$x^2 + 4y^2 - 8x - 8y + 4 = 0,$$

la cual recibe el nombre de **ecuación general de la elipse** en cuestión.

En general, a partir de la ecuación canónica de la elipse, podemos obtener una expresión de la forma

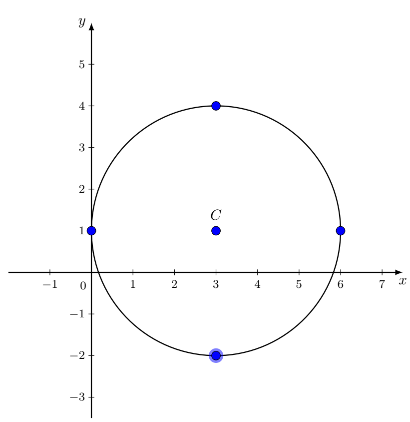
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

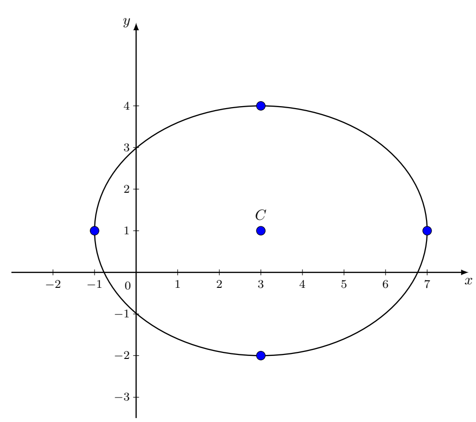
con A y B no nulos, del mismo signo y $A \neq B$, la cual llamamos **ecuación general** de la elipse.

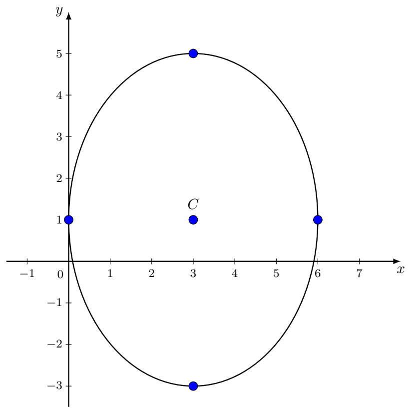
Ejercicio 6.8.4. *Considere la ecuación*

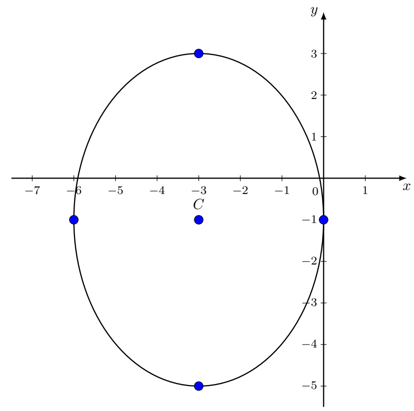
$$16x^2 + 9y^2 - 96x - 18y + 9 = 0.$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a su gráfico?

a) 

b) 

c) 

d) 

Solución. Note que en la ecuación dada, existe un término en x^2, como así otro en y^2, los cuales tienen coeficientes distintos, pero ambos positivos. Así, la ecuación corresponde a una elipse. Queremos determinar sus principales elementos. Para tal efecto, debemos obtener su ecuación canónica, la cual tiene la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

o

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

Note que

$$16x^2+9y^2-96x-18y+9=0 \Leftrightarrow 16(x^2-6x)+9(y^2-2y)=-9$$

Completando cuadrado dentro de cada paréntesis, obtenemos

$$16(x^2-6x+9)+9(y^2-2y+1)=-9+16\cdot 9+9.$$

O sea,

$$16(x-3)^2+9(y-1)^2=144.$$

Dividiendo por 144, logramos la ecuación canónica de la elipse

$$\frac{(x-3)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{4^2}=1.$$

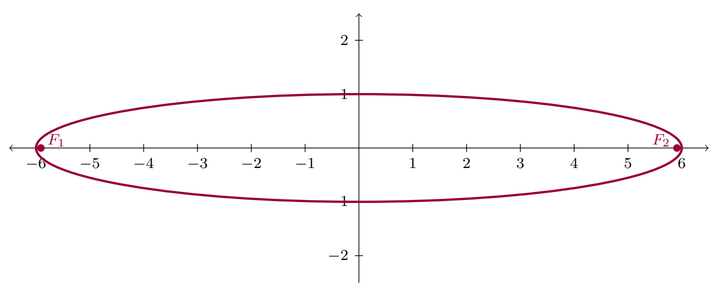
Así, su centro es $C=(3,1)$. Como el término en y tiene mayor denominador que el término en x, entonces el eje mayor es paralelo al eje y, con $a=4$ y $b=3$. De este modo, contamos 4 unidades hacia arriba y hacia abajo del centro, obteniendo que $V_1 = (3, 5), V_2 = (3, -3)$. Por otro lado, contamos 3 unidades hacia la izquierda y derecha del centro, obteniendo que $B_1 = (0, 1)$ y $B_2 = (6, 1)$. Por lo tanto, la alternativa correcta es c). $\square$

Definición 6.8.4. *La **excentricidad** de una elipse, la cual es denotada por e, se define como*

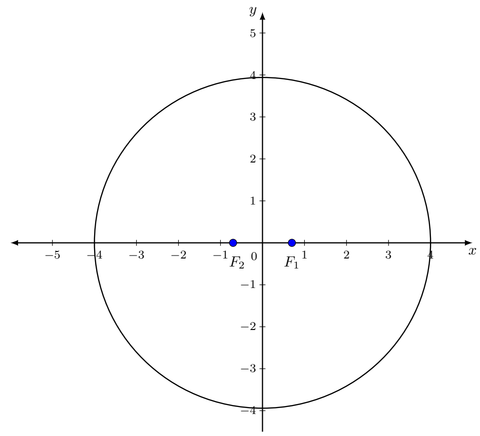
$$e = \frac{c}{a}.$$

Observación 6.8.4. Note que, en una elipse cualquiera:

- tanto c como a son positivos, de este modo $e > 0$.
- los focos están siempre más cerca del centro que los vértices, esto quiere decir que $c < a$, o sea $e = \frac{c}{a} < 1$. De este modo, $0 < e < 1$.
- si e tiene un valor muy cercano a 1, entonces esto quiere decir que c está muy cercano a a. O sea, los focos y los vértices están muy cercanos entre sí. Además, como $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, entonces en este caso, b tiende a ser 0. Gráficamente, vemos que en estas circunstancias, la elipse es muy achatada:

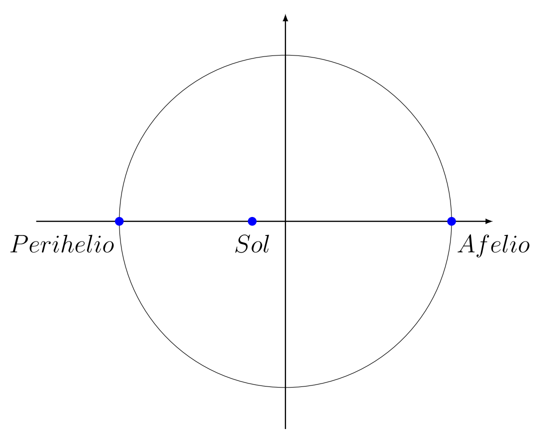


- si e tiene un valor muy cercano a 0, esto quiere decir que c es muy cercano a 0, mucho más que a. De este modo, los focos están muy cerca del centro, y lejos de los vértices. Además, como $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, entonces en este caso, los valores b y a son casi iguales, por lo que el eje mayor y el eje menor tienden a tener igual longitud. Graficamente vemos que la elipse es muy poco achatada, es decir, se parece a una circunferencia:



Veamos una aplicación de la elipse:

Ejercicio 6.8.5. *La tierra gira alrededor del Sol, describiendo una órbita elíptica, de la cual el Sol es uno de sus focos. Durante el recorrido de la Tierra alrededor del Sol, el punto más lejano entre ellas se llama Afelio y el punto más cercano entre ellas se llama Perihelio. El Afelio y el Perihelio corresponden a los vértices de la órbita elíptica, tal como muestra el dibujo:*



Tengamos en cuenta que:

- *el Afelio se encuentra aproximadamente a 152.1 millones de kms del Sol.*
- *el Perihelio se encuentra aproximadamente a 147.1 millones de kms del Sol.*
- *la excentricidad de la órbita es de* 0,0167.

Suponga que el eje mayor de la elipse se encuentra en el eje x y el centro de la órbita en el origen. Responda cada una de las siguientes preguntas, usando calculadora.

a) *Determine la distancia desde el Sol al centro de la órbita.*

Solución. Considerando la información, el eje mayor mide

$$152{,}1 + 147{,}1 = 299{,}2 \text{ millones de } kms.$$

De este modo, $a = \frac{299}{2} = 149{,}6$ millones de kms. Por otro lado, usando el valor dado de la excentricidad, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} = 0{,}0167 &\Leftrightarrow c = 0{,}0167a \\ &\Leftrightarrow c = 0{,}0167 \cdot 149{,}6 \\ &\Leftrightarrow c \approx 2{,}5. \end{aligned}$$

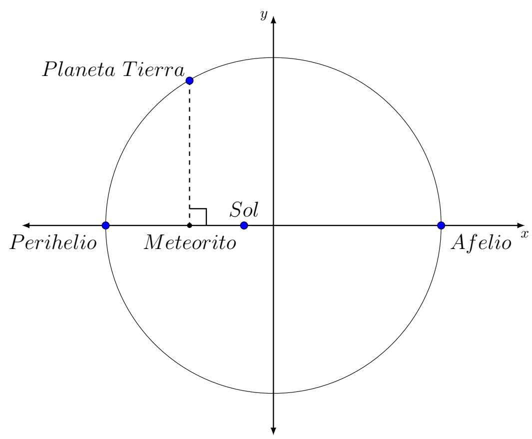
Luego, como el Sol es un foco, entonces este está a aproximadamente 2,5 millones de kms del centro de la órbita.

b) *Determine la ecuación de la órbita.*

Solución. Si $a = 149{,}6$ y $c = 2{,}5$, entonces $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 149{,}57$. De este modo, la ecuación de la órbita es

$$\frac{x^2}{149{,}6^2} + \frac{y^2}{149{,}57^2} = 1. \tag{6.8.5}$$

c) *¿A qué distancia de la Tierra se encuentra el meteorito del dibujo, si esté está a la misma distancia del Perihelio que del Sol?*



Solución. Recordemos que la distancia del Sol al Perihelio es de $147,1$ millones de kms. Como el meteorito se ubica en el punto medio del segmento que une al Perihelio y el Sol, entonces se ubica a 73,55 millones de kms del Sol. De este modo, el meteorito está a

$$73{,}55 + 2{,}5 = 76{,}05 \text{ millones de } kms$$

del centro de la órbita. Es decir, el meteorito se posiciona en el punto $(-76{,}05; 0)$. Reemplazamos $x = -76{,}05$ en la ecuación (**??**), y despejamos y, obteniendo que $y = \pm 128{,}8$. Esto quiere decir, que el meteorito está a 128.8 millones de kms de la Tierra.

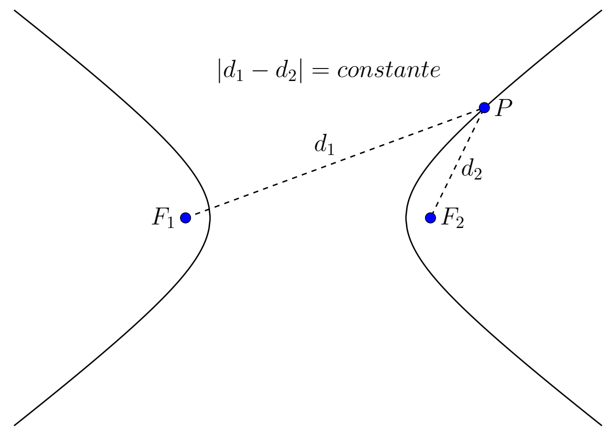
d) *¿Qué distancia recorre la tierra en 1 año, esto es, en recorrer su órbita completa? Dato: Use que el perímetro de una elipse es aproximadamente*

$$\pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right].$$

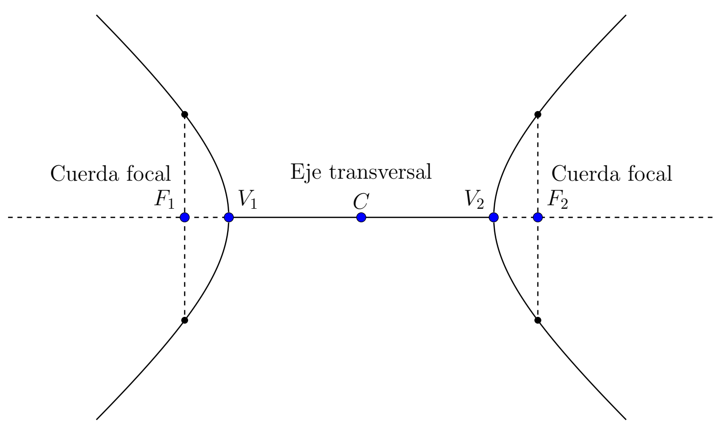
Solución. Usamos la fórmula dada, con $a = 149{,}6$ y $b = 149{,}57$. Obtenemos que la Tierra en un año recorre aproximadamente 939 millones de kms. $\square$

6.9. La Hipérbola.

Definición 6.9.1. *Se llama* ***hipérbola*** *al conjunto de todos los puntos del plano cuyo valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos reciben el nombre de* ***focos****.*

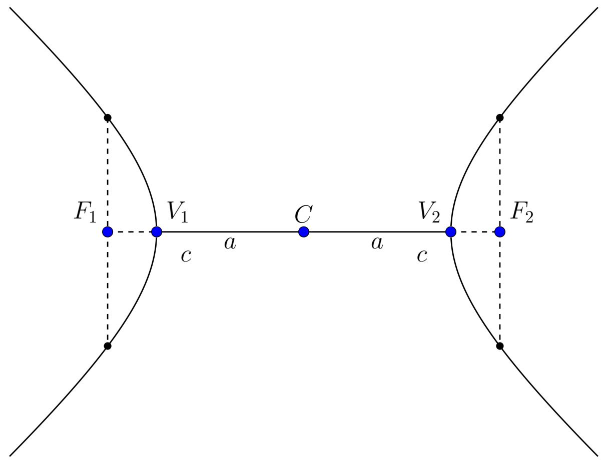


En una hipérbola distinguimos además:



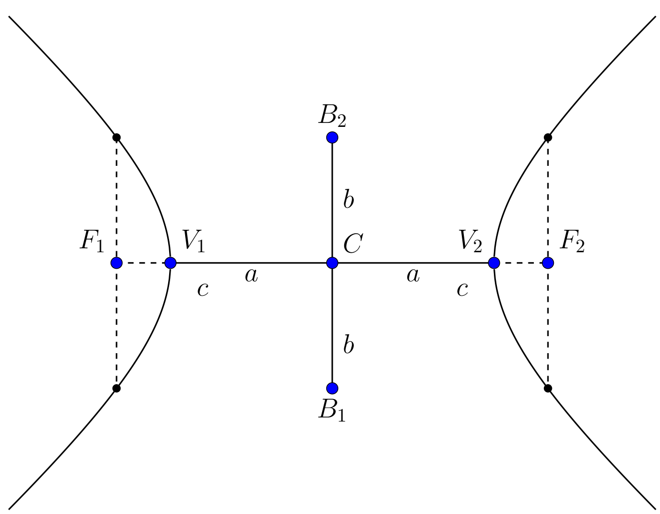
- ***Centro:*** *Punto medio del segmento que une a los focos. Es denotado por C.*
- ***Vértices:*** *Puntos de intersección de la hipérbola con el segmento que contiene a los focos. Son denotados por V_1 y V_2.*
- ***Eje transversal:*** *Segmento cuyos extremos son los vértices de la hipérbola.*
- ***Cuerdas focales:*** *Segmentos que pasan por los focos en forma perpendicular a la recta que determina el eje transversal y cuyos extremos son puntos de la hipérbola. Cada foco es punto medio de la cuerda focal respectiva.*

Denotamos por:



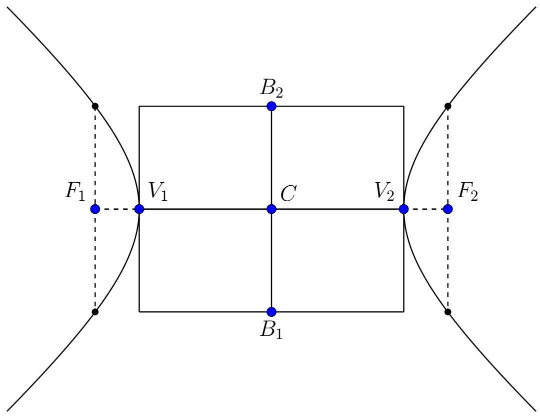
- c a la distancia del centro C a cada uno de los focos F_1 y F_2.
- $2a$ a la constante que corresponde al valor absoluto de la diferencia de las distancias desde un punto $P = (x, y)$ de la hipérbola a los focos F_1 y F_2. Más aún, a corresponde a la distancia del centro C a cada uno de los vértices V_1 y V_2.

Definición 6.9.2. *Sea $b > 0$ definido por $b^2 = c^2 - a^2$. El* ***eje conjugado*** *de la hipérbola es el segmento perpendicular al eje transversal en el centro de la hipérbola, donde el centro es su punto medio, y la distancia desde C a los extremos B_1 y B_2 del eje transversal es b.*

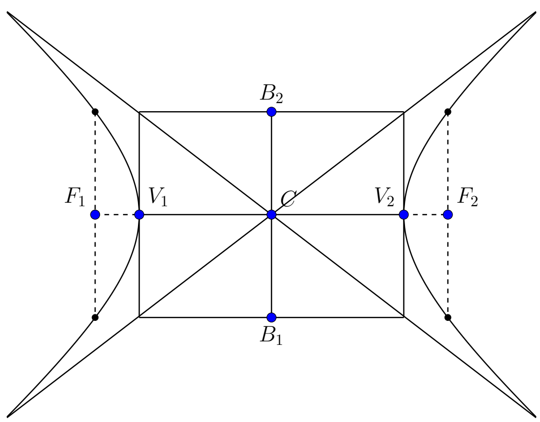


Observación 6.9.1. Por otro lado, la longitud de cada cuerda focal corresponde a $L = \dfrac{2b^2}{a}$.

