Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Sistemas Dinámicos Discretos

Tiling with Bars and Satisfaction of Boolean Formulas. (Eric Rémila)

Manuel Sánchez Uribe

2 de Diciembre de 2008

Índice

Índice

Definiciones

- Celda:
- Figura:
- Área de una figura:
- Vecino:
- Celda aislada:
- Peak:
- Bridge:
- m-barra:

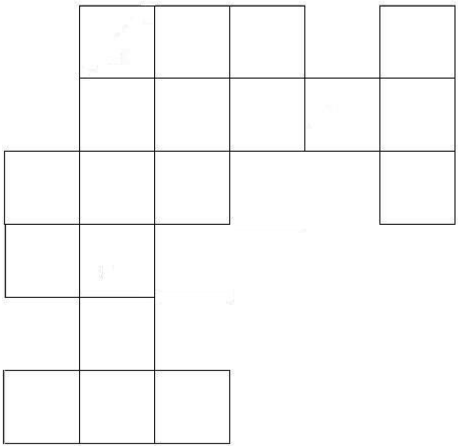


Figura F

Índice

Diferentes formulaciones del Problema

- Un "tiling" ϕ de una figura F es un conjunto de 2-barras y 3-barras incluídas en F tal que cada celda de F está incluída en exactamente un elemento del conjunto ϕ
- Un packing Π de una figura F es un conjunto de 2-barras incluídas en F tal que cada celda de F esta incluída en a lo más un elemento del conjunto Π.
- Un "default" C de un packing de F es una celda de F que no tiene un elemento de una barra del packing.
- Un "default" C de un packing Π de F es "pointed" si existe una B 2-barra de Π tal que $B \cup C$ es una 3-barra.

Proposición 1

Sea F una figura finita. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) Existe un embaldozado ϕ de F.

ii) Existe un packing Π de F, y todos sus defaults son peaks. Además, un embaldozado de F puede ser obtenido desde un packing de F en tiempo lineal y el recíproco.

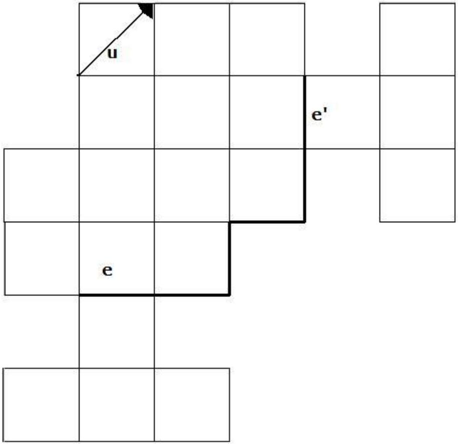
Dem :

Supongamos que existe ϕ un tiling de la figura F. un packing es obtenido al reemplazar las 3-barras por 2-barras.

Supongamos que existe Π un packing de F tal que todo default es pointed. Entonces para todo default C de Π escogemos una 2-barra B_C tal que $C \cup B_C$ es una 3-barra. Para cada B en Π, sea B' la barra formada por B y celdas C tal que $B_C = B$. Luego el conjunto de barras B' es de 2-barras, 3-barras y 4 barras. Entonces se reemplazan las 4-barras por dos de 2-barras.
Las transformaciones pueden ser hechas en tiempo lineal.

Índice

- F figura finita.
- α conjunto de lados de los peaks de F que no son lados de la frontera de F.
- β conjunto de lados de los bridges de F que no son lados de la frontera de F.
- Conflicto.



Conflicto entre e y e'

Para cada lado e de $\alpha \cup \beta$ se define la variable booleana x_e.

REGLAS DE COMPATIBILIDAD

1. Si e es un elemento de α, entonces $x_e = 1$.
2. Si e y e' son lados de el mismo bridges, entonces $x_e \vee x_{e'} = 1$.
3. Si e y e' están en conflicto en F, entonces $\overline{x}_e \vee \overline{x}_{e'} = 1$.

