Autor : Miguel Silva Vilche.
Profesor : Dra. Anahí Gajardo.
Concepción, 12 de Octubre de 2008.

TAREA 1.

Sistemas Dinámicos Discretos. 525612.

1. Considere el sistema $(\mathbb{C}, z^2)$
   (a) Encuentre puntos fijos, periódicos, decida si son atractores.
   (b) Encuentre 4 subsistemas diferentes.
   (c) Estudie las 4 relaciones, decida minimalidad, transitividad y cadena-transitividad.
   (d) Decida existencia de puntos quasi-periódicos, almost periodic, recurrentes, non-wandering y cadena-recurrentes.
   (e) Encuentre puntos equiscontinuos, decida equiscontinuidad, sensitividad, positiva expansibidad y propiedad mezcladora.
2. Demuestre que la sensitividad no se hereda a los factores.
3. Responda si es o no posible que un sistema <u>mezclador</u> tenga un subsistema propio no mezclador.

Desarrollo.

1. (a)

$$z \text{ punto periódico} \Leftrightarrow \exists\, n > 0 \quad z = T^n(z) = z^{(2^n)} \Leftrightarrow \exists\, n > 0 \quad z(z^{(2^n-1)}-1) = z^{(2^n)}-z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \quad \vee \quad \exists\, n > 0 \quad z^{(2^n-1)} = 1 \Leftrightarrow z = 0 \quad \vee \quad z = e^{i\theta} \text{ con } \quad \theta \in \left\{ \frac{2\pi k}{2^n - 1} : k = \overline{0, 2^n - 2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow z \in \{0\} \cup \left\{ e^{\frac{2\pi k}{2^n-1} i} : n \in \mathbb{N}, k = \overline{0, 2^n - 2} \right\} = \{0, 1\} \cup \left\{ e^{\frac{2\pi k}{2^n-1} i} : n \in \mathbb{N}, k = \overline{1, 2^n - 2} \right\}$$

En particular

$$z \text{ punto fijo} \Leftrightarrow z = T(z) = z^2 \Leftrightarrow z^2 - z = z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0, 1\}$$

Notemos además que

$$\left\{ e^{\frac{2\pi k}{2^n-1} i} : n \in \mathbb{N}, k = \overline{0, 2^n - 2} \right\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

por lo tanto si $z \neq 0$ es un punto periódico entonces $|z| = 1$, definiendo:

$$A = \{z\},\ \varepsilon = 1,\ \delta > 0,\ x = (1 + \frac{\delta}{2})z,\ n \in \mathbb{N}\text{tal que } n \geq -\log_2 \log_2(1 + \frac{\delta}{2})$$

notemos que $1+\dfrac{\delta}{2} > 1 \Rightarrow \log_2(1+\dfrac{\delta}{2}) > \log_2 1 = 0$ entonces

$$n \geq -\log_2\log_2(1+\frac{\delta}{2}) \Rightarrow 2^n \geq 2^{-\log_2\log_2(1+\frac{\delta}{2})} = \frac{1}{\log_2(1+\frac{\delta}{2})} \Rightarrow 2^n\log_2(1+\frac{\delta}{2}) \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2^n} = 2^{2^n\log_2(1+\frac{\delta}{2})} \geq 2^1 = 2 \Rightarrow \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2^n} - 1 \geq 1$$

por otro lado

$$d(x,A) = d(x,\{z\}) = |x-z| = \left|(1+\frac{\delta}{2})z - z\right| = \frac{\delta}{2}|z| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y además

$$d(T^2(x),A) = d(T^2(x),\{z\}) = \left|T^2(x)-z\right| \geq \left|x^{2^n}\right| - |z| = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2^n}|z^{2^n}| - |z|$$

$$= \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2^n}|z|^{2^n} - |z| = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2^n} - 1 \geq 1 = \varepsilon$$

resumiendo para $A=\{z\}$, $\exists\ \varepsilon = 1 > 0,\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x = (1+\frac{\delta}{2})z\ \exists n\in\mathbb{N}$ tal que