Observación 6.9.2. A partir del eje transversal y del eje conjugado, podemos formar un rectángulo del siguiente modo

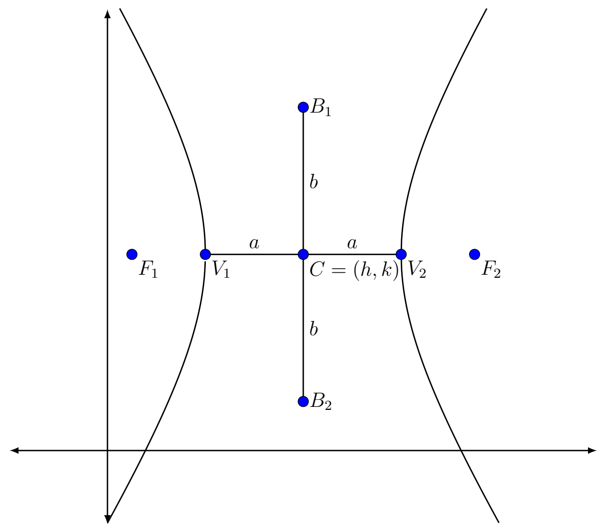


Para cada par de vértices opuestos de este rectángulo, trazamos una recta que pasa por este par de puntos, la cual también pasa por el centro de la hipérbola:



Estas rectas reciben el nombre de **asíntotas** de la hipérbola y aproximan el comportamiento de ésta.

Consideremos una hipérbola cuyo eje transversal es paralelo al eje x:



Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario de esta hipérbola, cuyos focos son denotados por F_1, F_2, entonces

$$|PF_1 - PF_2| = 2a. \tag{6.9.1}$$

De (**??**), y dado que los focos tienen coordenadas $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$, obtenemos la expresión

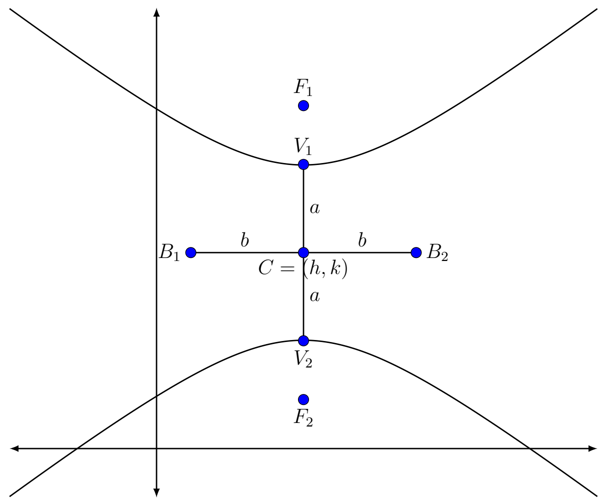
$$\left| \sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} \right| = 2a,$$

la cual es equivalente a la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

Esta última expresión se denomina **ecuación canónica de la hipérbola** de centro (h, k), eje transversal paralelo al eje x de longitud $2a$ y eje conjugado de longitud $2b$.

Análogamente, si la hipérbola tiene eje transversal paralelo al eje y:



entonces su **ecuación canónica** es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Definición 6.9.3. *La ecuación*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

se denomina ***ecuación canónica de la hipérbola*** *de centro (h, k), eje transversal paralelo al eje x de longitud $2a$ y eje conjugado de longitud $2b$.*

Por otro lado, la expresión

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

se denomina **ecuación canónica de la hipérbola** de centro (h, k), eje transversal paralelo al eje y de longitud $2a$ y eje conjugado de longitud $2b$.

Observación 6.9.3. Notemos que, si el centro de la hipérbola es el origen, las dos formas vistas de la ecuación de la hipérbola se reducen a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y a

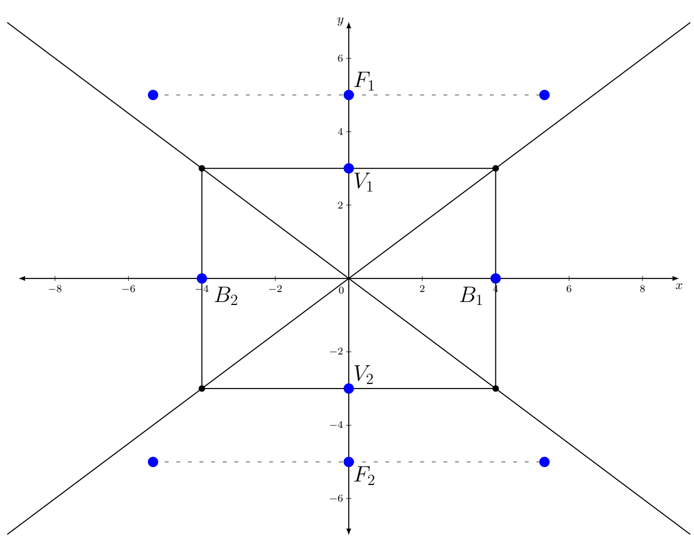
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Ejercicio 6.9.1. *Grafique la hipérbola de ecuación*

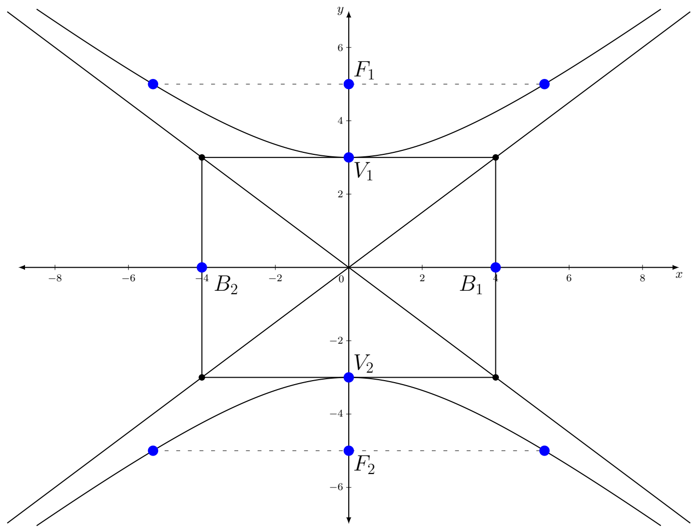
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1,$$

con sus principales elementos.

Solución. Esta hipérbola tiene centro en $(0,0)$. Según las formas de la ecuación de la hipérbola, como el término positivo corresponde al que contiene a y, entonces la hipérbola tiene eje transversal contenido en el eje y, con $a = 3$. De este modo, los vértices son $V_1 = (0,-3)$ y $V_2 = (0,3)$ (vaya graficando en la medida que va leyendo). Por otro lado, del término en x se deduce que $b = 4$, por lo que los extremos del eje conjugado, el cual está contenido en el eje x, son $B_1 = (-4,0)$ y $B_2 = (4,0)$. Así, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$, por lo que los focos, los cuales están alineados con los vértices, son $F_1 = (0,-5)$ y $F_2 = (0,5)$. Finalmente, las cuerdas focales miden $L = 2 \cdot \frac{4^2}{3} \approx 10{,}6$, por lo que para graficarlas, a partir de cada foco, contamos 5,3 unidades a la izquierda y a la derecha. Graficamos todos los elementos obtenidos, más el rectángulo que nos permite graficar las asíntotas y las asíntotas:



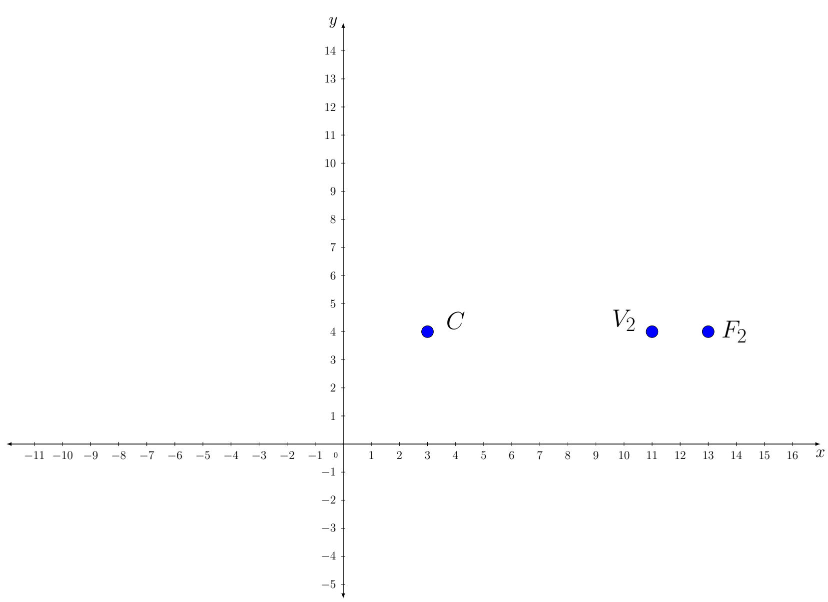
De este modo, graficamos la hipérbola, considerando que cada rama parte desde un vértice y pasa por los extremos de la cuerda focal respectiva, y además su comportamiento es aproximado por las asíntotas. El gráfico es



$\square$

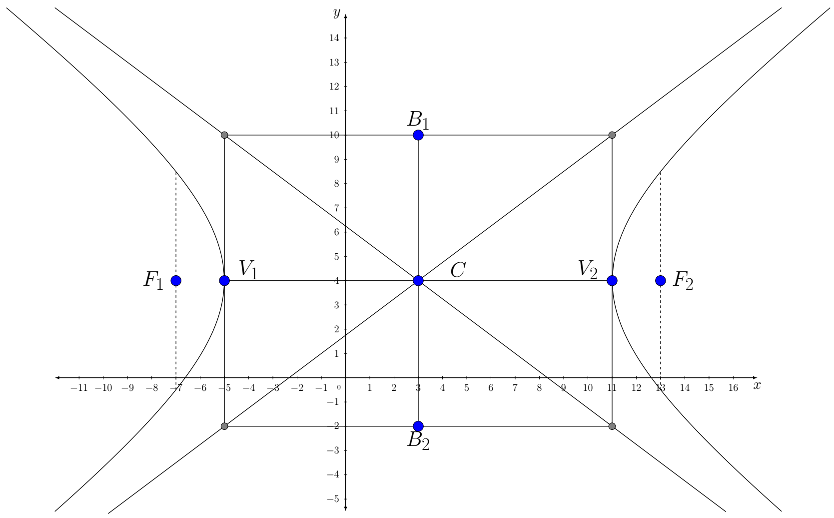
Ejercicio 6.9.2. *Considere la hipérbola con centro en* $(3, 4)$*, un vértice en* $(11, 4)$ *y un foco en* $(13, 4)$*. Obtenga su ecuación y grafíquela con sus principales elementos.*

Solución. Graficamos los elementos dados, para de este modo, obtener los elementos faltantes de forma más sencilla:



De este modo, apreciamos que el eje transversal es paralelo al eje x, con $V_2 = (11, 4)$ y $F_2 = (13, 4)$. También del gráfico se deduce que $a = 8, c = 10$, por lo que $V_1 = (-5, 4)$

y $F_1 = (-7, 4)$. De este modo, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 6$ y así $B_1 = (3, 10), B_2 = (3, -2)$. Las cuerdas focales miden $L = 2 \cdot \frac{6^2}{8} = 9$ unidades. Trazamos todos estos elementos, el rectángulo anteriormente mencionado y las asíntotas. Finalmente graficamos la hipérbola:



Así, su ecuación es

$$\frac{(x-3)^2}{8^2} - \frac{(y-4)^2}{6^2} = 1. \tag{6.9.2}$$

□

Observación 6.9.4. Consideremos la ecuación (**??**) del ejemplo anterior. Desarrollándola y despejando 0, obtenemos la expresión

$$36x^2 - 64y^2 - 216x + 512y - 2304 = 0,$$

la cual recibe el nombre de **ecuación general de la hipérbola** en cuestión.

En general, a partir de la ecuación canónica de la hipérbola, podemos obtener una expresión de la forma

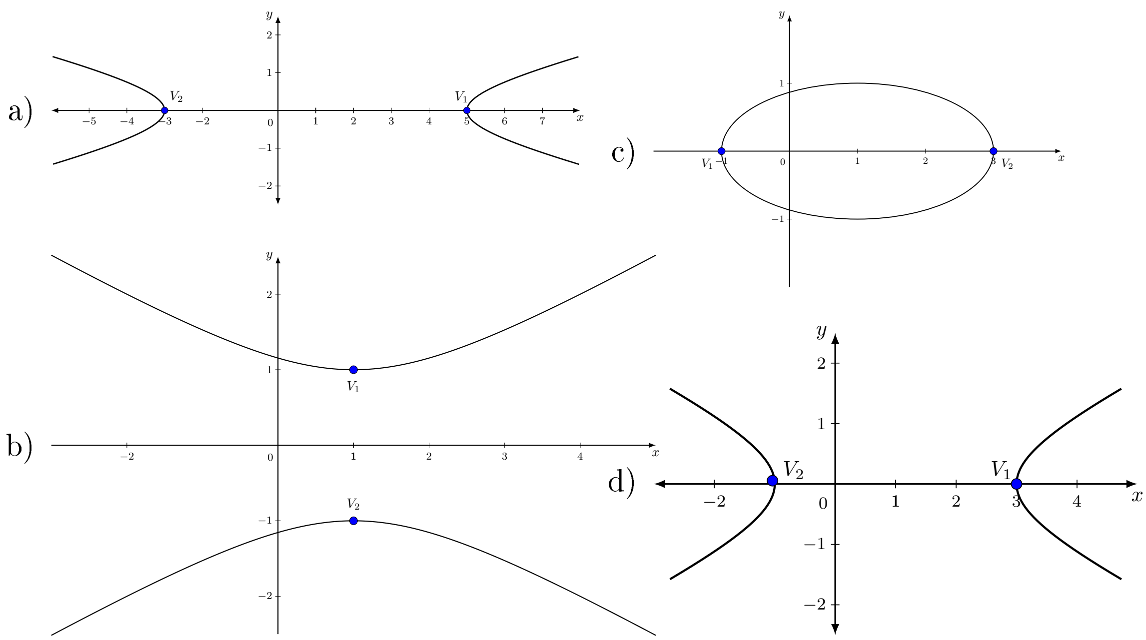
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0,$$

con A y B no nulos y de distinto signo, la cual llamamos **ecuación general** de la hipérbola.

Ejercicio 6.9.3. *Considere la ecuación*

$$4y^2 - x^2 - 2x + 3 = 0$$

¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a su gráfico?



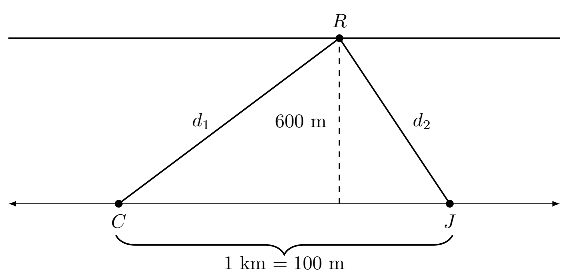
Solución. Note que la ecuación tiene un término en x^2 y otro en y^2, y sus coeficientes son de distinto signo. De este modo, la ecuación corresponde a la ecuación general de una hipérbola. Se tiene que

$$\begin{aligned}
4y^2 - x^2 - 2x + 3 = 0 &\Leftrightarrow 4y^2 - (x^2 + 2x) = -3 \\
&\Leftrightarrow 4y^2 - (x^2 + 2x + 1) = -3 - 1 \text{ (completamos cuadrado sólo en } x) \\
&\Leftrightarrow 4y^2 - (x-1)^2 = -4 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1.
\end{aligned}$$

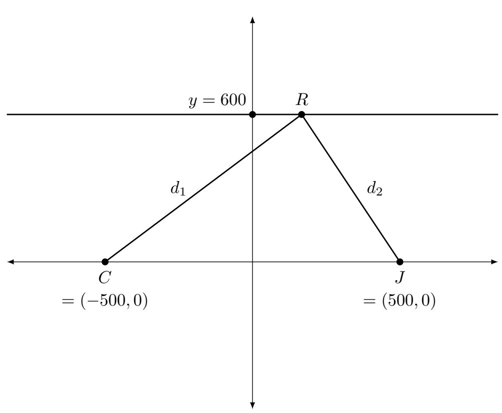
Así, la hipérbola tiene centro en $(1, 0)$. Como el término positivo es aquel que contiene a x, entonces el eje transversal es paralelo al eje x. Además, $a = 2$ y $b = 1$. De este modo, la alternativa correcta es d). □

Ejercicio 6.9.4. *Julio y Cristián caminan por la Gran avenida, separados 1 km entre sí. Julio está ubicado al este de Cristián. Julio escucha un trueno. 1 segundo después lo escucha Cristián. Si el rayo de luz cayó en una calle paralela a la Gran avenida, la cual está ubicada a 600 metros de ésta ¿A qué distancia de Julio cayó el rayo? Use calculadora.*
Dato: Considere que la rapidez del sonido es de $343\frac{m}{s}$.