Proposición 2

Si existe un tiling ϕ para una figura F entonces la conjunción de las reglas de compatibilidad puede ser satisfecha

Dem:

Dada F supongamos que existe un tiling ϕ. La variable x_e toma el valor 1 cuando las dos celdas de F que comparten el lado e están en la misma barra y la variable x_e toma el valor 0 en otro caso.

Índice

Teorema

Sea F una figura (sin celdas aisladas) tal que las reglas de compatibilidad de F pueden ser simultáneamente satisfechas. Entonces existe un packing de F tal que cada default es pointed.

Inicio:

- Construir una lista λ de los verticales bridges y los verticales peaks.
- Marcar los lados de la frontera de F y contruir una lista Λ de celdas con 2 lados verticales marcados y un lado horizontal marcado.
- Π denota un conjunto de 2-barras. Parte con $\Pi = \emptyset$

Paso 1: sucesivamente tomar cada celda A de λ

- Si A es es pointed o está cubierta por un 2-barra, tomar la siguiente.
- Sino sea A' y A'' los vecinos de arriba y abajo de A, y sea e' y e'' los lados asociados. Si e' es una lado de $\alpha \cup \beta$ y $x_{e'} = 1$, poner el 2-barras bertical $B_1 = A \cup A'$ en el conjunto Π y marcar los lados verticales de A'.
  Sino, poner $B_2 = A \cup A''$ en Π y marcar los lados verticales de Π.
  En ambos casos actualizar la lista Λ.

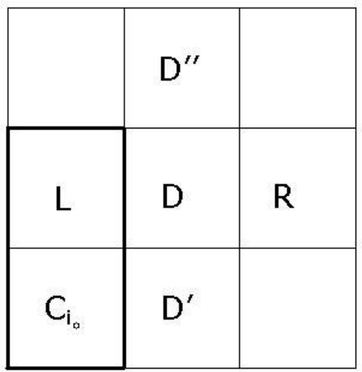
Paso 2: Tomar la primera celda C de Λ

- Si C es es pointed o está cubierta por un 2-barra, Borrarla de la lista Λ.
- Sino, sea e el lado no marcado de C. Poner una vertical 2-barra $B = C \cup C'$ en Π, donde C y C' son las celdas que contienen a e. Marcar los lados verticales de C' y actualizar la lista Λ.
- Repetir hasta que Λ esté vacía.

Paso 3: Sucesivamente tomar cada celda D de F.

- Si D es es pointed o está cubierta por un 2-barra, tomar la siguiente.
- Sino, sea L y R los vecinos de la izquierda y derecha de D. Si L es una celda de F que no ha sido previamente cubierta por una 2-barra, poner $B' = D \cup L$ en Π. Sino poner $B'' = D \cup R$.

