DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

Sistemas Dinámicos Discretos
Tarea 3
Natalia García

1. Defina un autómata celular en $\mathbb{Z}^2$ cuyo conjunto de puntos equicontinuos no sea vacío pero tampoco sea denso.

Definimos un autómata con alfabeto $A = \{\cap, \cup, \subset, \supset, 0, 0_a, 0_b\}$, y las siguientes reglas:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \supset & \subset \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \supset & \cap \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \cap & \subset \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & & \\ \hline & \supset & \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline 0 & \supset & \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline 0 & \cap & \\ \hline \cap & \cap & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0$$

(Las tres últimas reglas también sirven para un 0_a en lugar de un 0, y para 0_b, pero en todos los casos se obtiene 0 como resultado.)

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & 0 & \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0 \text{ si no hay algun } 0_a, 0_b$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & X & \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \Rightarrow 0_{c'}$$

si $X \in \{0, 0_a, 0_b\}$ (si $X = 0$ pedimos además que haya algún $0_a, 0_b$ en el borde de la vecindad) donde c' se determina de la siguiente manera: definimos $u =$(numero de 0_a), $v =$(numero de 0_b) (en el borde de la vecindad) y $c' = a$ si la parte entera de $(u - v)/2$ es par, $c' = b$ si la parte entera de $(u - v)/2$ es impar.

Observamos que esta última regla es bastante sensible, porque si en el borde tomamos un 0_a y lo cambiamos por 0_b, entonces el resultado cambia, y lo mismo ocurre si cambiamos un 0_b por un 0_a.

Definimos un punto de $A^{\mathbb{Z}^2}$ centrando la siguiente matriz en cero y extendiendola de la forma obvia

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \cap & \cap & \cap & \cap & \cap \\ \hline \subset & \cap & \cap & \cap & \supset \\ \hline \subset & \subset & \cap & \supset & \supset \\ \hline \subset & \cup & \cup & \cup & \supset \\ \hline \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \hline\end{array}$$

De las reglas que definimos se puede ver que este punto es equicontinuo.

Consideremos la bola V de todos los puntos que tienen un cero en el origen. Probemos que los puntos de esta vecindad producen caminos de ceros (entendemos por 'cero' un $0, 0_a, 0_b$) no acotados conectados al origen, a medida que vamos iterando el autómata. Las iteraciones sólo pueden hacer crecer los caminos, no los borran (por las reglas) así que supongamos que para cierto punto $x \in V$ en algún momento obtenemos un camino maximal M conectado al origen, el cual no crece con las iteraciones. Por el mismo argumento de Pasten, tomando la menor circunferencia que encierra a las celdas del camino, sabemos que existe un $(i, j) \in C$ con la propiedad que posee 4 celdas adyacentes al cero (i, j) y consecutivas, las cuales no tienen ceros. La situación es:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & (i,j) & u \\ \hline r & s & t \\ \hline\end{array}$$

Por la maximalidad de M y por la cuarta y quinta regla sabemos que r solo puede ser $\cap, \supset$, también tenemos que t sólo puede ser $\subset, \cap$ y también tenemos que s sólo puede ser $\subset, \cap, \supset$, pero de estas 3 posibilidades para s sólo podemos tener $\cap$ porque en otro caso, considerando las únicas posibilidades para r, t obtenemos una contradicción con las tres primeras reglas. Ahora que sabemos que $s = \cap$, las mismas reglas primera segunda y tercera nos dicen que $r = t = \cap$ también, en particular $t = \cap$ obligando por las reglas primera segunda y tercera que $u = \cap$. Pero esta configuración contradice la sexta regla. Esto muestra que el camino no es acotado a medida que iteramos el AC. Ahora, para $x \in V$ sabemos que no importa la ventana, en algún momento habrá un camino de ceros desde el origen hasta fuera de la ventana, y perturbando x fuera de la ventana con $0_a, 0_b$ obtendremos que esto alterará el comportamiento del autómata cerca del $(0, 0)$ gracias a las reglas 7 y 8. De aquí podemos concluir que ningún punto del abierto V es equicontinuo, así que nuestro autómata cumple lo pedido.

2. Demuestre que el autómata celular definido por $F(x)_i = x_i + x_{i+1}(x_{i+2} + 1)$ mod 2 es sobreyectivo.

Tenemos que el alfabeto $A = \{0, 1\} \Rightarrow |A| = 2$. La memoria del AC es 0 y la anticipación 2, por lo tanto el radio $r = \text{máx}\{|0|, |2|\}| = 2$.
Este autómata al tener radio 2, es equivalente al autómata con regla local $f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = x_i + x_{i+1}(x_{i+2} + 1)$ mod 2. Trabajaremos con este último para poder usar los resultados vistos en clase.
Debemos probar que para todo $u \in A^+$, $|\tilde{f}^{-1}(u)| \neq 0$ (pues si $\tilde{f}$ es sobreyectiva, F también lo es). Lo mostraremos por inducción en el largo de la palabra:
Caso n=1: Las $\tilde{f}^{-1}(u)$ con u=0 ó 1 son:

xy000	xy001	xy010	xy011	xy100	xy101	xy110	xy111
0	0	1	0	1	1	0	1

Como x,y pueden valer 0 ó 1, $|\tilde{f}^{-1}(0)| = |\tilde{f}^{-1}(1)| = 16 \neq 0$
Suponemos que $|\tilde{f}^{-1}(u)| \neq 0$ para toda u de largo $n-1$. Sea x palabra de largo n, es decir, $x = x_1 \dots x_n$. x se puede separar en $x_1 \dots x_{n-1}$ y x_n. Por ser $x_1 \dots x_{n-1}$ palabra de largo $n-1$, $|\tilde{f}^{-1}(x_1 \dots x_{n-1})| \neq 0$, es decir, que tiene preimagen por $\tilde{f}$. Sea $a_1 \dots a_k$ una de ellas. $\tilde{f}^{-1}(x_n) = b_1 \dots b_5$. Para que $b_1 \dots b_5$ sea compatible con $\tilde{f}^{-1}(x_1 \dots x_{n-1}$, se debe cumplir que $b_1 = a_{n-4}, b_2 = a_{n-3}, b_3 = a_{n-2}, b_4 = a_{n-1}$. Vemos en la tabla que si tenemos las cuatro primeras letras fijas, con cualquier valor de b_5 tenemos preimagen para x_n. Esto implica que $a_1 \dots a_{n-1}b_5$ es preimagen por $\tilde{f}$ de x. Por lo tanto, toda imagen de largo n tiene preimagen por $\tilde{f}$. Esto significa que F es sobreyectiva.