Solución. La situación es



donde R, C y J denotan la posición del rayo, de Cristián y de Julio, respectivamente. Además d_1 y d_2 denotan la distancia desde R a C y desde R a J, respectivamente. Introducimos un sistema de coordenadas, de modo que J y C estén ubicadas en el eje x, y el origen sea el punto medio entre J y C. De este modo, la calle paralela donde ocurrió el rayo está ubicada en $y = 600$:



El rayo fue escuchado por Julio, 1 segundo antes que Cristián. Como el rayo recorre 343 metros en 1 segundo, entonces el rayo cayó 343 metros más cerca de Julio que de

Cristián, es decir

$$d_1 - d_2 = 343.$$

Esto quiere decir, que R forma parte de la hipérbola cuyos focos son C y J, con

$$2a = 343 \Leftrightarrow a = 171{,}5$$

(Recuerde que, para cualquier hipérbola, $2a$ corresponde a la diferencia de las distancias desde un punto de ella hacia los focos). Obtengamos la ecuación de tal hipérbola. Como $a = 171{,}5$ y $c = 500$, entonces

$$b^2 = c^2 - a^2 = 220587{,}75.$$

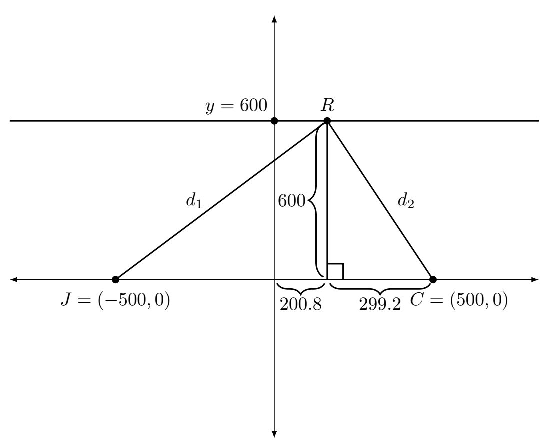
Así, la ecuación de la hipérbola, la cual tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

es

$$\frac{x^2}{171{,}5^2} - \frac{y^2}{220587{,}75} = 1. \tag{6.9.3}$$

El punto R tiene coordenadas de la forma $(x, 600)$, por lo que para obtener el valor de x, y por ende la posición del rayo, reemplazamos $y = 600$ en (**??**), obteniendo que $x = 200{,}8$. De este modo, las coordenadas del rayo son $R = (200.8, 600)$. La situación ahora es la siguiente:



Finalmente, usamos el Teorema de Pitágoras, para concluir que

$$d_2 = 670,$$

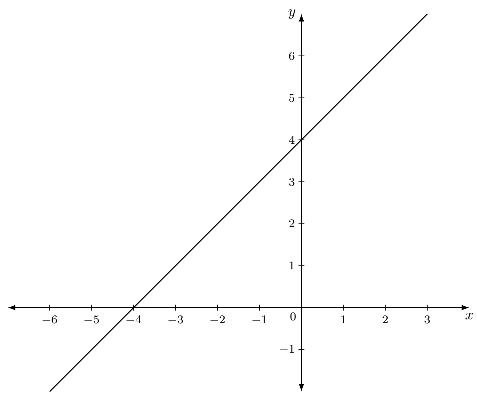
por lo que el rayo cayó a 670 metros de Julio. □

6.10. Ecuaciones de dos variables.

Consideremos la ecuación de las variables x e y, que viene dada por

$$x + y = 4.$$

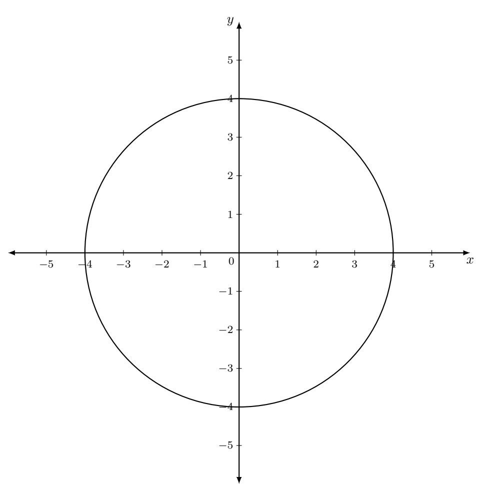
Queremos obtener todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen esta ecuación. Por simple inspección, notamos que pares ordenados como $(1, 3)$, $(3, 1)$ o $(0, 4)$ son soluciones de esta ecuación. Sin embargo, podemos ver que esta ecuación tiene infinitos pares ordenados como solución, y estas forman una recta, cuyo gráfico es:



Ejercicio 6.10.1. *Represente, en el plano cartesiano, el conjunto de todos los pares ordenados* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *que satisfacen la ecuación*

a) $x^2 + y^2 = 16$.

Solución. En este caso, los pares ordenados que son solución de esta ecuación, forman una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 4. De este modo, su gráfico es

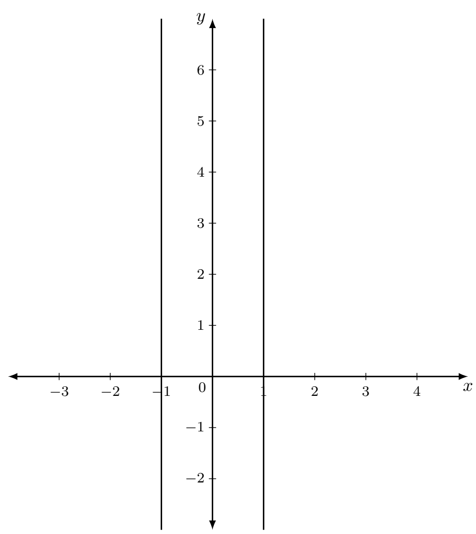


b) $|x| = 1$.

Solución. Note que si vemos esta ecuación como una ecuación de sólo la variable x, entonces sus soluciones son $x = \pm 1$. Sin embargo, si la vemos como una ecuación de x e y, aunque y esté ausente, entonces esta ecuación tiene infinitas soluciones. El conjunto solución es

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \ \vee \ x = -1\}.$$

En definitiva, nos referimos a todos los pares (x, y) tales que $x = 1$, conjunto que corresponde a una recta, unidos con los pares (x, y) tales que $x = -1$, que también corresponde a una recta. Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estas dos rectas, es decir: .

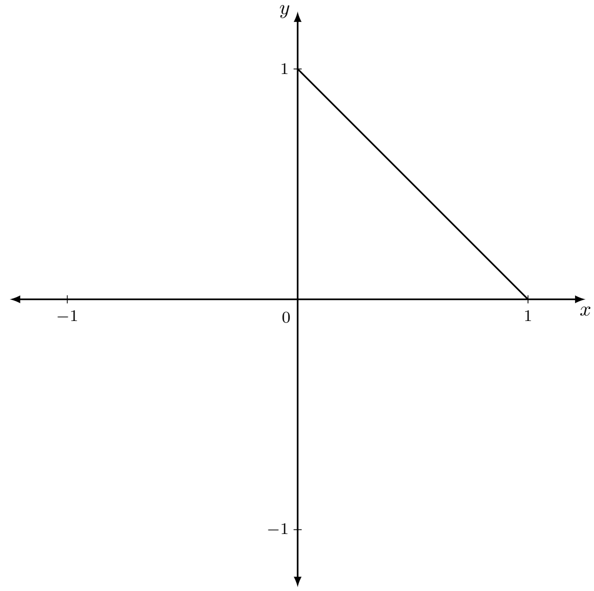


c) $|x| + |y| = 1$.

Solución. Supongamos que $x \geq 0, y \geq 0$. Es decir, que (x, y) es un punto del primer cuadrante, considerando su borde. En este caso, $|x| = x$ e $|y| = y$, por lo que la ecuación dada corresponde a

$$x + y = 1. \tag{6.10.1}$$

Es decir, una parte del conjunto solución es el "pedazo" de la recta de ecuación (**??**) que está en el primer cuadrante, considerando los bordes:



Notemos además, si (x, y) satisface la ecuación $|x| + |y| = 1$, entonces

- $(-x, y)$ también satisface la ecuación, en efecto

$$|-x| + |y| = |x| + |y| = 1,$$

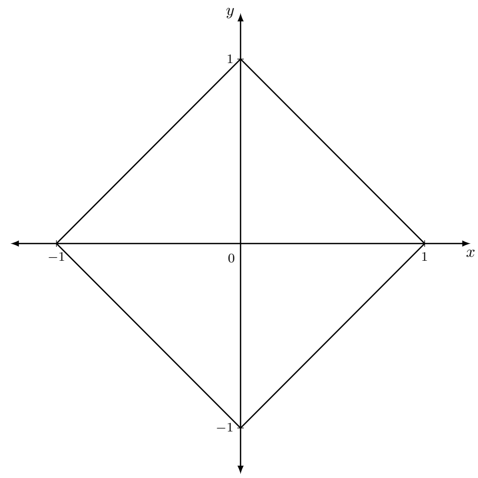
  por lo que el gráfico es simétrico con respecto al eje y.

- $(x, -y)$ también satisface la ecuación, en efecto

$$|x| + |-y| = |x| + |y| = 1,$$

  por lo que el gráfico es simétrico con respecto al eje x.

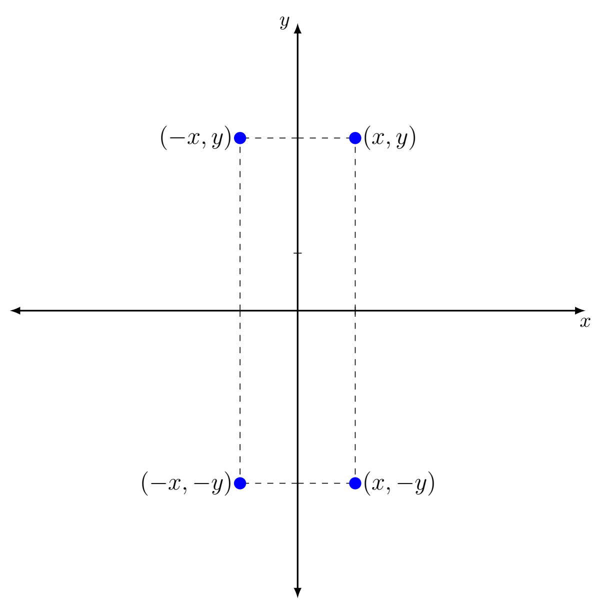
De este modo, el gráfico obtenido es



□

Observación 6.10.1. En general, si $F(x, y) = 0$ es una ecuación de dos variables, entonces

- si $(x, -y)$ satisface la ecuación, entonces el gráfico es simétrico con respecto al eje x.
- si $(-x, y)$ satisface la ecuación, entonces el gráfico es simétrico con respecto al eje y.
- si $(-x, -y)$ satisface la ecuación, entonces el gráfico es simétrico con respecto al origen.



Para concluir tenemos la siguiente definición:

Definición 6.10.1. *Sea $F(x,y)=0$ una ecuación de las variables x e y. Su conjunto solución se denomina* ***curva*** *en el plano cartesiano.*

6.11. Inecuaciones de dos variables.

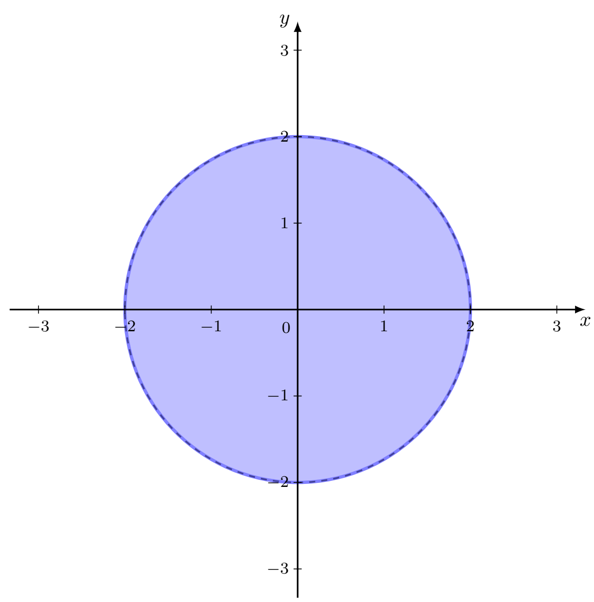
Ejemplo: Consideremos la inecuación de dos variables

$$x^2+y^2<4.$$

Note que la ecuación $x^2+y^2=4$ corresponde a la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2. Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad planteada, obtenemos equivalentemente que

$$\sqrt{x^2+y^2}<2.$$

De este modo, deducimos que nuestra inecuación tiene como conjunto solución a aquellos puntos (x,y) del plano, cuya distancia a $(0,0)$ es menor que 2. Es decir, a la región interior a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=4$:



donde la línea punteada nos indica que no se está considerando el borde (dado que la desigualdad planteada es estricta). En general, la línea punteada nos indica que no se considera a la curva delimitada por tal línea punteada.

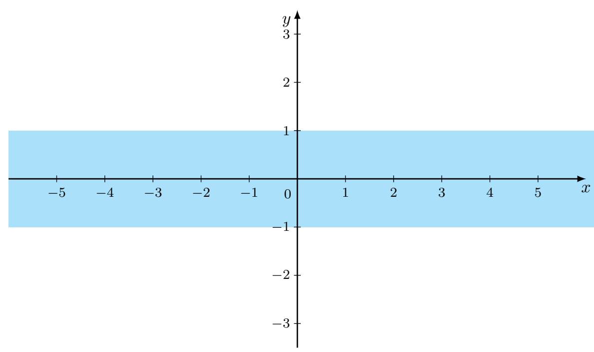
Ejercicio 6.11.1. *Represente, en el plano cartesiano, el conjunto de todos los pares ordenados* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *que satisfacen la inecuación*

a) $|y| \leq 1$.

Solución. Sea S el conjunto solución buscado. Note que

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}.$$

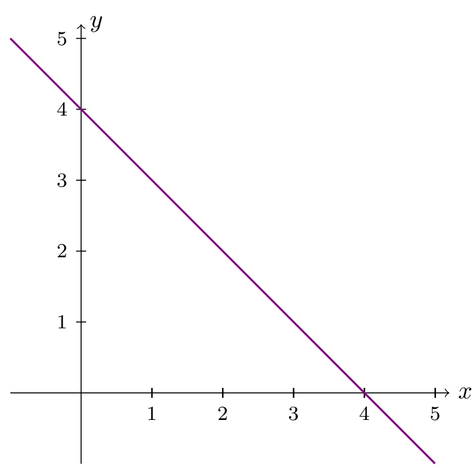
Es decir, S corresponde a la franja entre las rectas $y = -1$ e $y = 1$, incluyendo a estas:



□

b) $y + x < 4$.

Solución. La ecuación $y + x = 4$, corresponde a la recta cuyo gráfico es:



Esta recta divide al plano cartesiano en dos semiplanos; en uno se cumple que la desigualdad que nos interesa, es decir $y + x < 4$, y en el otro semiplano se cumple la desigualdad contraria, es decir $y + x > 4$. La pregunta es ahora en cuál de los dos semiplanos se cumple nuestra desigualdad. Escogemos un par ordenado que pertenezca al semiplano de la derecha, por ejemplo $(x, y) = (7, 0)$. Note que, en este caso,

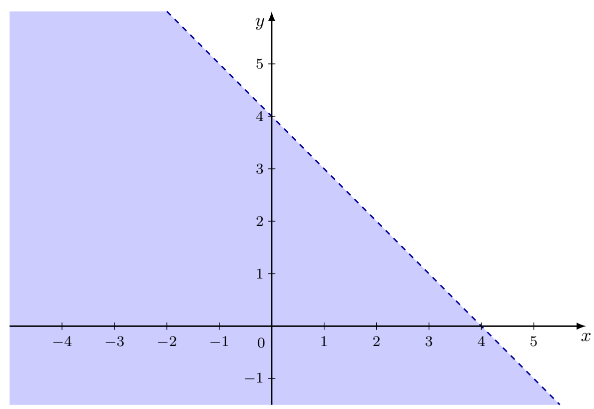
$$y + x = 0 + 7 = 7 > 4,$$

por lo que se deduce que en el semiplano de la derecha se cumple que

$$y + x > 4.$$

De este modo, nuestro conjunto solución es el semiplano de la izquierda, es decir:

.



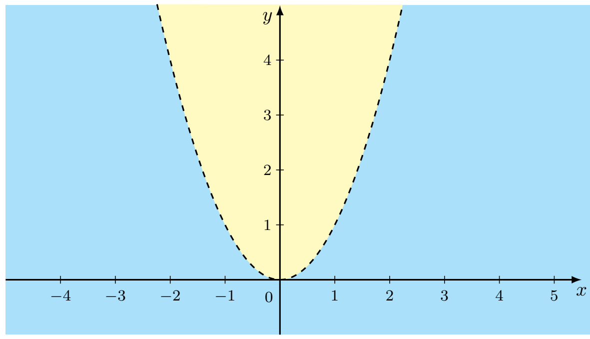
donde la línea punteada nos indica que la región no considera a tal recta, dado que la desigualdad es estricta $(y + x > 4)$. □

c) $y \leq x^2$.