Algoritmo



Ejemplo

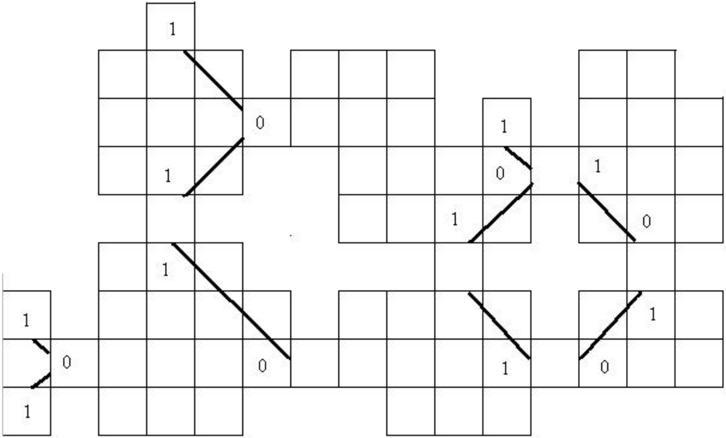


Figura 1: Input

Ejemplo

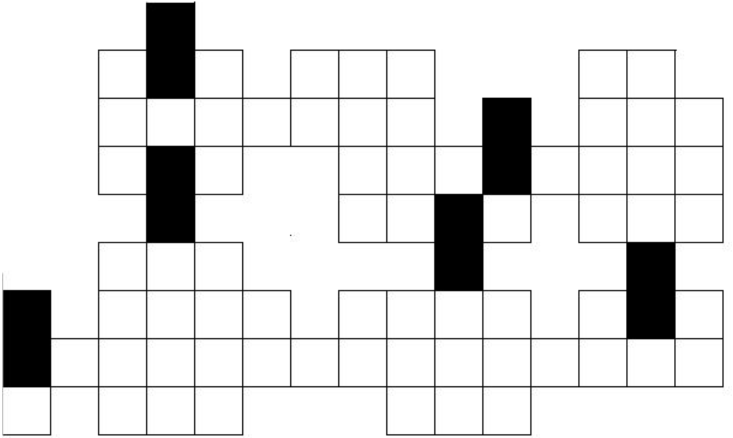


Figura 2: Paso 1

Ejemplo

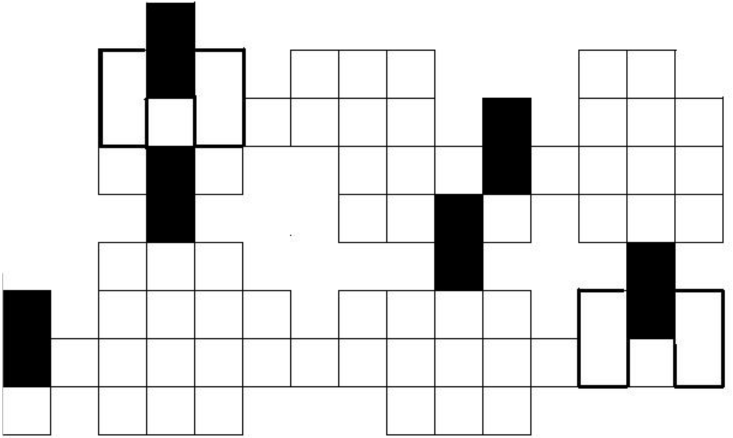


Figura 3: Paso 2

Ejemplo

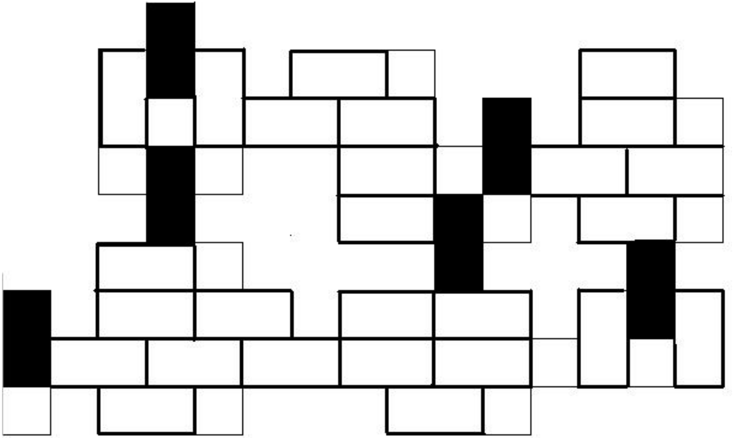


Figura 4: Paso3

Índice

Con n el área de la figura F y m el número de lados de las celdas de F. Notar que $m \leq 4n$ y $n \leq 2m$.

1. Verificar que F no tiene celdas aisladas. $\mathcal{O}(n)$.
2. Construir la lista de condiciones de compatinilidad. $\mathcal{O}(n)$.
3. Solución del problema lógico 2-SAT. $\mathcal{O}(m)$.
4. Ejecución del algoritmo de packing. Cada paso $\mathcal{O}(n)$.
5. Construcción de un Tiling desde el Packing. $\mathcal{O}(n)$.

Conclusión: Algoritmo Lineal de Tiling.

Índice

Resultado Principal

El problema de la existencia de un Tiling para una figura F con barras de largo 2 o 3 puede ser reducido en tiempo lineal a el problema lógico 2-SAT.