$$d(x,A) < \delta \quad \wedge \quad d(T^n(x),A) \geq \varepsilon$$

es decir A no es estable, con lo cual $A=\{z\}$ no es atractor.
Para el caso $A=\{0\}$ tenemos que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = 1 > 0$

$$1 = \delta > d(x,A) = d(x,\{0\}) = |x-0| = |x| \Rightarrow d(T^n(x),A) = |T^n(x)| = |x|^{(2^n)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(T^n(x),A) = \lim_{n\to\infty}|x|^{(2^n)} \leq \lim_{n\to\infty}\delta^{(2^n)} = 0$$

por lo tanto $A=\{0\}$ es atrayente.
Para la estabilidad tenemos que $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \min\{1,\varepsilon\} > 0$ tal que $\forall n \geq 0$

$$|x| = d(x,A) < \delta \leq 1 \Rightarrow d(T^n(x),A) = |x^{(2^n)}| = |x|^{(2^n)} \leq |x| < \delta \leq \varepsilon \Rightarrow d(T^n(x),A) < \varepsilon$$

por lo tanto $A=\{0\}$ es estable, y junto a lo anterior deducimos que es atractor.

(b) Definimos los siguientes subsistemas de $(\mathbb{C},z^2)$

$$\begin{aligned} Y_1 &:= \mathbb{R} \\ Y_2 &:= \{z\in\mathbb{C} : |z| \leq 1\} \\ Y_3 &:= \{z\in\mathbb{C} : |z| \geq 1\} \\ Y_4 &:= \{z\in\mathbb{C} : |z| = 2^{(2^n)}, n\in\mathbb{N}_0\} \end{aligned}$$

En efecto Y_1, Y_2, Y_3 son evidentemente cerrados y para Y_4 tenemos

$$Y_4^C = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 2\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\{z\in\mathbb{C} : 2^{(2^n)} < |z| < 2^{(2^{n+1})}\}\right)$$

por lo que Y_4^C es la unión de conjuntos abiertos, es decir Y_4 es cerrado. Además

$$x \in Y_1 = \mathbb{R} \Rightarrow T(x) = x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R} = Y_4 \qquad \therefore \quad T(Y_1) \subset Y_1$$
$$x \in Y_2 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow |T(x)| = |x^2| = |x|^2 \leq |x| \leq 1 \Rightarrow T(x) \in Y_2 \quad \therefore \quad T(Y_2) \subset Y_2$$
$$x \in Y_3 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow |T(x)| = |x^2| = |x|^2 \geq |x| \geq 1 \Rightarrow T(x) \in Y_3 \quad \therefore \quad T(Y_3) \subset Y_3$$

$$x \in Y_4 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \quad |x| = 2^{(2^n)} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \quad |T(x)| = |x^2| = |x|^2 = (2^{2^n})^2 = 2^{2^n \cdot 2} = 2^{(2^{n+1})}$$
$$\Rightarrow T(x) \in Y_4 \qquad \therefore \quad T(Y_4) \subset Y_4$$

Finalmente tenemos que Y_1, Y_2, Y_3 y Y_4 son subsistemas.

(c) Sea $(\mathbb{C}, T)$ con $T(z) = z^2$, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ y $\{x_i\}_{i=0}^N$ una ε-cadena de 0 a x, probaremos que

$$|x_i| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall \ i = \overline{0, N}$$

para $i = 0$

$$|x_0| = |0| = 0 \leq \frac{1}{2}$$

supongamos que $|x_i| \leq \frac{1}{2}$ con lo cual

$$d(T(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \Rightarrow |x_{i+1}| = |T(x_i) + (x_{i+1} - T(x_i))| \leq |T(x_i)| + |x_{i+1} - T(x_i)|$$
$$< |x_i^2| + \varepsilon = |x_i|^2 + \varepsilon \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

en particular $|x| = |x_N| \leq \frac{1}{2}$ con lo cual

$$(0, x) \in \mathcal{C} \Rightarrow \text{existe una } \varepsilon\text{-cadena de 0 a } x \text{ con } 0 < \varepsilon \leq \tfrac{1}{4} \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$$