Solución. Note que

$$y \leq x^2 \Leftrightarrow y < x^2 \;\vee\; y = x^2.$$

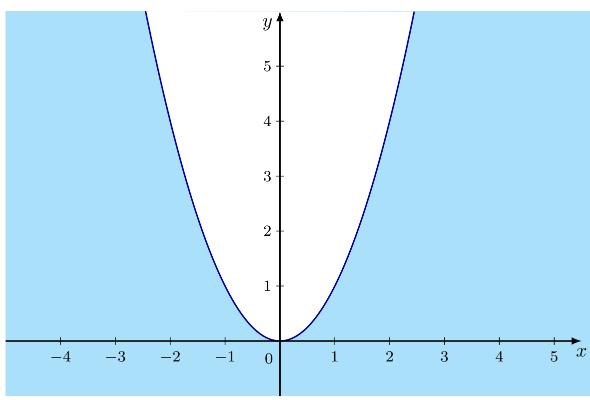
Es decir, el conjunto solución corresponde a la parábola $y = x^2$ unida con el conjunto solución de $y < x^2$. Veamos en que región se cumple que $y < x^2$. Análogamente al ejercicio anterior, la parábola $y = x^2$ divide al plano en dos regiones, las cuales coloreamos de distinta forma:



En una región se cumple que $y < x^2$, en la otra la desigualdad contraria. Para encontrar nuestro conjunto solución, escogemos $(x, y) = (3, 0)$, el cual vemos visualmente que pertenece a la región que está por "detrás" de la abertura de la parábola. Note que, en este caso

$$y = 0, x^2 = 3^2.$$

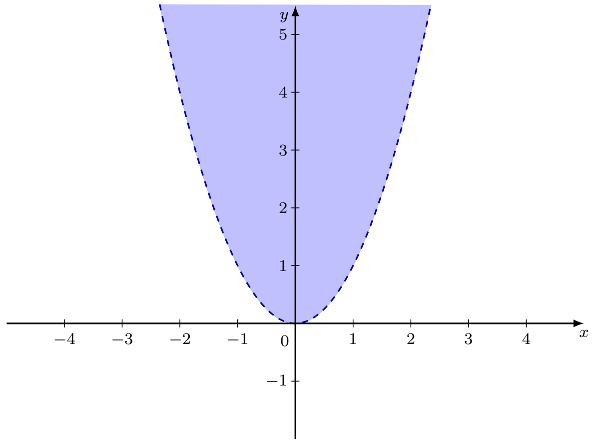
Es decir, en la región de color oscuro se cumple nuestra desigualdad $y < x^2$. De este modo, el conjunto solución tiene gráfico: □



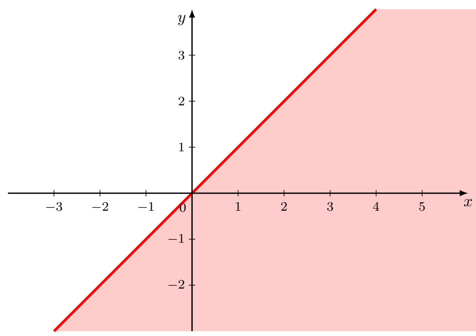
Ejercicio 6.11.2. *Represente en el plano cartesiano el conjunto de todos los pares ordenados* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *que satisfacen el sistema de inecuaciones*

$$y > x^2 \ \wedge \ y \leq x.$$

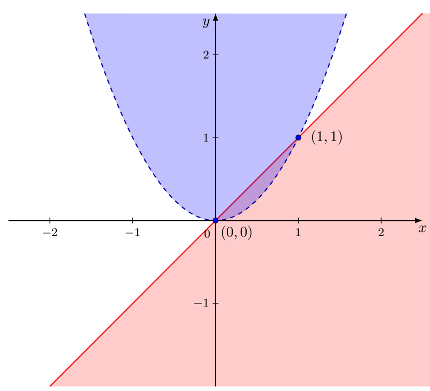
Solución. Para determinar su conjunto solución, primero determinamos el conjunto solución de cada inecuación. En efecto, el conjunto solución de $y > x^2$ es



y el conjunto solución de $y \leq x$ es



Finalmente intersectamos ambos conjunto solución, obteniendo la región más oscura



donde los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ son obtenidos a partir de intersectar las curvas $y = x^2$ e $y = x$, esto es, resolviendo el sistema de ambas ecuaciones. $\square$

Para concluir esta sección, tenemos la siguiente definición:

Definición 6.11.1. *Dada una inecuación de dos variables de algunas de las formas*

$$F(x, y) \geq 0, F(x, y) > 0, F(x, y) \leq 0, F(x, y) < 0,$$

o un sistema de inecuaciones de dos variables, su conjunto solución se denomina ***región*** *en el plano cartesiano.*

6.12. Ejercicios propuestos.

1. Si realizamos una simetría del punto

   a) $(-3, -5)$ con respecto al eje y, ¿qué punto obtenemos? ¿en qué cuadrante se encuentra?

   b) $(2, -3)$ con respecto al eje x, ¿qué punto obtenemos? ¿en qué cuadrante se encuentra?

   c) $(-1, 1)$ con respecto al origen, ¿qué punto obtenemos? ¿en qué cuadrante se encuentra?

2. Considere $\overline{AB}$ con $A = (-2, 2)$ y de modo que el punto medio de $\overline{AB}$ es $M = (1, 4)$.

   a) ¿Cuáles son las coordenadas de B?

   b) ¿Cuál es la longitud de $\overline{AB}$?

3. Considere la recta L que pasa por $P = (5, 2)$ y $Q = (2, -7)$.

   a) ¿Cuál es el valor de su pendiente?

   b) ¿La recta L es creciente, decreciente, horizontal o vertical?

   c) ¿Cómo varía y si x aumenta en 1 unidad?

   d) ¿Cómo varía y si x aumenta en 2 unidades?

4. Considere la recta L que pasa por $P = (2, 1)$ y $Q = (-1, 7)$.

    a) ¿Cuál es el valor de su pendiente?

    b) ¿La recta L es creciente, decreciente, horizontal o vertical?

    c) ¿Cómo varía y si x aumenta en 1 unidad?

    d) ¿Cómo varía y si x aumenta en 2 unidades?

5. En Chile, la pendiente máxima recomendada de un acceso para personas en sillas de ruedas, es del 8 %. Si el acceso a un negocio tiene una longitud de 1,8 metros y una altura de 20 cms ¿cumple con la norma? Use calculadora.

6. Dados tres vértices de un paralelogramo: $A = (3, -5), B = (5, -3), C = (-1, 3)$,

    a) Determine el cuarto vértice D, el cual es opuesto a B.

    b) Determine si $\square ABCD$ es un rectángulo.

    c) Determine su perímetro.

    d) Determine su área.

7. Determine cual(es) de los siguientes puntos $A = (3, 1), B = (2, 3), C = (6, 3), D = (-3, -3)$ pertenece(n) a la recta $L : 2x - 3y - 3 = 0$.

8. ¿Existe una recta que contenga a los puntos $A = (-1, 5), B = (2, -4)$, $C = (-2, 8)$? En caso afirmativo, obtenga su ecuación.

9. Considere $\triangle\, ABC$ de vértices $A = (2, -3)$, $B = (3, 2)$ y $C = (-2, 5)$. Obtenga el área de $\triangle\, ABC$.

10. Considere el triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de las rectas: $L_1 : x + y - 7 = 0, L_2 : x - 3y - 3 = 0, L_3 : 7x - 5y + 11 = 0$. Determine el punto de intersección de sus medianas.

11. Determine la ecuación de la recta L

    a) que pasa por $(-2,1)$ y $(1,2)$.

    b) que pasa por $(3,2)$ y $(3,5)$.

    c) que pasa por $(2,-1)$ y $(4,-1)$.

    d) que pasa por $(1,2)$ y tiene pendiente $m=-1$.

    e) que pasa por $(2,5)$ y que no intersecta al eje x.

    f) que pasa por $(2,5)$ y que es paralela a la recta $L' : 2x+3y=1$.

    g) que pasa por $(2,5)$ y que es perpendicular a la recta $L' : 2x+3y=1$.

    h) que pasa por $(0,2)$ y cuya pendiente es el doble que la pendiente de la recta $L' : 2x-y=0$.

    i) que pasa por $(2,3)$, y además la intersección de esta recta con el primer cuadrante, determina segmentos de igual longitud en los ejes coordenados.

12. Determine la ecuación de la o las rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas $L_1 : 3x+2y-5=0, L_2 : 4x+3y-1=0$ y cuya intersección con el eje y determina un segmento de longitud 3, medido desde el origen.

13. la recta L pasa por $A=(3,5)$ y cumple que cualquier punto de ella está a igual distancia de los puntos $P=(-7,3)$ y $Q=(11,-15)$ ¿Cuál es la ecuación de L?

14. ¿Qué puntos de la recta $L : 2x+y=1$ están a distancia 1 del origen?

15. Considere el triángulo cuyos puntos medios de sus lados son los puntos $M=(2,1)$, $N=(5,3)$ y $P=(3,-4)$.

    a) Determine sus vértices.

    b) Demuestre que el área del triángulo es 4 veces el área de $\triangle MNP$.

16. Considere $\triangle ABC$ de vértices $A=(-2,0), B=(2,0), C=(1,2)$.

    a) Determine el punto de intersección de sus medianas.

b) Determine el punto de intersección de sus mediatrices.

c) Determine el punto de intersección de sus alturas.

d) Pruebe que los puntos obtenidos en los tres ítems anteriores son colineales.

17. Determine la ecuación de la circunferencia

a) cuyo centro es $A = (-1, 2)$ y cuyo radio es $r = 3$.

b) cuyo centro es $A = (2, 1)$ y que pasa por $B = (5, 5)$.

c) cuyos extremos de un diámetro son en $A = (-3, -10)$ y $B = (7, 2)$.

d) cuyo centro es $A = (1, -1)$ y que es tangente a la recta $L : 5x - 12y + 9 = 0$.

e) que pasa por $A = (1, 4), B = (-1, 2)$ y $C = (3, 2)$.

f) que pasa por $A = (0, 5)$ y $B = (2, 1)$ y cuyo centro pertenece a la recta $L : x + y - 1 = 0$.

18. En cada caso, determine si el punto $A = (1, -2)$ pertenece a la circunferencia C dada. En caso contrario, determine si A pertenece al interior o exterior de dicha circunferencia:

a) $C : x^2 + y^2 = 1$.

b) $C : x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.

c) $C : x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.

19. Considere la circunferencia que es tangente a la recta $L : 4x - 3y + 7 = 0$ en el punto $B = (1, 1)$. Además, su centro C está contenido en la recta $L' : 4x - 3y + 18 = 0$

a) Obtenga las coordenadas de C.

b) Obtenga la ecuación de la circunferencia.

20. Sea $P = (x_0, y_0)$ es un punto del plano, y $L : ax + by + c = 0$ una recta. La **distancia** entre el punto P y la recta L (la cual está determinada por la

perpendicular desde P hasta L), viene dada por

$$d(P, L) := \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Usando esta fórmula cuando sea necesario, resuelva los siguientes ejercicios:

a) Determine la distancia desde el origen a la recta $3x+4y+10=0$. En base al valor obtenido, ¿intersecta esta recta a la circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio 1?

b) Determine el área de $\triangle ABC$ de vértices $A=(-2,1), B=(6,-3), C=(4,7)$.

c) Determine la ecuación de la circunferencia con centro en $C=(3,-2)$, y que es tangente a la recta $L: 4x-3y+7=0$.

d) Una circunferencia es tangente

- a la recta $L: 2x+y=5$ en el punto $A=(2,1)$.
- a la recta $L': 2x+y=-15$ en el punto B.

Determine la ecuación de la circunferencia.

e) Determine el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de las rectas $L_1: 3x-y+7=0$ y $L_2: 3x-y-3=0$. Grafique L_1 y L_2, junto con el lugar geométrico obtenido ¿Qué relación grafica se observa entre estos elementos?

f) Determine el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de las rectas $L_1: y=2x+1$ y $L_2: y=-2x+1$. Grafique L_1 y L_2, junto con el lugar geométrico obtenido ¿Que relación grafica se observa entre estos elementos?

21. Determine para qué valores de k, la recta de ecuación $y=kx$:

a) es secante a la circunferencia $C: x^2+y^2-10x+16=0$.

b) es tangente a esta circunferencia.

c) no intersecta a esta circunferencia.

22. Obtenga la ecuación, sus principales elementos faltantes y el gráfico de la parábola

    a) de vértice (0,0) y foco $(0, -\frac{3}{2})$.

    b) de vértice (3,2) y foco $(1, 2)$.

    c) de vértice (0,-1) y directriz $y = 2$.

    d) de vértice(-2,1) y directriz $x = 1$.

    e) de foco (-1,3) y directriz $y = -1$.

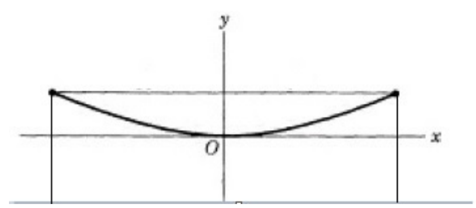
    f) de directriz $y = 1$, cuerda focal de longitud 8, y que abre hacia abajo.

    g) de directriz $y = -1{,}5$ y puntos extremos de la cuerda focal en $(0, 1)$ y $(5, 1)$.

23. Determine la ecuación y grafique las parábolas cuya cuerda focal tiene extremos en $(4, 9)$ y $(4, 1)$.

24. Determine las ecuaciones de las rectas que pasan por $(2, -4)$ e intersectan a la cónica de ecuación $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$ en un sólo punto.

25. Un puente parabólico colgante



es descrito mediante la ecuación

$$y = \frac{w}{2T_0}x^2 \tag{6.12.1}$$

donde w es la carga máxima que puede soportar el puente, la cual está distribuida uniformemente, y T_0 es la tensión del puente en su punto más bajo. Suponga que el puente colgante se afirma mediante dos torres, las cuales están a 120 metros de distancia. Por otro lado, el punto más bajo del puente está a 15 metros más abajo que la cima de cada torre.

a) Determine la ecuación del puente.

b) Si para sujetar el puente, se colocan torres cada 20 metros, a partir de la torre que está más a la izquierda, ¿cuál es la altura de cada una de estas torres?

26. Ingenieros diseñan un antena parábolica, la cual tiene un diamétro de 4 metros y un altura de 60 cms, como la de la figura. Las señales rebotan en el plato, y son reflejadas en el foco, donde se encuentra ubicado un receptor. ¿Cuán lejos de la base de la antena (vértice) deben los ingenieros ubicar el receptor, de modo que la señal sea captada?

27. Obtenga la ecuación, sus principales elementos faltantes y el gráfico de la elipse

    a) de centro (0,0), foco (3,0), vértice (5,0).

    b) de centro (0,0), vértice $(0, \frac{5}{2})$, eje menor de longitud 3.

    c) de vértices (0,2) y (4,2), eje menor de longitud 2.

    d) de focos (-2,0) y (2,0), eje mayor de longitud 8.

    e) de focos (0,-5) y (0,5), eje mayor de longitud 14.

    f) de centro en (4,0), un foco en (4,5) y un vértice en (4,-13).

    g) de focos en $(-\sqrt{11}, 5)$ y $(\sqrt{11}, 5)$ y un vértice en $(6, 5)$.

    h) de focos $F_1 = \left(-2, \frac{3}{2}\right), F_2 = \left(2, \frac{3}{2}\right)$ y excentricidad es $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

    i) de extremos del eje menor en $(5, -2)$ y $(1, -2)$ y un vértice en $(3, 3)$.

    j) la cual tiene un extremo del eje menor en $M = (3, -1)$, sus focos están en la recta de ecuación $y = -6$ y su excentricidad es $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

28. Determine, si es que existen, los puntos de intersección de la recta $L : x+2y-7 = 0$ y la elipse $x^2 + 4y^2 = 25$.

29. Determine todos los valores de b para los cuales la recta $L : y = -x+b$ es tangente a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

30. El planeta Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol, donde el sol es uno de los focos de esta órbita. La ecuación de esta órbita es

$$\frac{x^2}{57{,}9^2} + \frac{y^2}{56{,}6^2} = 1$$

La mayor y la menor distancia desde Mercurio hasta el Sol, ocurre cuando Mercurio se posiciona en cada vértice de esta órbita elíptica.

   a) ¿Cuál es la mayor y cuál es la menor distancia a la que se posiciona Mercurio del Sol?

   b) ¿Que distancia recorre Mercurio cuando recorre su órbita completa?
   Dato: El perímetro P de una elipse es

$$P \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right].$$

   c) Si Mercurio recorre su órbita con una velocidad aproximada de $47{,}9\frac{km}{s}$, ¿a cuántos días terrestres corresponde un año en Mercurio? (1 año es el tiempo que se demora un planeta en completar su órbita).

31. Un túnel semielíptico tiene 3 metros y medio de altura, y 12 metros de ancho. Don Ramón va en su camión que tiene 3 metros y medio de ancho y 2,7 metros de altura. ¿Alcanzará su camión a pasar por el túnel?

32. Obtenga la ecuación, sus principales elementos faltantes y el gráfico de la hipérbola

   a) de centro (0,0), un vértice en (0,2), un foco en (0,4).

   b) de centro (0,0), un vértice en (3,0), un foco en (5,0).

   c) de centro (0,0), un vértice en (-3,0) y un extremo del eje conjugado en (0,-1).

   d) de vértices $V_1(-2,4), V_2(-2,-2)$ y focos que están a 5 unidades de su centro.

   e) cuyo eje transversal mide 24 unidades y cuyos focos están en $(-10,2)$ y $(16,2)$.

   f) de vértices $(\pm 1, 0)$, asíntotas $y = \pm 3x$.

g) de vértices $(0, \pm 3)$, asíntotas $y = \pm 3x$.

33. Determine, si es que existen, los puntos de intersección de la recta $L : x + y = 0$ y la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

34. Encuentre el área del rectángulo generado por las asíntotas de la hipérbola $\frac{y^2}{169} - \frac{x^2}{9} = 1$.

35. Encuentre la ecuación de la hipérbola con centro (0,0), cuyo rectángulo generado por las asíntotas de esta es un cuadrado de área 144, y cuyo eje transversal está sobre el eje x.

36. Encuentre la ecuación de la hipérbola con centro (0,0), sabiendo que su eje conjugado está sobre el eje x, el rectángulo generado por sus asíntotas tiene área 64 y el lado que contiene a los vértices de la hipérbola mide 16.

37. Determine todos los valores de b para los cuales la recta

$$L : y = \frac{5}{2}x + b$$

no intersecta a la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$.

38. Natalia y Juan Carlos caminan por la avenida del Mar. La idea es encontrarse en un punto que esté a la misma distancia de ambos. Juan Carlos se ubica al este de Natalia. Juan Carlos escucha un trueno 1 segundo después que Natalia. El rayo cae en una calle paralela a la avenida del Mar, la cual está ubicada a 800 metros de esta. Además, el rayo cae a 200 metros del punto de encuentro de la pareja. ¿A qué distancia están ubicados Natalia y Juan Carlos? Use calculadora.
Dato: Considere que la rapidez del sonido es de $343\frac{m}{s}$.

39. Determine a qué curva corresponde la ecuación dada. Posteriormente, determine los principales elementos de tal curva y grafíquela.

a) $x^2 + y^2 - 2x = 3$

b) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

c) $6x + 16y + 21 = 0$

d) $y^2 + x + y = 0$

e) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

f) $y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

g) $4y^2 - x^2 + 2x - 2 = 0$

40. Determine la curva y grafique el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia al punto $(1, 2)$ es 5. ¿A qué tipo de curva corresponde?

41. Determine la ecuación y grafique el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de sus distancias a $A = (0, 4)$ y $B = (6, 4)$ es 10. ¿A qué tipo de curva corresponde?

42. Determine la ecuación y grafique el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a la recta $y = -2$ es la misma que su distancia al punto $A = (4, 6)$ ¿A qué tipo de curva corresponde?

43. Determine la ecuación y grafique el lugar geométrico de todos los puntos cuyo valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los puntos $A = (0, 4)$ y $B = (4, 4)$ es 6. ¿A qué tipo de curva corresponde?

44. Determine la ecuación y grafique el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a $(0, 0)$ es el doble que su distancia a $(1, 0)$. ¿A qué tipo de curva corresponde?

