Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Sistemas Dinámicos Discretos

Propiedades Dinamicas de las redes MIN-MAX (MMN)

Bruno Karelović

9 de Diciembre de 2008

Índice

Índice

Definiciones

- $W = (w_{ij})$ matriz de pesos simétrica de $n \times n$
- $G(W) = (V, E)$ su grafo asociado no dirigido.
- $V = \{1, ..., n\}$ las neuronas.
- $E = \{(i, j) : w_{ij} \neq 0\}$ el conjunto de arcos.
- $V_i = \{j \in V : w_{ij} \neq 0\}$ los vecinos de la neurona i.
- $\{MA, MI\}$ una partición de V.

Función de activación local

La función de activación local está definida de la siguiente forma

$$y_i = \operatorname{sgn}\{f_i(w_{ij}x_j : j \in V_i)\} \quad \forall i \in V,\ x \in \{-1,1\}^n$$

donde

$$f_i(u_j : j \in V_i) = \begin{cases} \text{máx}\{u_j : j \in V_i\} & \text{si } i \in MA \\ \text{mín}\{u_j : j \in V_i\} & \text{si } i \in MI \end{cases}$$

Ejemplo con actualización sincrónica

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \text{-}2 & \text{-}3 & 1 \\ \text{-}2 & 0 & 0 & 1 \\ \text{-}3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} MA = \{1,2\} \\ MI = \{3,4\} \end{array}$$

$x(t) \setminus i$	1	2	3	4
$x(0)$	1	1	1	-1
$x(1)$	-1	-1	-1	1
$x(2)$	1	1	1	-1

Ejemplo con actualización secuencial

Para la iteración secuencial vemos a $x(t)$ de tal forma que una iteración es completada si $t \in \{kn : k \in \mathbb{N}_0\}$

$x(t) \setminus i$	1	2	3	4
$x(0)$	1	1	1	-1
$x(1)$	-1	1	1	-1
$x(2)$	-1	1	1	-1
$x(3)$	-1	1	-1	-1
$x(4)$	-1	1	-1	-1
$x(5)$	1	1	-1	-1
$x(6)$	1	-1	-1	-1
$x(7)$	1	-1	-1	-1
$x(8)$	1	-1	-1	-1

Índice

PROPOSICIÓN

Sólo interesa el signo de w_{ij}, es decir, dada una MMN $\mathcal{A} = \{G = (V, E), W, MA, MI\}$ existe una MMN $\mathcal{B} = \{G = (V, E), \tilde{W}, MA, MI\}$ con el mismo comportamiento, tal que $\tilde{w}_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

DEMOSTRACÓN

$$(\tilde{w})_{ij} := \mathrm{sgn}(w_{ij})$$

$$\mathrm{sgn}(\text{máx}\{a_1, ..., a_n\}) = \text{máx}\{\mathrm{sgn}(a_1), ..., \mathrm{sgn}(a_n)\}$$

$$\mathrm{sgn}(\text{mín}\{a_1, ..., a_n\}) = \text{mín}\{\mathrm{sgn}(a_1), ..., \mathrm{sgn}(a_n)\}$$

$$\mathrm{sgn}(ab) = \mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(b)$$

Dada una MMN $\mathcal{A} = \{G = (V, E), W, MA, MI\}$, definamos una red $\mathcal{B} = \{G = (V, E), \tilde{W}, MA = V\}$

$$\tilde{w}_{ij} := \begin{cases} w_{ij} & \text{si } i \in MA, j \in MA \text{ o } i \in MI, j \in MI \\ -w_{ij} & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} x_i & \text{si } i \in MA \\ -x_i & \text{si } i \in MI \end{cases}$$

Dada una MMN $\mathcal{A} = \{G = (V, E), W, MA, MI\}$, definamos una red $\mathcal{B} = \{G = (V, E), \tilde{W}, MA = V\}$

$$\tilde{w}_{ij} := \begin{cases} w_{ij} \ \text{ si } \ i \in MA, j \in MA \text{ o } i \in MI, j \in MI \\ -w_{ij} \ \text{ e.o.c.} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} x_i \ \text{ si } \ i \in MA \\ -x_i \ \text{ si } \ i \in MI \end{cases}$$