Entonces $\forall x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| > \frac{1}{2}$ se tiene $(0, x) \notin \mathcal{C}$ y con ello $\mathcal{C} \neq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$
Finalmente deducimos que

$$(\mathbb{C}, z^2) \text{ no es cadena-transitivo}$$
$$\Rightarrow (\mathbb{C}, z^2) \text{ no es transitivo}$$
$$\Rightarrow (\mathbb{C}, z^2) \text{ no es minimal}$$

(d) Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $|z| \neq 1$. Consideremos $x \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = \left|\frac{|z|(|z| - 1)}{2}\right| > 0$ y $\{z_i\}_{i=0}^N$ una ε-cadena de z a x, entonces

$$\forall \ i = \overline{1, N} \quad d(T(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon \quad \wedge \quad |z_{i-1}|^2 - |z_i| = |z_{i-1}^2| - |z_i| = |T(z_{i-1})| - |z_i|$$
$$\Rightarrow \Big||z_{i-1}|^2 - |z_i|\Big| = \Big||T(z_{i-1})| - |z_i|\Big| \leq |T(z_{i-1}) - z_i| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |z_{i-1}|^2 - |z_i| < \varepsilon \quad \wedge \quad |z_i| - |z_{i-1}|^2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |z_{i-1}|^2 - \varepsilon < |z_i| \quad \wedge \quad |z_{i-1}|^2 + \varepsilon > |z_i|$$

Caso $|z| > 1$

$$\varepsilon = \frac{|z|(|z|-1)}{2} \Rightarrow |z|^2 - \varepsilon = |z|^2 - \frac{|z|^2 - |z|}{2} = \frac{|z|^2 + |z|}{2} = |z| + \frac{|z|^2 - |z|}{2} = |z| + \varepsilon$$

se tiene

$$|z| + \varepsilon < |z_i| \quad \forall\ i = \overline{1, N}$$

en efecto, para $i = 1$ se tiene

$$|z| + \varepsilon = |z|^2 - \varepsilon = |z_{1-1}|^2 - \varepsilon < |z_1|$$

y además

$$|z| + \varepsilon < |z_i| \quad \Rightarrow \quad |z| + \varepsilon = |z|^2 - \varepsilon < (|z| + \varepsilon)^2 - \varepsilon < |z_i|^2 - \varepsilon < |z_{i+1}|$$

en particular

$$d(x, z) = |x - z| \geq |x| - |z| = |z_N| - |z| > \varepsilon$$

Caso $|z| < 1$

Análogo al caso anterior tomamos $\varepsilon = \frac{|z|(1-|z|)}{2}$ y con ello

$$|z|^2 + \varepsilon = |z|^2 - (-\varepsilon) = |z| + (-\varepsilon) = |z| - \varepsilon$$

se sigue que

$$|z| - \varepsilon > |z_i| \quad \forall\ i = \overline{1, N}$$

en efecto, para $i = 1$ se tiene

$$|z| - \varepsilon = |z|^2 + \varepsilon = |z_{1-1}|^2 + \varepsilon > |z_1|$$

y además

$$|z| - \varepsilon > |z_i| \quad \Rightarrow \quad |z| - \varepsilon = |z|^2 + \varepsilon > (|z| - \varepsilon)^2 + \varepsilon > |z_i|^2 + \varepsilon > |z_{i+1}|$$

en particular

$$d(x, z) = |z - x| \geq |z| - |x| = |z| - |z_N| > \varepsilon$$

resumiendo: Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| \neq 0$, $|z| \neq 1$ tenemos

$$(z, x) \in \mathcal{C} \Rightarrow d(z, x) > \left| \frac{|z|(|z|-1)}{2} \right| > 0 \Rightarrow z \neq x$$

por lo tanto

$$z \in |\mathcal{C}| \Leftrightarrow (z, z) \in \mathcal{C} \Rightarrow |z| = 0 \quad \vee \quad |z| = 1$$

es decir

$$|\mathcal{C}| \quad \subseteq \quad \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Por otro lado vimos que $Q := \left\{ e^{\frac{2\pi k}{2^n-1}i} : n \in \mathbb{N}, k = \overline{0, 2^n-2} \right\}$ son periódicos, por lo tanto cadena-recurrentes y como