45. Grafique la región del plano determinada por las inecuaciones

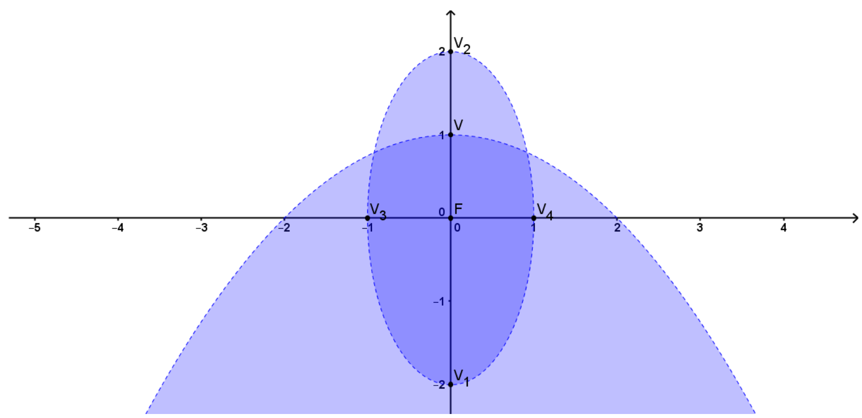
a) $|x - 3| > 2 \ \wedge \ y < 1$

b) $x^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 4$

c) $x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x^2 - y \leq 1$

d) $x^2 < y \ \wedge \ (x-1)^2 \leq 2 - y$

46. Considere la parábola de vértice $V = (0,1)$ y foco $F = (0,0)$, y la elipse de vértices $V_1 = (0,-2), V_2 = (0,2)$ y extremos del eje menor en $B_1 = (-1,0), B_2 = (1,0)$. La figura muestra la región R bajo la parábola e interior a la elipse.



¿Qué inecuaciones debe satisfacer un punto (x, y) para pertenecer a R?

Capítulo 7

Respuestas a los ejercicios propuestos.

7.1. Lógica y Conjuntos.

1. *a*) Falso; *b*) falso; *c*) falso; *d*) verdadero

2. *a*) Verdadero; *b*) falso; *c*) falso

3. *a*) Verdadero; *b*) verdadero; *c*) verdadero

4. *a*)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \leftrightarrow q$	$A :\sim (p \leftrightarrow q)$	$B : p \wedge \sim q$	$C : q \wedge \sim p$	$B \vee C$	$A \leftrightarrow (B \vee C)$
V	V	F	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F	F	V

b)

p	q	r	$A : p \to q$	$B : q \to r$	$A \wedge B$	$p \to r$	$(A \wedge B) \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

c)

p	q	r	$A: p \leftrightarrow q$	$B: q \leftrightarrow r$	$A \wedge B$	$p \leftrightarrow r$	$(A \wedge B) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

5. a) Se tiene que

$$\begin{aligned}[(p \rightarrow q) \vee \sim p] &\Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \vee \sim p]\\ &\Leftrightarrow [(\sim p \vee \sim p) \vee q]\\ &\Leftrightarrow [\sim p \vee q]\\ &\Leftrightarrow [p \rightarrow q]\end{aligned}$$

b) Se tiene que

$$\begin{aligned}(\sim q \vee \ \sim p) &\Leftrightarrow \sim (q \ \wedge \ p)\\ &\Leftrightarrow \sim (q \wedge \ \sim (\sim p))\\ &\Leftrightarrow \sim (\sim (q \longrightarrow \sim p))\\ &\Leftrightarrow q \longrightarrow \sim p\end{aligned}$$

c) Se tiene que

$$\begin{aligned}\sim (p \leftrightarrow q) &\Leftrightarrow \sim [(p \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow p)]\\ &\Leftrightarrow [\sim (p \rightarrow q) \wedge \ \sim (q \rightarrow p)]\\ &\Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \ \wedge \ (q \wedge \sim p)]\end{aligned}$$

6. a) Contradicción
   b) tautología
   c) contingencia
   d) contingencia
   e) tautología

7. 7.1)
   a) $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
   b) $\{-1, 1\}$
   c) $\{0\}$
   d) $\{-2, 2\}$
   e) U

   7.2)
   a) Ninguna
   b) sólo 2
   c) sólo 2 y 3
   d) sólo 2
   e) sólo 1 y 2

8. 8.1)
   a) Falsa, $x = 2$ no cumple
   b) falsa, $x = 3$ no cumple
   c) falsa, $x = 3$ y $x = 5$ cumplen lo pedido
   d) falsa, $x = 4$ no cumple
   e) falso
   f) verdadero

   8.2)
   a) $\exists x \in B : x + 5 < 12$
   b) $\exists x \in B : x$ es impar
   c) $[\exists x \in B, \exists y \in B : x \neq y \ \wedge \ (x \text{ es impar } \wedge \ y \text{ es impar})] \wedge [\forall x \in B : x \text{ es par}]$
   d) $\forall x \in B : x$ no es primo
   e) $\forall x \in B : x^2 \leq 100$
   f) $[\exists x \in B, \exists y \in B : x \neq y \ \wedge \ (x^2 = 9 \ \wedge \ y^2 = 9)] \ \wedge \ [\forall x \in B : x^2 \neq 9]$

9. *a*) $V_p = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
   b) no
   c) la negación es

$$\exists x \in B : x^3 \geq 200 \ \wedge \ \frac{120}{x} \text{no es un número natural},$$

   la cual es verdadera con $x = 7$.

10. 10.1)
   a) Falso, $n = 1$ no cumple
   b) verdadero
   c) falso, se cumple para $x = 1$ o $x = -1$

d) falso, para $x = -2$ (en general es falso para x número negativo)

e) verdadero

f) verdadero

g) falso, $n = 2$ no cumple

h) falso, por el ejercicio g)

i) verdadero

j) verdadero, $x = \frac{1}{2}$ cumple con esto

10.2) a) $\exists n \in \mathbb{N} : n - 3 \leq -2$

b) $[\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : n \neq m \ \wedge \ (n^2 = 1 \ \wedge \ m^2 = 1)] \ \wedge \ [\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \neq 1]$

c) $[\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x \neq y \ \wedge \ (x^2 = 1 \ \wedge \ y^2 = 1)] \ \wedge \ [\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \neq 1]$

d) $\exists x \in \mathbb{R} : -x \geq 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 \geq x^2$

f) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0 \ \wedge \ 2x \neq 0$

g) $\exists n \in \mathbb{N} :$ (n es múltiplo de 8) $\wedge$ (n no es múltiplo de 2)

h) $\exists n \in \mathbb{N} :$ (n es múltiplo de 2)
$\wedge$ (n no es múltiplo de 8)

i) $\exists n \in \mathbb{N} :$ [(n es múltiplo de 2) $\wedge$ (n no es múltiplo de 8)]
$\vee$ [(n es múltiplo de 8) $\wedge$ (n no es múltiplo de 2)]

j) $\exists x \in \mathbb{R} : [2x + 4 = 0 \ \wedge \ x \neq -2] \ \vee \ [x = -2 \ \wedge \ 2x + 4 \neq 0]$

11.11.1) 1) Falso, $x = 5$ no cumple

2) verdadero, $x = 1$ cumple con lo pedido

3) falso, $x = 1$ y $x = 2$ cumplen con lo pedido

11.2) 1) $\exists x \in A, \forall y \in B : x + y \geq 10$

2) $\forall x \in A, \exists y \in B : x + y \geq 10$

3) $[\exists x_1, x_2 \in A, \forall y \in B : x_1 \neq x_2 \ \wedge \ (x_1 + y < 10 \ \wedge x_2 + y < 10)]$
$\vee \ (\forall x \in A, \exists y \in B : x + y \geq 10)$

12. *a*) Falso, $x = -3$ no cumple

    b) falso, $x = -3$ y $y = -2$ no cumplen

    c) verdadero, $x = 0$ cumple

    d) verdadero, sólo $x = 0$ cumple

    e) verdadero, $x = -3$ y $y = -3$ cumplen

13. *a*) Porque ningún número natural n es mayor que todos los números naturales

    b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n$ Es verdadera porque para cada número natural n, existe otro número natural m que lo supera

14. *a*) Falso, dado que si $x = -1$, éste no está entre ubicado entre un número natural n y su sucesor $n + 1$

    b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n > x \ \vee \ x > n + 1$, la cual es verdadera para $x = -1$, dado que este $n > -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

15. *a*) $A = \{4n : n \in \mathbb{N}\}$

    b) $B = \{n^2 : n \in \mathbb{N}, n \leq 6\}$

    c) $C = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo} \wedge \ n \leq 1\}$

16. *a*) $A = \{-2, 2\}$

    b) $\emptyset$

    c) $H = \{E, D, U, C, A, I, O, N\}$

17. *a*) Falso, dado que $b \notin \{a\}$

    b) verdadero, dado que $a \in \{a, b\}$

    c) verdadero, dado que todo conjunto es subconjunto de sí mismo

    d) verdadero, dado que el único elemento de $\{\{a\}\}$ es $\{a\}$

    e) falso, dado que $a \notin \{\{a\}\}$

    f) falso, dado que el conjunto de la derecha no tiene elementos *g*) verdadero, el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto

h) falso, dado que $\emptyset \notin \{a\}$

i) verdadero, dado que los elementos del conjunto de la derecha son $\{a, b\}$ y c

j) verdadero, dado que $\{a, b\}\}$ pertenece a $\{\{a, b\}, c\}$

18. *a*) Es falso que $A \subseteq B$, dado que $x = 15$ no pertenece a B. Es verdadero que $B \subseteq A$

    b)
    - $C \cap D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 12\}$
    - $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 5\}$
    - $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 10\}$
    - $B - A = \emptyset$
    - $B \cap C \cap D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es múltiplo de } 30\}$

    c) Verdadero, dado que cualquier múltiplo de 4 o de 6 es también múltiplo de 2

19. $(A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 5, 6, 8\}$

20. $A^c = \{-3, 3\}$

21. a) Falso, dado que $5 \notin A$

    b) falso, dado que $\{3, 5\} \nsubseteq A$

    c) verdadero, dado que $\{3\} \subseteq B$

    d) verdadero, dado que $A \subseteq B$

    e) falso, dado que $\{\emptyset\} \nsubseteq B$

22. Sólo b)

23. *a*)

$$(A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

y por distributividad

$$(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cup (B \cap B^c) = A$$

b) Note que la tesis es el contrarecíproco de la hipótesis.

c) Note que

$$A - (A - B) = A \cap (A \cap B^c)^c = A \cap (A^c \cup B).$$

Usando distributividad y la hipótesis obtenemos que

$$A \cap (A^c \cup B) = A \cap B = B$$

d)

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

Luego aplique asocitividad y distributidad para obtener $A \cup B$

e) $B \subseteq A \cup B = A$

f) Por un lado, es fácil ver que $A \cap B \subseteq A$.

Por otro lado, si $x \in A$, entonces $x \in B$ o $x \notin B$. Pero no es posible que $x \notin B$, dado que por hipótesis $A - B\emptyset$. De este modo, $x \in A \cap B$ (los detalles a cargo del lector)

g) $A = A \cap B \subseteq B$

24. *a*) $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (5, 2)$
$(5, 4), (5, 6), (5, 8), (7, 2), (7, 4), (7, 6), (7, 8)\}$.

b) $C = \{(1, 2), (1, 8), (3, 6), (5, 4), (7, 2), (7, 8)\}$

c) a $A \times B$

25. No, dado que si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$ entonces $(1, 3) \in A \times B$ y $(1, 3) \in B \times A$

26. *a*) Si $(x, y) \in A \times \emptyset$ entonces $y \in \emptyset$, lo cual es una contradicción

b) $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ equivale a que

$$(x \in A \ \wedge \ (y \in B \ \vee \ y \in C))$$

Ahora usando distributividad concluimos equivalentemente que

$$(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

c) Análogo al ejercicio anterior

d) Si $(x, y) \in A \times C$ entonces $x \in A$ y $y \in C$. Usando la hipótesis, concluimos que $(x, y) \in B \times D$

27. A 12 encuestados

28. 570 personas

29. *a*) 140 personas *b*) 30 personas

30. *a*) 22 empleados *b*) 92 empleados

7.2. Conjuntos númericos.

1. 16 mujeres

2. 60 hinchas blancos, 120 hinchas azules, 180 hinchas neutrales

3. Cristóbal aportó 70 láminas, Diego 120 láminas y Felipe 240 láminas

4. a) $85AC$ c) 70 años e) $3DC$.
   b) $15AC$ d) $18AC$ f) 32 años

5. a) 11 pisos c) en el piso -1
   b) 10 pisos d) en el piso 5

6. $-\$66000$, por lo que aún debe $\$66000$

7. a) 2794 años.

   b) en el año 393 $A.C.$

   c) 2289 años

8. 17 encuentros, y pasaron 2 años desde el último encuentro hasta el fallecimiento de Abraham

9. En ambos casos quedan $\frac{3}{10}$ del total

10. a) 2 bolitas negras

    b) 2 bolitas negras

    c) ninguna bolita

11. 250 ml

12. 32 estudiantes

13. 350 llaveros, los cuales corresponden a $\frac{3}{8}$ del total

14. a) $\dfrac{3}{4} > \dfrac{2}{3}$

    b) $\dfrac{5}{6} > \dfrac{9}{14}$

    c) $\dfrac{3}{10} < \dfrac{7}{20} < \dfrac{2}{5}$

15. a) $1\dfrac{2}{3}$

    b) $\dfrac{5}{9}$

    c) $\dfrac{1}{18}$

    d) $1\dfrac{7}{12}$

    e) $\dfrac{19}{20}$

    f) $\dfrac{17}{24}$

    g) $\dfrac{11}{12}$

    h) $1\dfrac{4}{15}$

16. a) 27

    b) $\dfrac{3}{4}$

    c) $\dfrac{6}{25}$

    c) 39

    d) $\dfrac{1}{3}$

    e) 2

17. a) Más amarillenta

b) si, $\frac{1}{24}$ de litro de pintura

c) $\dfrac{19}{24}$

18. No, dado que antes de los 7 segundos su rapidez es 0

19. 250 kg

20. a) $\dfrac{1}{45}$
    b) $\dfrac{1}{90}$
    c) $\dfrac{1}{30}$
    d) en 30 minutos

21. Si, cada uno tomó $\frac{3}{4}$ de la botella

22. a) $\frac{3}{8}$ de cada pizza
    b) $\frac{15}{40}$ del total de las pizzas
    c) $\frac{3}{40}$ quedó en cada pizza
    d) $\frac{15}{8}$, es decir, 1 pizza y $\frac{7}{8}$ de pizza

23. $\frac{1}{6}$ de una taza de azúcar

24. a) $\dfrac{12}{5}$
    b) $\dfrac{22}{9}$
    c) $\dfrac{171}{99}$
    d) $\dfrac{115}{333}$
    e) $\dfrac{271}{90}$
    f) $\dfrac{823}{198}$
    g) $\dfrac{4811}{900}$

25. Sólo a) y b)

26. a) 6 tazas y media
    b) no, dado que necesita 1 paquete y $\frac{3}{10}$ de un paquete

27. 8 tazas

28. 2 litros y medio

29. a) $\dfrac{13}{18}$
    b) 54000 entradas

c) 30000 entradas

30. \$8000

31. \$40000

32. \$20000

33. *a*) No, dado que el territorio chileno apto es de 150,000 km^2, y el territorio brasileño apto es \$850,000 km^2

    b) 1,7 %

34. Falso, porque el recargo pasado dos meses es de \$816, y el 8 % de la deuda es de \$800

35. a) La mitad de la herencia

    b) $\frac{3}{8}$ de la herencia

    c) 100 millones

    d) Hugo recibió 24 millones, Paco recibió 26 millones y Luis 37,5 millones

36. *a*) 35 %

    b) falso, dado que 27000 habitantes de Buenas Peras votaron en contra del puente, versus 28000 habitantes de Pelotillehue

    c) falso, dado que el 80 % de 140000 es 112000, y no 55000

    d) si, dado que votaron a favor en total 85000 personas

37. Aproximadamente 35 metros y medio de cuerda.

38. *a*) Falso, $8 \neq 6$

    b) falso, $\frac{8}{5} \neq \frac{8}{125}$

    c) verdadero

    d) falso, $128 \neq 4096$

    e) falso, $128 \neq 16384$

    f) falso, $625 \neq 125$

    g) verdadero

    h) verdadero

i) falso

j) verdadero

39. *a*) $2000 \cdot 3^6$

    b) $2000 \cdot 3^n$

40. *a*) 1800

    b) 10800

    c) $4500 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 2^2$ y $5400 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 2^3$, por lo que su MCM es $3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = 30^3$

41. *a*) Falso, $\sqrt{36} = 6$

    b) falso, $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

    c) falso, $\sqrt{(-3)^2} = 3$

    d) verdadero

    e) falso, $\sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{27} = -6$

    f) falso, $\sqrt[53]{-1} = -1$

    g) verdadero

    h) verdadero

    i) falso, $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{\frac{15}{2}}$

    j) falso

    k) falso, $\sqrt[4]{-81}$ no está definida en $\mathbb{R}$

    l) verdadero

    m) verdadero

    n) verdadero

    ñ) verdadero

42. -20

43. 0

44. a) No, si $x = 0$, entonces $\sqrt{x} = 0$

    b) si, $x = \frac{1}{4}$

    c) no, cualquier $0 < x < 1$ cumple con esto

45. d)

46. $2\sqrt{3}$ metros

47. El terreno A

48.
a) $15 \cdot 10^7$ grados Celsius
b) $1,5 \cdot 10^{-4}$ kgs
c) $5,2 \cdot 10^7$ kgs
d) $9 \cdot 10^{-8}$ mm^3
e) $6,4 \cdot 10^7$ metros
f) $9 \cdot 10^{-5}$ metros
g) $5,4 \cdot 10^{13}$ pesos chilenos
h) $3,1536 \cdot 10^8$ segundos

49.
a) 140 mil kms
b) 2 miligramos
c) 5000 millones de toneladas
d) 2, 4 billones de pesos
e) 10900 kms

50. 13600 veces

51. Aproximadamente 21 veces, es decir se puede observar sólo alrededor de la $\frac{1}{21}$ parte del universo

52. $0,02\,\%$

53. $71\,\%$

54. $96\,\%$

55. 5040 millones de pesos

7.3. Proporcionalidad.

1. a) Directamente proporcionales
   b) inversamente proporcionales
   c) inversamente proporcionales
   d) directamente proporcionales
   e) inversamente proporcionales
   f) directamente proporcionales
   g) inversamente proporcionales
   h) directamente proporcionales
   i) directamente proporcionales
   j) inversamente proporcionales
   k) inversamente proporcionales
   l) inversamente proporcionales
   m) inversamente proporcionales

