Solución Evaluación 1

1. (10 puntos) *Considere el sistema* $(\mathbb{C}, T_c(z) = z^2 + c)$*, donde* $c \in \mathbb{C}$ *fijo. Demuestre que si* $|z| > \text{máx}\{|c|, 2\}$*, entonces* $(T_c^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

   Solución: Dado w tal que $|w| > \text{máx}\{|c|, 2\}$, podemos decir que $|w| - |c| = \alpha_w$, con $\alpha_w > 0$. Luego,

   $|w^2 + c| \geq |w^2| - |c| \geq 2|w| - |c| \geq |w| + \alpha_w > \text{máx}\{|c|, 2\}$.

   Luego, por inducción se puede afirmar que $|T_c^{n+1}(z)| > \text{máx}\{|c|, 2\}$ y entonces podemos aplicar la desigualdad anterior con $w = T_c^{n+1}(z)$, obteniendo:

   $\alpha_{T_c^{n+1}(z)} = |T_c^{n+1}(z)| - |c| \geq 2\alpha_{T_c^n(z)}$.

   Esto implica, aplicando inducción en n, que $\alpha_{T_c^n(z)} \geq 2^n \alpha_z$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $|T_c^{n+1}(z)| \geq |c| + 2^n \alpha_z$, de donde es claro que la sucesión $(T_c^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2. (10 puntos) *Decida si un sistema positivamente expansivo puede tener un subsistema no sensitivo propio.*

   Solución: Sea (X, T) un sistema expansivo. Supongamos que x es un punto fijo. Tal tipo de puntos pueden aparecer en sistemas expansivos, como hemos visto en ejemplos en clases, sin necesidad que x sea el único punto de X. El sistema $(\{x\}, id)$ es un subsistema propio de (X, T) y no es sensitivo.

3. (20 puntos) *Demuestre que si* (X, T) *es mezclador y* (Z, F) *es su factor, entonces éste último también es mezclador.*

   Solución: Sea $\psi : X \to Z$ un factor. Sean U, V dos abiertos no vacíos de Z. Tomamos $\psi^{-1}(U)$ y $\psi^{-1}(V)$, los que, por la continuidad de ψ son abiertos de X y por su sobreyectividad son no vacíos.

   Luego, $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ T^n(\psi^{-1}(U)) \cap \psi^{-1}(V) \neq \phi$.

   Se cumple que $T^n(\psi^{-1}(U)) \subseteq \psi^{-1}(F^n(U)$, en efecto: si $x \in T^n(\psi^{-1}(U))$, entonces existe $y \in \psi^{-1}(U)$ tal que $T^n(y) = x$; es decir, existe $y \in X$ tal que $\psi(y) \in U$ y $T^n(y) = x$. Luego $\psi(x) = \psi(T^n(y)) = F^n(\psi(y))$; de donde $\psi(x) \in F^n(U)$, lo que implica que $x \in \psi^{-1}(F^n(U))$.

   Luego,

$$
\begin{aligned}
\phi &\neq \psi(T^n(\psi^{-1}(U)) \cap \psi^{-1}(V)) && (1)\\
&\subseteq \psi(\psi^{-1}(F^n(U)) \cap \psi^{-1}(V)) && (2)\\
&\subseteq \psi(\psi^{-1}(F^n(U))) \cap \psi(\psi^{-1}(V)) && (3)\\
&= F^n(U) \cap V, && (4)
\end{aligned}
$$

   que era lo que se quería demostrar.

4. (20 puntos) *Demostrar que si un atractor A está contenido en el conjunto de puntos equicontinuos ξ, entonces $B(A) \subseteq \xi$.*
Indicación: *asuma, sin demostrar, que si $A \subseteq \xi$ es cerrado, entonces*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in A)(\forall n \in \mathbb{N})\ T^n(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(T^n(a)).$$

Solución:

Sea $x \in B(A)$,

p.d.q. $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ T^n(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(T^n(x))$.

Sea $\epsilon > 0$, de la propiedad indicada, tomo $\delta' > 0$ tal que

$(\forall a \in A)(\forall n \in \mathbb{N})\ T^n(B_{\delta'}(a)) \subseteq B_{\epsilon/2}(T^n(a))$. (*)

De la definición de $B(A)$, tomo $N \in \mathbb{N}$ y $a \in A$ tales que $d(T^N(x), a) < \delta'$. (**)

De la continuidad de T^N, tomo δ_N tal que $T^N(B_{\delta_N}(x)) \subseteq B_{\delta'}(a)$.

Así, para todo $y \in B_{\delta_N}(x)$ se tiene $d(T^N(y), a) < \delta'$. Entonces, por (*) y (**), para todo $m \geq N$ se cumple que

$d(T^m(y), T^{m-N}(a)) < \epsilon/2$ y $d(T^m(x), T^{m-N}(a)) < \epsilon/2$.

Luego $d(T^m(y), T^m(x)) < \epsilon$.

Para $m < N$, usamos la continuidad de T^m para obtener δ_m tal que $T^m(B_{\delta_m}(x) \subseteq B_\epsilon(T^m(x)))$.

Luego, tomando $\delta = min\{\delta_m | m \in \{1, .., N\}\}$ se obtiene lo buscado.

Nota: Esta es una de las tantas soluciones posibles de la prueba, varios hicieron demostraciones mejores, es decir, más elegantes y/o más detalladas.

---

14 de octubre de 2008.
AGS