TEOREMA

Sean F y G las funciones de activación global de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente. Entonces

$$\varphi \circ F = G \circ \varphi$$

Demostración

Sea $x \in \{-1,1\}^n$ e $i \in MI$

$$\begin{aligned}
G_i(\varphi(x)) &= \max\{\tilde{w}_{ij}\varphi_j(x) : j \in V_i\} \\
&= \max(\{\tilde{w}_{ij}\varphi_j(x) : j \in V_i \cap MI\}, \\
&\quad \{\tilde{w}_{ij}\varphi_j(x) : j \in V_i \cap MA\}) \\
&= \max(\{w_{ij}\varphi_j(x) : j \in V_i \cap MI\}, \\
&\quad \{-w_{ij}\varphi_j(x) : j \in V_i \cap MA\}) \\
&= \max(-\{w_{ij}x_j : j \in V_i \cap MI\}, \\
&\quad \{-w_{ij}x_j : j \in V_i \cap MA\}) \\
&= -\min\{w_{ij}x_j : j \in V_i\} \\
&= -F_i(x) \\
&= \varphi_i(F(x))
\end{aligned}$$

Ejemplo

Iteración secuencial: $G \circ \varphi(x(0))$

$x(t) \setminus i$	1	2	3	4
$x(0)$	1	1	-1	1
$x(4)$	-1	1	1	1
$x(8)$	1	-1	1	1
$x(12)$	1	-1	1	1

Índice

Convergencia

Una MMN es un caso particular de una red de Hopfield, pues

$$\text{mín}(x) = \text{sgn}(\sum_{i=1}^{n} x_i - n + 0{,}5)$$

$$\text{máx}(x) = \text{sgn}(\sum_{i=1}^{n} x_i + n - 0{,}5)$$

entonces converge en $O(\|W\|)$ pasos, luego converge en $O(n^2)$ pasos.

Teorema

Para una iteración secuencial, $\epsilon(x(t))$ se incrementa en al menos 2 si $x(t+n) \neq x(t)$, donde

$$V^+ := \{i \in V : \exists j \in V_i, w_{ij} = 1\}$$
$$V^- := V \setminus V^+$$

$$\epsilon(x(t)) := \sum_{i \in V^+} x_i(t) - \sum_{i \in V^-} x_i(t)$$

Demostración

La i-èsima neurona se actualiza en el paso
$t' \in \{kn + i - 1 \setminus k \in \mathbb{N}_0\}$ y cambia, eventualmente, en el tiempo
$t \in \{kn + i \setminus k \in \mathbb{N}_0\}$
Sea $i \in V^+$ y $x_i(\alpha n) = 1$, entonces existe $j \in V_i$ tal que $w_{ij} = 1$
Si $j < i$

$$\begin{aligned} x_i(\alpha n) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad x_j(\alpha n + j) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad x_i(\alpha n + i) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad x_i(\alpha n + n) = 1 \end{aligned}$$

Si $j > i$

$$\begin{aligned} x_i(\alpha n) = 1 &\implies x_j((\alpha-1)n+i) = 1 \\ &\implies x_i((\alpha-1)n+j) = 1 \\ &\implies x_j(\alpha n) = 1 \\ &\implies x_i(\alpha n + i) = 1 \\ &\implies x_i(\alpha n + n) = 1 \end{aligned}$$

$$\implies (x_i(\alpha n) \neq x_i((\alpha+1)n) \implies x_i(\alpha n) = -1,\ x_i((\alpha+1)n) = 1)$$

Similiarmente para $i \in V^-$

$$x_i(\alpha n) \neq x_i((\alpha+1)n) \implies (\Delta\epsilon)_i = 2$$

$$x(t+n) \neq x(t) \implies \epsilon(t+n) - \epsilon(t) \geq 2$$

Corolario

La MMN converge a un punto fijo en a lo más n iteraciones completas, para una actualización secuencial.

Teorema

Para una actualización sincrónica,

$$x(t+2) \neq x(t) \implies \epsilon(t+2) - \epsilon(t) \geq 2$$

Demostración

Sea $i \in V^+$

$$\begin{aligned} x_i(t) = 1 \quad &\implies \quad \exists j \in V_i : w_{ij} = 1, x_j(t+1) = 1 \\ &\implies \quad x_i(t+2) = 1 \end{aligned}$$

Corolario

Para una actualización sincrónica, la MMN converge a un punto fijo o a un 2-ciclo en a lo más $2n$ iteraciones.