2. *a*) 36 pizzas
   b) 9 clips
   c) 8 meses
   d) de 50 litros cada tonel
   e) 40 personas
   f) en la distribuidora B
   g) \$250000
   h) 100 veces
   i) aproximadamente 1852 litros
   j) 10 veces

3. *a*) 9 costureras
   b) \$75000
   c) 9 días

4. No, dado que la segunda sujección vertical debe medir 10 metros

5. La madre \$150000 y Sandra \$60000

6. *a*) Si
   b) deberían retirarse por lo menos 90 asistentes
   c) deberían ingresar 3 guardias

7. En Viña del Mar, dado que en esta ciudad, por cada 6 kms cuadrados habían 8000 autos, y en La Serena por cada 6 kms cuadrados habían 9000 autos

8. *a*) Aproximadamente \$879200 pesos chilenos

b) $16,1\frac{m}{s}$

c) aproximadamente 527 metros

d) $83,3\frac{cc}{seg}$

e) 200 años

9. a) 63 años, 8 meses y 24 días

   b) b1) Si, dado que le debían dar \$5390 Dirham marroquí

      b2) aproximadamente \$178 euros

   c) c1) $1{,}008\frac{km}{h}$

      c2) 5 minutos y 57 segundos

      c3) 37 veces

   d) d1) La densidad del aceite es de $0,92\frac{g}{cc}$, y la densidad de la leche es de $1,032\frac{g}{cc}$

      d2) flota en ambos, dado que la densidad del trozo de madera es de $0,4\frac{g}{cc}$

   e) Aproximadamente 7 vueltas y media

   f) f1) 1 millón 270 mil billetes

      f2) 127 millones de pesos

   g) g1) $9,46 \cdot 10^{12}$ kms

      g2) aproximadamente a 4, 1 años luz

      g3) $9,46 \cdot 10^{38} kms^3$

      g4) $3{,}89 \cdot 10^{22}$ años luz cúbicos

   h) h1) 130 mil trillones de átomos

      h2) aproximadamente 284 mil granos

   i) 560 trillones de botellas

7.4. Números reales y lenguaje algebraico.

1. *a*) si, corresponde a $50 + x$
   b) si, corresponde a $2x + 2y$
   c) no, corresponde a $x - 50$
   d) si, corresponde a $5000 - x$
   e) si, corresponde a $4x$
   f) si, corresponde a $\frac{x}{4}$
   g) si, corresponde a $x - 5000$
   h) no, corresponde a $\dfrac{x}{2}$
   i) si, corresponde a $12(x - 3)$
   j) si, corresponde a $\frac{x+3}{12}$

2. *a*) $x - 1$
   b) $3x$
   c) $\dfrac{x}{3}$
   d) $\dfrac{x}{2} - 1$
   e) $\dfrac{x-1}{2}$
   f) $\dfrac{x}{4}$

3. *a*) $x + 4$
   b) $x - 4$
   c) $47 - x$
   d) $x - 7$
   e) $2x + 20$
   f) $\dfrac{x}{2} - 3$
   g) $12x$

4. *a*) $ad(bc + ce + ef)$
   b) $x^2(2x - 1)(1 - x)$
   c) $6(3x + 4y - 5z)$
   d) $5x^2y^4(2x - 3y - 4x^3y^3)$
   e) $(x - y)(z + w)$
   f) $\dfrac{5}{7}x^2\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3} + 4x^2\right)$
   g) $(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)$
   h) $9(4x^3 - 3y)(4x^3 + 3y)$
   i) $(6x^2 - 13y^4)(6x^2 + 13y^4)$
   j) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
   k) $12x^6(x - 2)(x + 2)$
   l) $(x + 5)(x + 2)$
   m) $(x - 7)^2$
   n) $(x - 4)(x + 3)$
   ñ) $(x + 12)(x - 5)$
   o) $(x - 3)(x - 2)$
   p) $(x - 3)(x + 2)$
   q) $(x + 3)(x - 2)$
   r) $(x + 1)(9x - 1)$
   s) $(x - 2)(5x - 3)$
   t) $(3x + 2)(2x - 1)$
   u) $(x - \frac{1}{2})^2$

v) $(x^2+4)^2$

w) $x(x-9)(x+6)$

x) $(3x-1)(9x^2+3x+1)$

y) $8(1+2y^2)(1-2y^2+4y^4)$

z) $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}y^4\right)\left(\frac{1}{9}x^6+\frac{1}{15}x^3y^4+\frac{1}{25}y^8\right)$

a2) $(x-2)^3$

b2) $(x+3)^3$

5. *a*) 1

b) $\dfrac{7-x^2}{4-x^2}$

c) $\dfrac{1-2x}{x^3}$

d) $\dfrac{4x}{(x-3)(x+1)}$

e) $\dfrac{2}{x+1}$

f) $\dfrac{1}{(x+5)(x+3)}$

g) $\dfrac{x-6}{(x+2)(x+3)(x-1)}$

h) $\dfrac{2(x-2)}{x^3(x-4)^2}$

6. *a*) No es posible simplificarla

b) x^2+1

c) $\dfrac{x-6}{x-3}$

d) $\dfrac{3+x}{3-x}$

e) $\dfrac{1+x+x^2}{2-x}$

7. *a*) $\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$

b) $\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{x^4-1}}{(x^2+1)(x-1)}$

e) $\dfrac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}{2}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

g) $1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$

8. *a*) $x=\frac{1}{4}$

b) no tiene solución

c) $x=12$

d) $x=\frac{4}{5}$

e) $x=-\frac{2}{17}$

f) $x=-\frac{8}{5}$

9. *a*) $x=4,\ y=7$

b) $x=6,\ y=-3$

c) $x=-6,\ y=-3$

d) $\emptyset$

e) $x = 4 - 2t,\ y = t$, con $t \in \mathbb{R}$

f) $x = 3,\ y = -1$

g) $x = -1,\ y = -1$

h) $x = 2,\ y = 3$

10. a) 15

b) 147, 148, y 149

c) 12 naranjas en la primera caja, y 15 naranjas en la segunda caja

d) 8 mililitros de ácido

e) sus hijos tienen 8, 12 y 16 años, y Raúl tiene 40 años

f) María José aportó \$33500 y Carlos aportó \$40500

g) 25 papás, 38 mamás y 43 niños

h) 25 cerdos, 45 ovejas y 50 vacas

i) 12 billetes de \$2000, 24 billetes de \$5000 y 26 billetes de \$1000

j) 18 naranjas, 36 manzanas y 72 plátanos

k) el libro me costó \$14000, las gafas \$28000 y el sombrero \$42000

l) Pepe Cortisona obtuvo 1500 votos, Condorito 4500 votos y Ungenio 6500 votos

m) actualmente, María tiene 11 años y Pedro tiene 22 años

n) 70 autos y 40 motos

ñ) 14 respuestas correctas y 6 respuestas incorrectas

o) 46 lápices pasta y 50 lápices gráfito

p) El pantalón le costó \$30000 y la polera \$18000

q) 25 minutos

r) 20 minutos

s) \$700.

11. *a*) $x^2 - 7x + 12 = 0$, con $a = 1, b = -7, c = 12$

    b) $x^2 - 6x + 5 = 0$, con $a = 1, b = -6, c = 5$

    c) $2x^2 + x - 1 = 0$, con $a = 2, b = 1, c = -1$

    d) $15x^2 - 2x - 1 = 0$, con $a = 15, b = -2, c = -1$

    e) $x^2 - 4 = 0$, con $a = 1, b = 0, c = -4$

    f) $x^2 - 6x + 9 = 0$, con $a = 1, b = -6, c = 9$

12. $\alpha = 2$ o $\alpha = -2$

13. *a*) 1 *b*) 5 *c*) -4 *d*) -2 *e*) $-\frac{1}{2}$ *f*) 7 *g*) 9 *h*) $\frac{5}{2}$ *i*) $-\frac{7}{2}$

14. *a*) $x = 13 \;\vee\; x = -13$

    b) $x = 0 \;\vee\; x = -1$

    c) $x = 9 \;\vee\; x = 4$

    d) no tiene solución en $\mathbb{R}$

    e) $x = 7 \;\vee\; x = -5$

    f) $x = -7 \;\vee\; x = 5$

    g) $x = 6 \;\vee\; x = -1$

    h) $x = 3 \;\vee\; x = -2$

    i) $x = -12 \;\vee\; x = 9$

    j) $x = -\frac{1}{2} \;\vee\; x = 1$

    k) $x = 1 \;\vee\; x = \frac{4}{3}$

    l) $x = -2 \;\vee\; x = \frac{1}{4}$

    m) $x = -\frac{1}{3}$

    n) $x = \frac{3}{2},\; x = -\frac{1}{2}$

    ñ) $x = 1 + \sqrt{2} \;\vee\; x = 1 - \sqrt{2}$

    o) $x = 2 + \sqrt{3} \;\vee\; x = 2 - \sqrt{3}$

    p) no tiene solución en $\mathbb{R}$

    q) $x = 5 + \sqrt{5} \;\vee\; x = 5 - \sqrt{5}$

    r) $x = a + \sqrt{b} \;\vee\; x = a - \sqrt{b}$

    s) $x = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \;\vee\; x = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$

    t) $x = 3 \;\vee\; x = -3$

15. *a*) $c < 9$ *b*) $c = 9$ *c*) $c > 9$

16. *a*) 25 metros de largo y 4 metros de ancho

    b) 2 y 7

    c) aproximadamente 3 metros y 40 centímetros

    d) d1) 1,5 centímetros

    d2) 20 centímetros de largo y 13 centímetros de ancho

    e) 1 metro 80 centímetros

    f) 10 metros

    g) g1) El precio de compra es $\frac{360000}{x}$ y el precio de venta es $\frac{360000}{x} + 2000$

    g2) $(x-3)\left(\frac{360000}{x} + 2000\right)$

    g3) 40 floreros

    h) h1) Su nueva rapidez debe ser $x + 20$, el tiempo usual es $\frac{1120}{x}$ y el nuevo tiempo es $\frac{1120}{x+20}$.

    h2) aproximadamente a 97 $\frac{km}{h}$

17. *a*) $]-\infty, 4]$

    b) $[4, +\infty[$

    c) $]-\infty, 2]$

    d) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$

    e) $\left[1, \frac{4}{3}\right]$

    f) $]-\infty, -5[\, \cup\,]5, +\infty[$

    g) $\mathbb{R}$

    h) $]0, 4[$

    i) $]0, +\infty[$

    j) $[-2, 4]$

    k) $\emptyset$

    l) $]-\infty, 3[$

    m) $]-\infty, 0[\, \cup\,]2, +\infty[$

    n) $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

    ñ) $]-1, 0] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right[$

    o) $]-2, 0[\, \cup\,]2, +\infty[$

    p) $]-\infty, -1[\, \cup\,]-1, 1[$

    q) $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

    r) $[-2, -1] \cup\,]3, 8]$

    s) $\emptyset$

18. *a*) 64 minutos
    b) más de \$500000
    c) entre \$2500 y \$3750
    d) entre los 0 y los 6 segundos
    e) más de 4 años
    f) entre las 1 y las 4 horas

19. *a*) $|x| = 3$, cuya solución es $x = 3$ o $x = -3$
    b) $|x - 5| = 3$, cuya solución es $x = 2$ o $x = 8$
    c) $|x - 5| \leq 4$, cuya solución es $[1, 9]$
    d) $|x - 5| > 6$, cuya solución es $]-\infty, -1[\cup]11, +\infty[$
    e) $|x + 3| < 7$, cuya solución es $]-10, 4[$
    f) $|x + 3| \geq 4$, cuya solución es $]-\infty, -7] \cup [1, +\infty[$
    g) $5 \leq |x + 1| \leq 8$, cuya solución es $[-9, -6] \cup [4, 7]$

20. *a*) $\left\{1, -\frac{5}{2}\right\}$
    b) $\{3\}$
    c) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right\}$
    d) $\mathbb{R}$
    e) $\emptyset$
    f) $\left]-\frac{5}{2}, 1\right[$
    g) $\left]-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
    h) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$
    i) $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$
    j) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{5}\}$
    k) $]-\infty, -4[\cup]3, +\infty[$
    l) $[-10, -2]$
    m) $\mathbb{R} - \{0\}$

21. *a*) $]-\infty, -7[\cup]7, +\infty[$
    b) $]-12, 12[$
    c) $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$
    d) $\left[-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right]$

22. *a*) $]-\infty,-2] \cup [4,+\infty[$
    b) $]-9,1[$
    c) $]-\infty,-1] \cup]4,+\infty[$
    d) $[-9,1]$

23. a) $\frac{1}{2}$
    b) $\emptyset$
    c) $\left[0,\frac{1}{2}\right[$
    d) $\left[\frac{6}{5},2\right] \cup [3,+\infty[$
    e) $]-\infty,-1]$
    f) $[-2,2[$
    g) $[1,+\infty[$
    h) $[0,4[$
    i) $\emptyset$
    j) $[0,4[$
    k) $[7,11[$

24. *a*) 3000 personas
    b) 84 años
    c) en 2027

25. A 1 km y 250 metros

26. a) No es acotado inferiormente. Es acotado superiormente y su supremo es 3
    b) es acotado inferiormente y su ínfimo es -3. No es acotado superiormente
    c) es acotado inferiormente y su infimo es -3. Es acotado superiormente y su supremo es 3
    d) es acotado inferiormente y su infimo es -3. Es acotado superiormente y su supremo es 3
    e) es acotado superiormente por 2, el cual es su supremo. Es acotado inferiormente por 1, el cual es su ínfimo
    g) es acotado inferiormente por -1, el cual es su ínfimo. Es acotado superiormente por 1, el cual es su supremo

7.5. Inducción, progresiones y teorema del binomio.

1. *a*) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I.: 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$T.I.: 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Sumando $(k+1)^2$ en ambos miembros de la $H.I.$, obtenemos la $T.I.$

b) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

$$T.I. : 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Sumando 2^k en ambos miembros de la $H.I.$, obtenemos la $T.I.$

c) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I : 1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1} = \frac{r^k - 1}{r - 1}$$

$$T.I. : 1 + r + r^2 + \ldots + r^{k-1} + r^k = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$$

Sumando r^k en ambos miembros de la $H.I.$, obtenemos la $T.I.$

d) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I : 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + k(k + 2) = \frac{k(k + 1)(2k + 7)}{6}$$

$$T.I : 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + k(k+2) + (k+1)(k+3) = \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 9)}{6}$$

Sumando $(k + 1)(k + 3)$ en ambos miembros de la $H.I.$, obtenemos la $T.I.$

e) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! = (k + 1)! - 1$$

$$T.I : 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + kk! + (k + 1)(k + 1)! = (k + 2)! - 1$$

Sumando $(k + 1)(k + 1)!$ en ambos miembros de la $H.I.$, obtenemos la $T.I.$.

f) $n = 2$: queda a cargo del lector.

$$H.I. : 3^k > 1 + 2k$$

$$T.I. : 3^{k+1} > 3 + 2k$$

Multiplicamos la $H.I.$ por 3, obteniendo que

$$3^{k+1} > 3 + 6k$$

Por otro lado, para $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, se tiene que

$$3 + 6k > 3 + 2k$$

Combinando las dos últimas desigualdades obtenemos la $T.I.$.

g) $n = 2$: queda a cargo del lector.

$$H.I. : (1 + a)^k > 1 + ak$$

$$T.I. : (1 + a)^{k+1} > 1 + ak + a$$

Multiplicamos la $H.I.$ por $1 + a > 0$, obteniendo que

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + ak + a + a^2k$$

Por otro lado, para $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ y $a \neq 0$, se tiene que

$$1 + ak + a + a^2k > 1 + ak + a$$

Combinando las dos últimas desigualdades obtenemos la $T.I.$.

h) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I. : 2^k \geq 2k$$

$$T.I. : 2^{k+1} \geq 2k + 2$$

Multiplicamos la $H.I.$ por 2, obteniendo que

$$2^{k+1} \geq 4k$$

Por otro lado, si $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$4k \geq 2k + 2$$

Combinando las dos últimas desigualdades obtenemos la $T.I.$

i) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I.: 2^{k-1} \leq k!$$

$$T.I.: 2^k \leq (k+1)!$$

Multiplicamos la $H.I.$ por 2, obteniendo que

$$2^k \leq 2k!$$

Además, si $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$2k! \geq 2k + 2$$

Combinando las dos últimas desigualdades obtenemos la $T.I.$

j) Si $n = 2$, entonces la propiedad propuesta corresponde a

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 > 1$$

por lo que es verdadera.

$$H.I.: \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

$$T.I.: \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Sumando $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ en ambos miembros de la $H.I.$, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Luego como

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \Leftrightarrow k > 0$$

entonces combinando las dos últimas desigualdades obtenemos la $T.I.$.

k) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I.: \exists p \in \mathbb{N}: \frac{k^3 + 2k}{3} = p, \ \ T.I.: \exists q \in \mathbb{N}: \frac{(k+1)^3 + 2(k+1)}{3} = q$$

Desarrollando el miembro derecho de la T.I., obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)^3+2(k+1)}{3} &= \frac{(k^3+2k)+(3k^2+3k+3)}{3}\\ &= \frac{3p+3(k^2+k+1)}{3}(por H.I.)\\ &= p+k^2+k+1=q\end{aligned}$$

Como el valor de q obtenido pertenece a $\mathbb{N}$, entonces queda demostrada la $T.I.$

$l)$ $n=1$: queda a cargo del lector.

$$H.I.: \exists p\in\mathbb{N}: \frac{4^k-3k-1}{9}=p,\ T.I.: \exists q\in\mathbb{N}: \frac{4^{k+1}-3k-4}{9}=q$$

Desarrollando el miembro derecho de la T.I., obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{4^{k+1}-3k-4}{9} &= \frac{4\cdot 4^k-3k-4}{9}\\ &= \frac{4(9p+3k+1)-3k-4}{9}(por H.I.)\\ &= \frac{9(4p+k)}{9}=4p+k=q\end{aligned}$$

Como el valor de q obtenido pertenece a $\mathbb{N}$, entonces queda demostrada la $T.I.$

$m)$ $n=1$: queda a cargo del lector.

$$H.I.: \exists p\in\mathbb{N}: \frac{6^{2k}-2^{2k}}{4}=p,\ T.I.: \exists q\in\mathbb{N}: \frac{6^{2k+2}-2^{2k+2}}{4}=q$$

Desarrollando el miembro derecho de la T.I., obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{6^{2k+2}-2^{2k+2}}{4} &= \frac{36\cdot 6^{2k}-4\cdot 2^{2k}}{4}\\ &= \frac{36(4p+2^{2k})-4\cdot 2^{2k}}{4}(por H.I.)\\ &= \frac{4(36p+8\cdot 2^{2k})}{4}=36p+8\cdot 2^{2k}=q\end{aligned}$$

Como el valor de q obtenido pertenece a $\mathbb{N}$, entonces queda demostrada la $T.I.$

n) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I. : \exists p \in \mathbb{N} : \frac{x^{2k} - y^{2k}}{x - y} = p, \; T.I. : \exists q \in \mathbb{N} : \frac{x^{2k+2} - y^{2k+2}}{x - y} = q$$

Desarrollando el miembro derecho de la T.I., obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{x^{2k+2} - y^{2k+2}}{x - y} &= \frac{x^2 \cdot x^{2k} - y^2 \cdot y^{2k}}{x - y} \\ &= \frac{x^2(p(x-y) + y^{2k}) - y^2 \cdot y^{2k}}{x - y}(por H.I.) \\ &= \frac{(x-y)(x^2 p + (x+y) \cdot y^{2k})}{x - y} = x^2 p + (x+y) \cdot y^{2k} = q \end{aligned}$$

Como el valor de q obtenido pertenece a $\mathbb{N}$, entonces queda demostrada la $T.I.$

ñ) Para $n = 1$, se tiene que $ab = ab$, por lo que la aseveración es verdadera.

$$H.I. : a^k \cdot b^k = (ab)^k, \; T.I. : a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (ab)^{k+1}$$

Desarrollando el miembro derecho de la T.I., obtenemos

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a \cdot b) \cdot (a^k \cdot b^k) = (a \cdot b) \cdot (ab)^k (por H.I.) = (ab)^{k+1}$$

de donde queda demostrada la $T.I.$

o) $n = 1$: queda a cargo del lector.

$$H.I. : (-1)^{2k} = 1$$

$$T.I. : (-1)^{2k+2} = 1$$

Desarrollando el miembro izquierdo de la $T.I.$, tenemos que

$$(-1)^{2k+2} = (-1)^{2k} \cdot (-1)^2 = 1 \cdot 1 (por H.I.) = 1$$

de donde queda demostrada la $T.I.$

p) $n = 1$: Si un conjunto A tiene 1 elemento, o sea, si $A = \{a\}$, entonces $P(A) = \{\emptyset, a\}$, por lo que $P(A)$ tiene $2 = 2^1$ elementos, y la aseveración es verdadera.