$$Q \subseteq |\mathcal{C}| \quad \Rightarrow \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \overline{Q} \subseteq \overline{|\mathcal{C}|} = |\mathcal{C}|$$

$$\Rightarrow \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad \subseteq \quad \{0\} \cup |\mathcal{C}| \quad \subseteq \quad \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

y como 0 también es periódico

$$\therefore \quad |\mathcal{C}| = \{0\} \cup |\mathcal{C}| = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Análogamente para $|\mathcal{N}|$

$$Q \subseteq |\mathcal{N}| \subseteq |\mathcal{C}| \quad \Rightarrow \quad \overline{Q} \subseteq |\mathcal{N}| \subseteq |\mathcal{C}| \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{C}| = \{0\} \cup \overline{Q} \subseteq |\mathcal{N}| \subseteq |\mathcal{C}|$$

$$\therefore \quad |\mathcal{N}| = |\mathcal{C}| = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Todo esto nos permite deducir el siguiente diagrama:

$$x \in \mathbb{C} \text{ periórico} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0\} \cup Q \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad x \text{ es quasi-periórico}$$
$$\Rightarrow \quad x \text{ es almost-periodic} \quad \Rightarrow \quad x \text{ es recurrente} \quad \Rightarrow \quad x \text{ es non-wandering}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \text{ es cadena-recurrente} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

(e) Dentro desarrollo de la parte (a) probamos que

$$\forall\, \delta' > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{\delta'}{2}\right)^{2^n} - 1 \geq 1$$

con esto en mente consideremos $x \in \mathbb{C}$, con $|x| \geq 1$, $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$, $y = \left(1 + \frac{\delta}{2|x|}\right) x$ y $n \in \mathbb{N}$ que cumple la propiedad anterior para $\delta' = \frac{\delta}{|x|}$, entonces

$$d(y,x) = |y - x| = \left| \left(1 + \frac{\delta}{2|x|}\right) x - x \right| = \left| \frac{\delta}{2|x|} x \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y además

$$d(T^n(y), T^n(x)) = |T^n(y) - T^n(x)| \geq |T^n(y)| - |T^n(x)| = \left|y^{(2^n)}\right| - \left|x^{(2^n)}\right| = |y|^{2^n} - |x|^{2^n}$$

$$= \left(1 + \frac{\delta}{2|x|}\right)^{2^n} |x|^{2^n} - |x|^{2^n} = \left(\left(1 + \frac{\delta'}{2}\right)^{2^n} - 1\right) |x|^{2^n} \geq \left(\left(1 + \frac{\delta'}{2}\right)^{2^n} - 1\right) \geq 1 = \varepsilon$$

resumiendo $\forall x \in \mathbb{C}$, con $|x| \geq 1$ y las elecciones de ε e $y \in \mathbb{C}$ como antes tenemos

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{C} : \quad d(x,y) < \delta\ \wedge\ d(T^n(y), T^n(x)) \geq \varepsilon$$

$$\therefore \quad |x| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \text{ no es equiscontinuo} \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \mathcal{E}$$

es decir

$$x \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$$

Por otro lado sea $x \in \mathbb{C}$, con $|x| < 1$ y $\varepsilon > 0$ entonces

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad 2|x| = |x| + |x| < 1 + |x| \quad \Rightarrow \quad |x| < \frac{1+|x|}{2}$$

y

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 + |x| < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1+|x|}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{2^n} = 0$$

por lo tanto

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad n \geq N \Rightarrow \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

así definiendo $\delta = \min\left\{\frac{1-|x|}{2}, \frac{\varepsilon}{2^N}\right\}$ tenemos

$$d(y,x) < \delta \quad \Rightarrow \quad |y| - |x| \leq |y - x| = d(x,y) < \delta \leq \frac{1-|x|}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |y| < \frac{1+|x|}{2} < 1$$

con lo cual

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \max\{|x|^{2^n}, |y|^{2^n}\} < \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad d(T^n(y), T^n(x)) = |T^n(y) - T^n(x)| \leq |T^n(y)| + |T^n(x)|$$