La $H.I.$ es que cualquier conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos. Como $T.I.$ queremos probar que cualquier conjunto B con $n+1$ elementos tiene 2^{n+1} subconjuntos. Si B es un conjunto de $n+1$ elementos, entonces podemos expresarlo como $B = A \cup \{b\}$, con A un conjunto de n elementos, y b un elemento de B tal que $b \notin A$. Los subconjuntos de A también son subconjuntos de B, y son 2^n (Por H.I.). Además, si a cada subconjunto de A le agregamos el elemento b, obtenemos otro subconjunto de B. Los subconjuntos de B formados de esta forma también son 2^n. De este modo, B tiene $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos, y la $T.I.$ queda probada.

2. *a*) $\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n$
   b) $\dfrac{2n^3+3n^2+n-330}{6}$
   c) $\dfrac{2n^3+27n^2+25n+96}{6}$
   d) $(n+1)^4 - 1$
   e) n
   f) $\dfrac{1}{n+1} - 1$

3. *a*) $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$
   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   c) 3025

4. $S_n = n(n+1)$, por lo que $S_100 = 100 \cdot 101 = 10100$.

5. De 5040 formas

6. De 210 formas

7. *a*) De 360 formas
   b) de 24 formas
   c) 15 grupos

8. *a*) De 40320 formas
   b) de 336 formas

c) de 120 formas

9. Sean $k, n \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!}{(k-1)!k(n-k)!} \\ &= \frac{kn! + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

10. Use la fórmula del teorema del binomio con $a = 1$ y $b = 1$

11. $n = 4$

12. $(\sqrt{2}-1)^6 + 70\sqrt{2} = (8 - 24\sqrt{2} + 60 - 40\sqrt{2} + 30 - 6\sqrt{2} + 1) + 70\sqrt{2} = 99$

13. a) $-\binom{100}{4}x^{188}\frac{1}{2^{96}3^4}$

    b) $-\binom{100}{65}x^5\frac{1}{2^{35}3^{65}}$

    c) no existe

    d) Como 101 términos, entonces son 50 términos a la derecha y 50 términos a la izquierda del término central. De este modo, el término central está en la posición 51, por lo que corresponde a $-\binom{100}{50}x^{50}\frac{1}{6^{50}}$

14. a) $\binom{27}{27}2^{27}y^{-54}$

    b) $\binom{27}{3}3^{24}2^3y^{18}$

    c) $\binom{27}{9}3^{18}2^9$

    d) $\binom{27}{13}3^{14}2^{13}y^{-12}$ y $\binom{27}{14}3^{13}2^{14}y^{-15}$

15. $\binom{18}{12}x^{30}y^{30}$

16. $n = 6$

17. a) $2 + 3n$ b) no existe

18. a) $2n - 1$
    b) si, y que corresponde a la que está en la posición 147

19. Hay 16 filas y 5 tablas en la parte superior

20. En 15 días

21. $\frac{1}{16}$ cms

22. a) \$61000
    b) \$913000
    c) en la tercera semana de noviembre

23. sí, dado que a esa hora, deberían haberse enterado del secreto $22,3$ millones de personas

24. $a = -2$ y $d = 4$

25.
    - $a = 648$ y $r = \frac{1}{3}$
    - $a = 648$ y $r = -\frac{1}{3}$

26. sus primeros 4 términos son $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, y $d = 1$

27. a) 7 términos b) 147

28. a) 9 términos b) 1533

29. $\dfrac{406(49 + 2884)}{2}$

30. $32(2^{26} - 1)$

31. a) $k = 1$ y la progresión es $2, 5, 8$

b)
- $k = 2$, y la progresión es $3, 6, 12$
- $k = -2$, y la progresión es $-1, 2, -4$

7.6. Geometría Analítica.

1. a) $(3, -5)$, el cual se encuentra en el cuarto cuadrante

   b) $(2, 3)$, el cual se encuentra en el primer cuadrante

   c) $(1, -1)$, el cual se encuentra en el cuarto cuadrante

2. a) $(4, 6)$

   b) $2\sqrt{13}$ unidades

3. a) Su pendiente es 3

   b) creciente

   c) aumenta de 3 en 3

   d) aumenta de 6 en 6

4. a) Su pendiente es -2

   b) decreciente

   c) disminuye de 2 en 2

   d) disminuye de 4 en 4

5. No, dado que la pendiente m es tal que

$$m = \frac{20}{80\sqrt{5}} = 0{,}11 > 0{,}08$$

6. a) $D = (-3, 1)$

   b) si lo es, dado que sus ángulos interiores son rectos

   c) $16\sqrt{2}$ unidades

   d) 24 unidades cuadradas

7. Pertenecen a la recta los puntos $A_1(3, 1), A_3(6, 3), A_4(-3, -3)$

8. Si, y su ecuación es $y = -3x + 2$

9. Con cualquiera de las dos formas, el área es de 14 unidades cuadradas.

10. $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$

11.
    a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
    b) $x = 3$
    c) $y = -1$
    d) $y = -x + 3$
    e) $y = 5$
    f) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$
    g) $y = \frac{3}{2}x + 2$
    h) $y = 4x + 2$
    i) $y = -x + 5$ e $y = x + 1$

12. $y = -\frac{20}{13}x + 3$ e $y = -\frac{14}{13}x - 3$

13. $y = x - 8$

14. $(0, 1)$ y $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

15.
    a) $A = (4, 8), B = (0, -6), C = (6, -2)$
    b) el área de $\triangle\ ABC$ es 34 unidades cuadradas y el área de $\triangle\ MNP$ es 8,5 unidades cuadradas

16.
    a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
    b) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
    c) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
    d) son colineales, dado que los tres puntos pertenecen a la recta de ecuación $y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$

17.
    a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
    b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
    c) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 61$
    d) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
    e) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
    f) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

18.
    a) $C : x^2 + y^2 = 1$ no, pertenece al exterior
    b) si

c) no, pertenece al interior

19. *a*) $C = (3, -2)$

    b) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

20. a) La distancia es 2 unidades. Si

    b) 36 unidades cuadradas

    c) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$

    d) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$

    e) $3x - y + 2 = 0$. Es una recta que está a igual distancia de las dos rectas en cuestión.

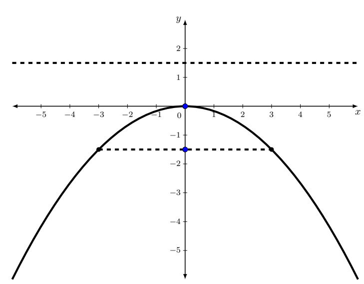
    f) $y = 0$ y $x = 1$. Estas rectas son las bisectrices de los ángulos que forman las rectas en cuestión.

21. *a*) $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$

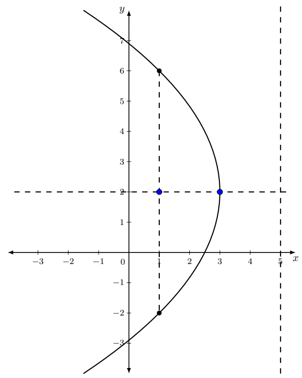
    b) $k = \frac{3}{4}$ o $k = -\frac{3}{4}$

    c) $k < -\frac{3}{4}$ o $k > \frac{3}{4}$

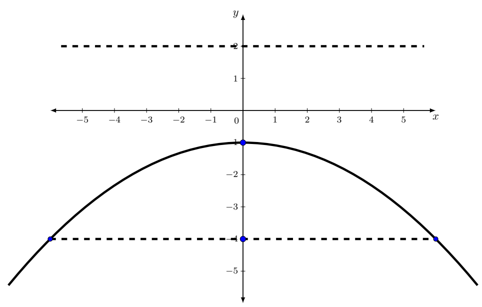
22. *a*) Ecuación: $x^2 = -6y$, directriz: $y = \frac{3}{2}$, eje de simetría: $x = 0$, longitud cuerda focal: 6



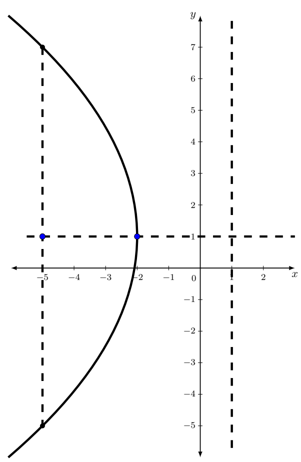
    b) ecuación: $-8(x-3) = (y-2)^2$, directriz: $x = 5$, eje de simetría: $y = 2$, longitud cuerda focal: 8



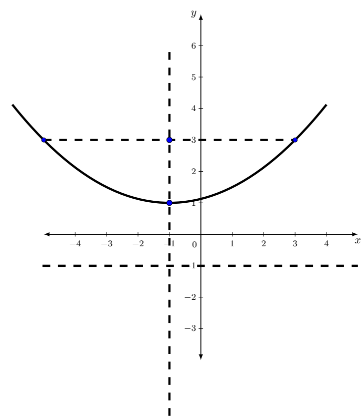
c) ecuación: $-12(y+1) = x^2$, foco: $(0,-1)$, eje de simetría: $x = 0$, , longitud cuerda focal: 12



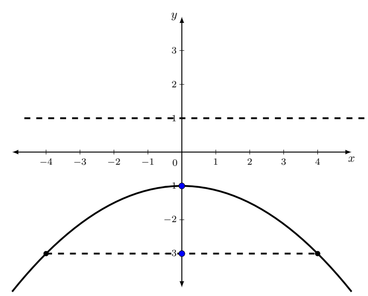
d) ecuación: $-12(x+2) = (y-1)^2$, foco: $(-5,1)$, eje de simetría: $y = 1$, , longitud cuerda focal: 12



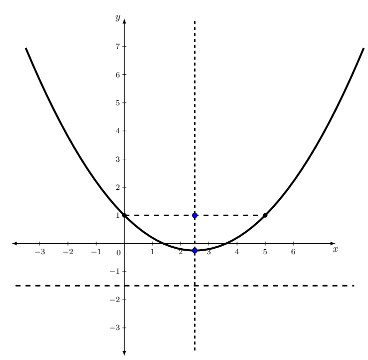
e) ecuación: $8(y-1) = (x+1)^2$, vértice: $(-1,1)$, eje de simetría: $x = -1$, longitud cuerda focal: 8



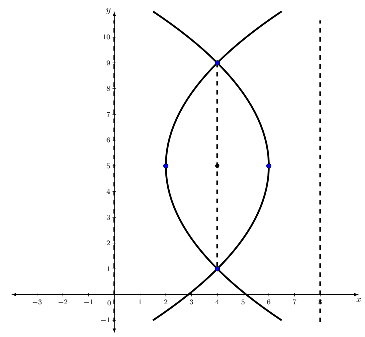
f) ecuación: $-8(y+1) = x^2$, vértice: $(0,-1)$, foco: $(0,-3)$, eje de simetría: $x=0$



g) ecuación: $5\left(y+\frac{6}{5}\right) = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2$, vértice: $\left(\frac{5}{2},-\frac{6}{5}\right)$, foco: $\left(\frac{5}{2},1\right)$, eje de simetría: $x=\frac{5}{2}$, longitud cuerda focal: 5



23. $8(x-2)=(y-5)^2$ y $-8(x-6)=(y-5)^2$



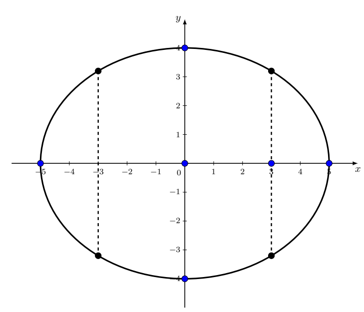
24. $3x+y-2=0$ y $2x-y-8=0$

25. *a*) $y=\dfrac{1}{240}x^2$

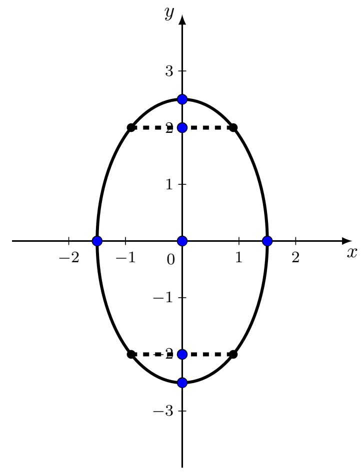
    b) Cada torre que está a 20 metros del punto más bajo, tiene una altura de 2 metros y 60 cms aproximadamente. cada torre que está a 40 metros del punto más bajo, tiene una altura de 6 metros y 60 cms aproximadamente

26. A 1,66 metros aproximadamente

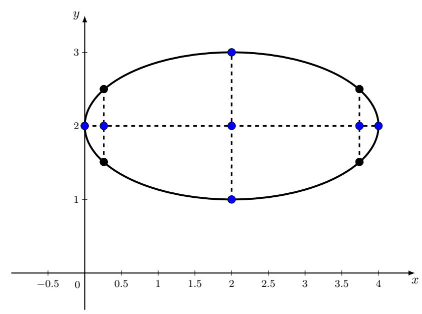
27. *a*) Ecuación: $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$, vertice faltante: $(-5,0)$, foco faltante: $(-3,0)$, extremos eje menor $(0,4),(0,-4)$, longitud cuerda focal:$6,4$



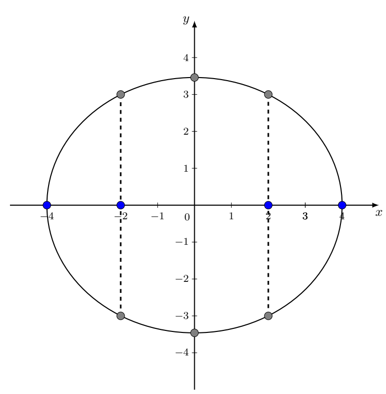
b) ecuación: $\frac{x^2}{(2{,}5)^2} + \frac{y^2}{(1{,}5)^2} = 1$, vértice faltante: $(-2{,}5; 0)$, focos: $(-2, 0), (2, 0)$, extremos eje menor $(0, 1{,}5), (0, -1{,}5)$ longitud cuerda focal:$1, 8$



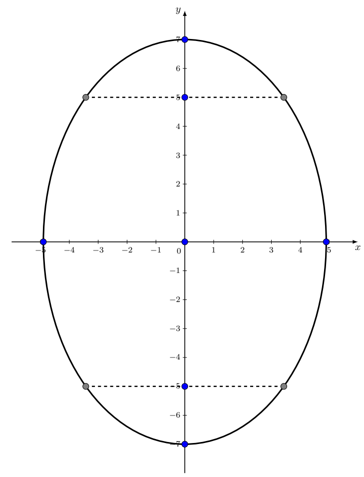
c) ecuación:$\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1$, centro:$(2, 2)$, focos:$(0{,}27; 2)(3, 73; 2)$, extremos del eje menor: $(2, 1), (2, 3)$, longitud cuerda focal:1



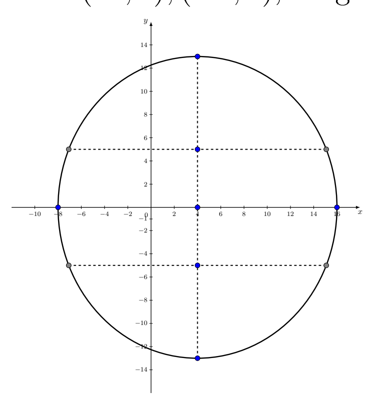
d) ecuación:$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{\sqrt{12}^2} = 1$, centro:$(0, 0)$, vértices:$(-4, 0), (4, 0)$, extremos del eje menor: $(0; 0, 346), (0; -0{,}346)$, longitud cuerda focal:6



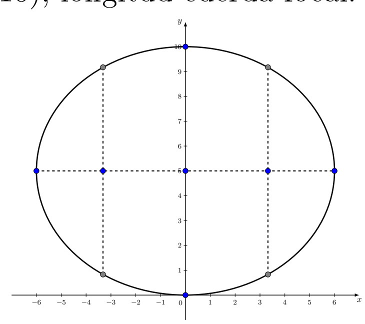
e) ecuación: $\frac{x^2}{(\sqrt{24}^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$, centro: $(0,0)$, vértices: $(0,7),(0,-7)$, extremos del eje menor: $(4,9;0),(-4,9;0)$, longitud cuerda focal: $6,85$



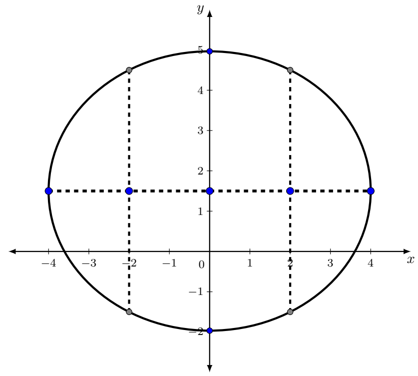
f) ecuación: $\frac{(x-4)^2}{12^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1$, foco faltante: $(4,-5)$, vértice faltante: $(4,-13)$, extremos del eje menor: $(16,0),(-8,0)$, longitud cuerda focal: $22,15$



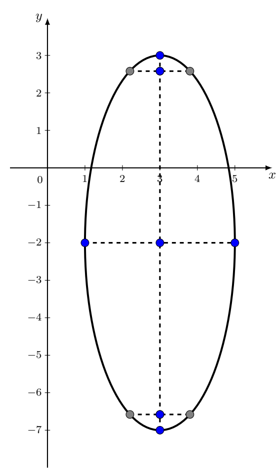
g) ecuación: $\frac{x^2}{6^2} + \frac{(y-5)^2}{5^2} = 1$, centro: $(0,5)$, vértice faltante: $(-6,5)$, extremos del eje menor: $(0,0)(0,10)$, longitud cuerda focal: $8,3$



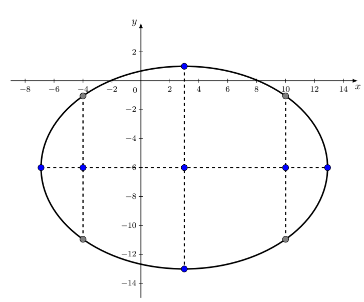
h) ecuación: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-1{,}5)^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$, centro: $(0, 1{,}5)$, vértices: $(-4; 1{,}5)$, $(4; 1{,}5)$, extremos del eje menor: $(0; 4{,}96)$, $(0, -1{,}96)$, longitud cuerda focal: 6



i) ecuación: $\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{5^2} = 1$, centro: $(3, -2)$, focos: $(3, -7), (3, 3)$, vértices: $(3; -6{,}6), (3; 2{,}6)$, extremos del eje menor: $(1, -2), (5, -2)$, longitud cuerda focal: 1,6



j) ecuación: $\frac{(x-3)^2}{10^2} + \frac{(y+6)^2}{7^2} = 1$, centro: $(3, -6)$, focos: $(-4, -6), (10, -6)$, vértices: $(-7, -6), (13, -6)$, extremos del eje menor: $(3, -13), (3, 1)$, longitud cuerda focal: 9,8



28. intersecciones en $(3,2)$ y $\left(4, \frac{3}{2}\right)$

29. $b = 5$ o $b = -5$

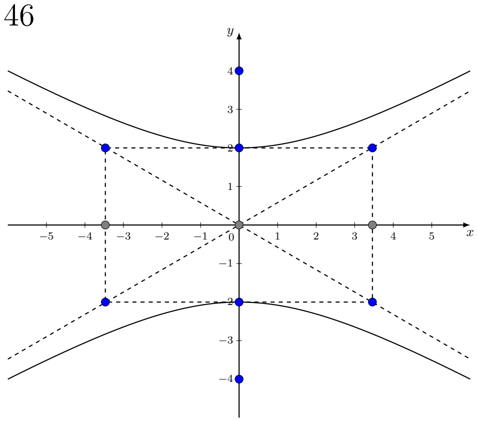
30. a) La mayor distancia es de 69,8 millones de kms, y la menor distancia es de 46 millones de kms

    b) aproximadamente 359,7 millones de kms

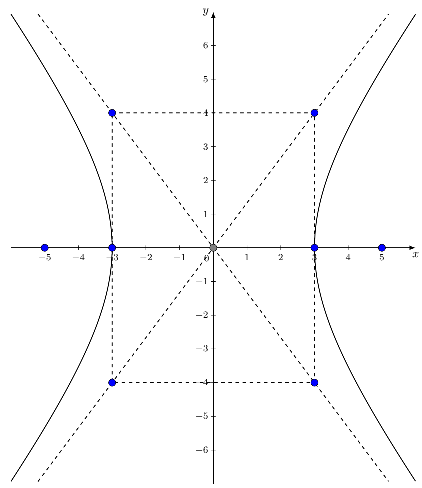
    c) un año es de aproximadamente 88 días terrestres

31. Si, dado que si el camión tiene ese ancho, entonces para pasar por el puente debe tener a lo más 3,34 metros de altura

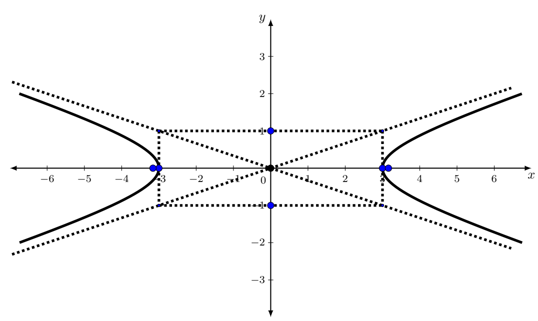
32. *a*) Ecuación: $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$, centro: $(0,0)$, foco faltante: $(0,-4)$, vértice faltante: $(0,-2)$, extremos del eje conjugado:$(-3{,}46; 0), (3{,}46; 0)$, longitud cuerda focal:$3,46$



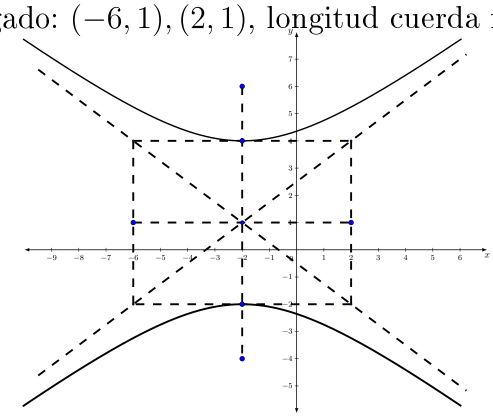
b) ecuación: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, centro: $(0,0)$, foco faltante: $(-5,0)$, vértice faltante: $(-3,0)$, extremos del eje conjugado:$(0,4),(0,-4)$, longitud cuerda focal:$0,88$



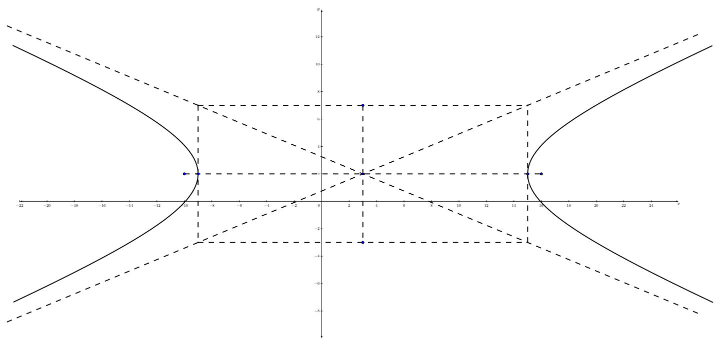
c) ecuación: $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$, centro: $(0,0)$, foco faltante: $(-3{,}16,0),(3{,}16,0)$, vértice faltante: $(3,0)$, extremos del eje conjugado: $(0,-1),(0,1)$, longitud cuerda focal:$0,66$



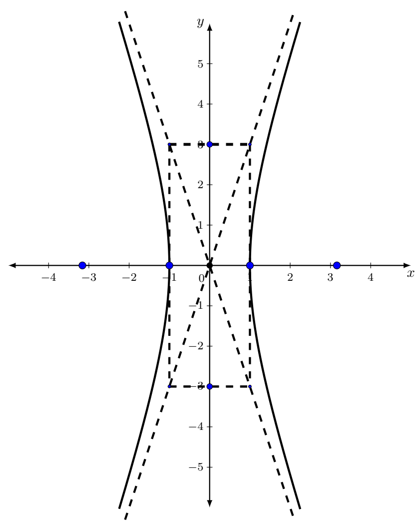
d) ecuación: $\frac{(y-1)^2}{3^2} - \frac{(x+2)^2}{4^2} = 1$, centro: $(-2,1)$, focos: $(-2,6)(-2,-4)$, extremos del eje conjugado: $(-6,1),(2,1)$, longitud cuerda focal:$1,5$



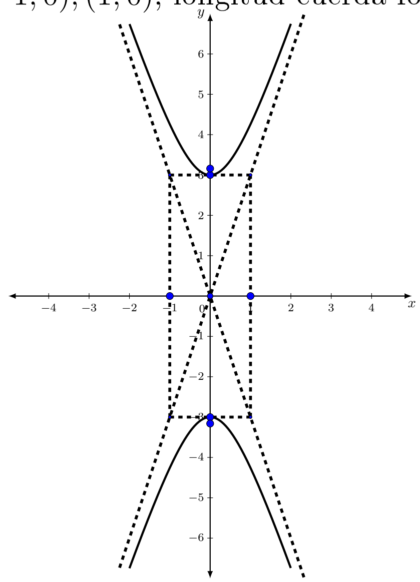
e) ecuación: $\frac{(x-3)^2}{12^2} - \frac{(y-2)^2}{5^2} = 1$, centro: $(3,2)$, focos: $(-2,6),(-2,-4)$, vértices:$(-9,2),(15,2)$, extremos del eje conjugado: $(3,-3),(3,7)$, longitud cuerda focal:$0,83$



f) ecuación: $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, centro: $(0,0)$, focos: $(-3{,}16,0)(3{,}16,0)$, extremos del eje conjugado: $(0,-3),(0,3)$, longitud cuerda focal:6.



g) ecuación: $\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1$, centro: $(0, 0)$, focos: $(0, -3{,}16)(0, 3{,}16)$, extremos del eje conjugado: $(-1, 0), (1, 0)$, longitud cuerda focal:6



33. No existen

34. 156 unidades cuadradas

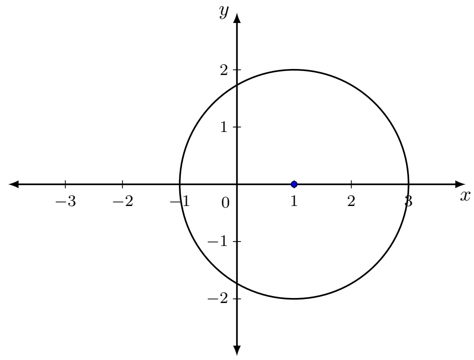
35. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$

36. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{4} = 1$

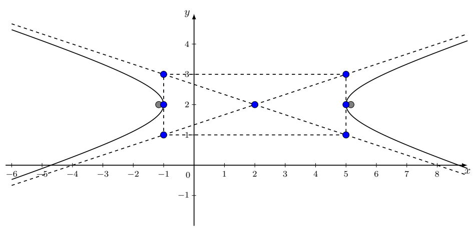
37. $\left[-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right]$

38. Aproximadamente a 2,7 km

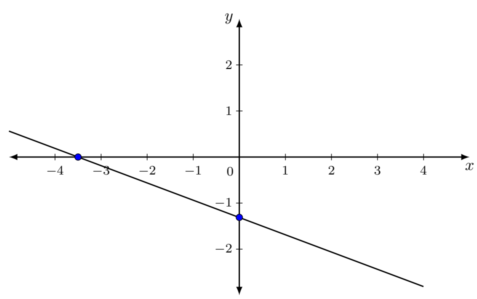
39. *a*) Circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 2



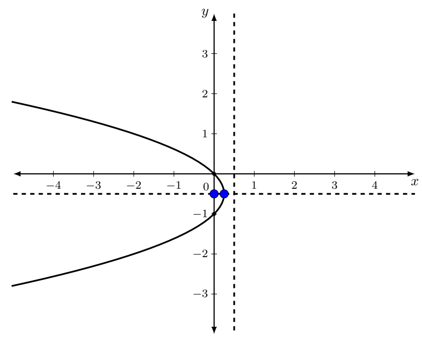
b) hipérbola de centro en $(2,2)$, $a=3, b=1$, eje transversal paralelo al eje x



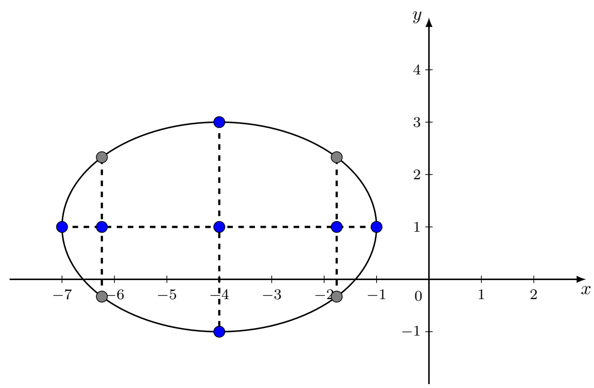
c) recta de pendiente $-\frac{3}{8}$ e intersección con el eje y en $\left(0,-\frac{21}{16}\right)$



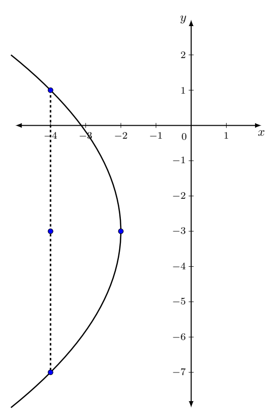
d) parábola de vértice $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, con $p = -\frac{1}{4}$ y abre hacia la izquierda



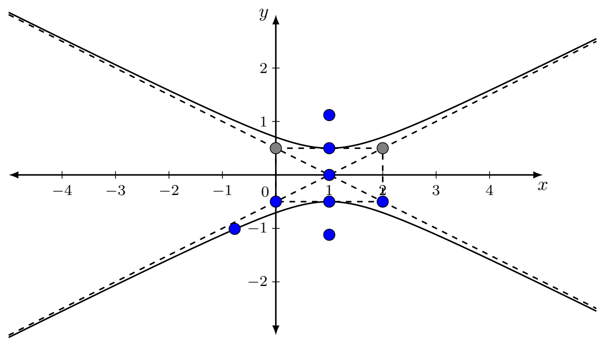
e) elipse de centro en $(-4, 1)$ con $a = 3$ y $b = 2$, eje mayor paralelo al eje y



f) parábola de vértice $(-3, -2)$, con $p = -2$ y abre hacia abajo



g) hipérbola de centro en $(1, 0)$, $a = \frac{1}{2}, b = 1$, eje transversal paralelo al eje y



40. Circunferencia de ecuación $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

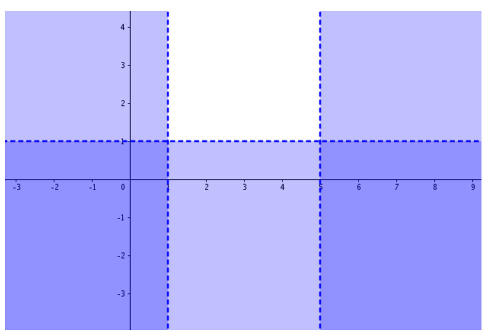
41. La elipse de ecuación $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{36}=1$

42. La parábola de ecuación $12(x-1)=(y-6)^2$

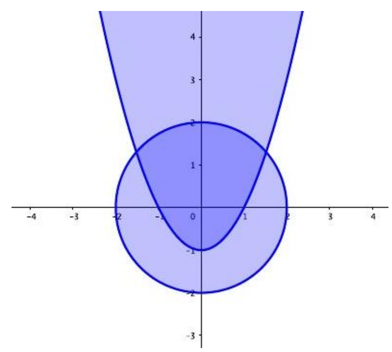
43. La hipérbola de ecuación $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

44. La circunferencia de ecuación $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$

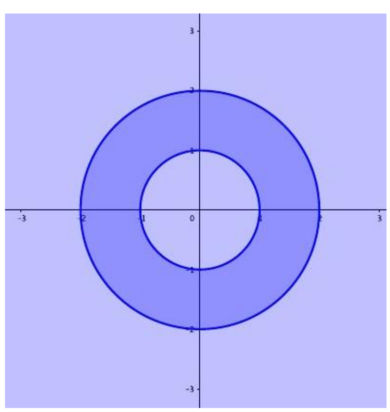
45. a)



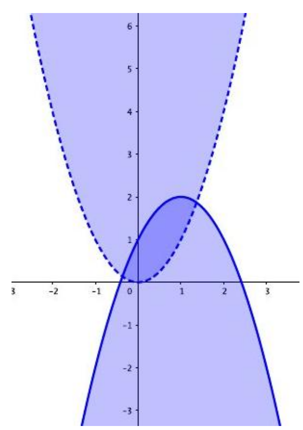
c)



b)



d)



46. $x^2<4(y-1)^2$ y $x^2+\frac{y^2}{4}<1$

Bibliografía

[1] Larson, R.; Edwards, B. (2010) *Cálculo 1 de una variable. Novena edición.* McGraw- Hill/Interamericana Editores.

[2] Lewin, R.; López, A.; Martínez, S.; Rojas, D.; Zanocco, P. (2013) *REFIP Números.* Ediciones SM Chile S.A.

[3] Swokowski, E.; Cole, J. (2011) *Álgebra y Trigonometría, con Geometría Analítica. 13a edición.* Cengage Learning Editores.

[4] Polya, G.(1981) *Cómo plantear y resolver problemas. Novena reimpresión.* Editorial Trillas.

[5] Zill, D.; Dewar, J. (2012) *Álgebra, trigonometría y geometría analítica. Tercera edición.* McGraw- Hill/Interamericana Editores.

[6] Lamon, S. (2008) *Teaching fractions and ratios for understanding. Segunda edición.* Taylor & Francis e-Library.