$$= |y^{(2^n)}| + |x^{(2^n)}| = |x|^{2^n} + |y|^{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

además para $n = \overline{0, N}$ tenemos que

$$d(y,x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(T^n(y), T^n(x)) < \quad 2^n\delta \quad \leq 2^N\delta \leq 2^N\frac{\varepsilon}{2^N} = \varepsilon$$

en efecto, la propiedad se tiene para $n = 0$ y por induccion tenemos

$$d(T^n(y), T^n(x)) < \quad 2^n\delta \quad \Rightarrow \quad d(T^{n+1}(y), T^{n+1}(x)) = |T^{n+1}(y) - T^{n+1}(x)|$$

$$= |T^n(y)^2 - T^n(x)^2| = \left|\Big(T^n(y) - T^n(x)\Big)\Big(T^n(y) + T^n(x)\Big)\right| = \Big|T^n(y) - T^n(x)\Big|\,\Big|T^n(y) + T^n(x)\Big|$$

$$< 2^n\delta\,\Big|T^n(y) + T^n(x)\Big| \leq 2^n\delta\left(|T^n(y)| + |T^n(x)|\right) = 2^n\delta\left(|y|^{2^n} + |x|^{2^n}\right) \leq 2^n\delta\,\Big(1+1\Big) = 2^{n+1}\delta$$

Resumiendo sea $x \in \mathbb{C}$, con $|x| < 1$ y $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta > 0$ como antes y así

$$d(y,x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(T^n(y), T^n(x)) < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

lo que prueba

$$|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad x \text{ equiscontinuo} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{E}$$

Finalmente concluimos que

$$x \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 1$$

y con ello $(\mathbb{C}, z^2)$ **no es equiscontinuo.**

(**Sensitividad**) Sea $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{C}$, con $|x| < 1$. Por la equiscontinuidad de x existe $\delta > 0$ tal que

$$d(y,x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(T^n(y), T^n(x)) < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

lo que prueba que $(\mathbb{C}, z^2)$ **no es sensitivo.**

(**Positiva-expansividad**) Igual a la anterior: Sea $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{C}$, con $|x| < 1$. Por la equiscontinuidad de x existe $\delta > 0$ tal que

$$d(y,x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(T^n(y), T^n(x)) < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

con lo cual tomando $y \in B_\delta(x) \setminus \{x\}$ tenemos

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists x \neq y \ \forall\, n > 0 \quad d(T^n(y), T^n(x)) < \varepsilon$$

lo que prueba que $(\mathbb{C}, z^2)$ **no es positivamente expansivo.**

(**Propiedad Mezcladora**) Sean los abiertos $U = \{x \in \mathbb{C} : \quad |x| < 1\}$ y $V = \{x \in \mathbb{C} : |x| > 1\}$, como $T(U) \subseteq U$ y $U \cap V = \emptyset$ entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T^n(U) \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$$

lo que prueba que $(\mathbb{C}, z^2)$ **no es mezclador.**

2. Sea (X,T) un sistema sensitivo, notemos que $(\{a\}, Id)$ es siempre un factor de (X,T) con la función de conmutación $\psi(x) = a \ \forall x \in X$, pero $(\{a\}, Id)$ no puede ser sensitivo pues las distancias son siempre 0 (sólo tiene un elemento).

3. Consideremos (X,T) donde $X = [0,1)$ y $T(x) = 2x \bmod 1$ y $Z = \{0, 1/2\}$.
Notemos que $T(Z) = \{T(0), T(1/2)\} = \{0\} \subset Z$ y Z es cerrado, por lo tanto (Z,T) es subsistema cuya topología inducida son las partes de Z.
Es decir si tomamos $U = V = \{1/2\}$ abiertos de Z tenemos

$$\forall\, n > 0 \quad T^n(U) \cap V = T^n(\{1/2\}) \cap \{1/2\} = \{0\} \cap \{1/2\} = \emptyset$$

con lo cual (Z,T) **no es mezclador**. En otras palabras un sistema mezclador puede tener un subsistema propio no mezclador.