PAUTA EXAMEN 2019-1

1.

a) X_1: entradas para medios de comunicación

X_2: entradas para hinchas locales

X_3: entradas para hinchas visitantes

maximizar ingresos:

$$f = 45 X_2 + 100 X_3$$

restricciones: $X_1 + X_2 + X_3 = 10000$ (puede ser $\leq$)

$$X_1 \geq 500$$

$$X_2 \geq \frac{1}{2} X_3$$

grados de libertad: N° var − N° ecuac. = 3 − 1 = 2 g.l.

∴ hay espacio para optimizar

b) primero se debe formatear el problema para resolverlo por Simplex:

minimizar $g = -45 X_2 - 100 X_3$

s.e. $X_1 + X_2 + X_3 = 10.000$

$X_1 - X_4 = 500$

$X_2 - \frac{1}{2} X_3 - X_5 = 0$

Entonces

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 + x_2 + x_3 & & & = 10.000 \\
x_1 & -x_4 & & = 500 \\
x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & -x_5 & = 0 \\
-g - 45x_2 - 100x_3 & & & = 0
\end{array}$$

No existe una solución básica factible disponible, por lo tanto hay que aplicar la fase I del método. $(w = y_1 + y_2 + y_3)$

$$\begin{array}{llllll}
x_1 + x_2 + x_3 & & & +y_1 & & = 10000 \\
x_1 & -x_4 & & & +y_2 & = 500 \\
x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & -x_5 & & +y_3 & = 0 \\
-g \quad -45x_2 - 100x_3 & & & & & = 0 \\
-w & & & +y_1 + y_2 + y_3 & & = 0
\end{array}$$

Se debe dejar a y_1, y_2 y y_3 como variables básicas:

$$\begin{array}{lllllll}
 & & & & & & b/a \\
x_1 + x_2 + x_3 & & & +y_1 & & = 10.000 & 10.000 \\
\boxed{x_1} & -x_4 & & & +y_2 & = 500 & 500 \\
x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & -x_5 & & +y_3 & = 0 & \\
-g \quad -45x_2 - 100x_3 & & & & & = 0 & \\
-w \quad -2x_1 - 2x_2 - 0{,}5x_3 + x_4 + x_5 & & & & & = -10500 &
\end{array}$$

min d_j

$$\begin{array}{lllllll}
 & & & & & & b/a \\
x_2 + x_3 + x_4 & & & +y_1 - y_2 & & = 9500 & 9500 \\
x_1 & -x_4 & & +y_2 & & = 500 & - \\
\boxed{x_2} - \frac{1}{2}x_3 & & -x_5 & & +y_3 & = 0 & 0 \\
-g \quad -45x_2 - 100x_3 & & & & & = 0 & \\
-w \quad -2x_2 - 0{,}5x_3 - x_4 + x_5 & & & +2y_2 & & = -9500 &
\end{array}$$

min d_j

1. [illegible]

$$1{,}5\,x_3 + x_4 + x_5 + y_1 - y_2 - y_3 = 9500 \qquad b/e\ 6333{,}3$$

$$x_1 \quad - x_4 \quad + y_2 = 500 \qquad -$$

$$x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \quad - x_5 \quad + y_3 = 0 \qquad -$$

$$-g \quad -122{,}5\,x_3 \quad -45\,x_5 \quad +45\,y_3 = 0$$

$$-w \quad -1{,}5\,x_3 - x_4 - x_5 \quad +2y_2 + 2y_3 = -9500$$

min d_j

$$x_3 + 0{,}\bar{6}x_4 + 0{,}\bar{6}x_5 + 0{,}\bar{6}y_1 - 0{,}\bar{6}y_2 - 0{,}\bar{6}y_3 = 6333{,}3$$

$$x_1 \quad - x_4 \quad + y_2 = 500$$

$$x_2 \quad + 0{,}\bar{3}x_4 - 0{,}\bar{6}x_5 + 0{,}\bar{3}y_1 - 0{,}\bar{3}y_2 + 0{,}\bar{6}y_3 = 3166{,}\bar{6}$$

$$-g \quad + 81{,}59\,x_4 + 36{,}59\,x_5 + 81{,}66\,y_2 - 81{,}6\,y_2 - 126{,}6\,y_3 = 775833$$

$$-w \quad + y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

este es el mínimo de w porque $d_j > 0$. $w = 0$ entonces existe una solución básica factible que es:

$x_3 = 6333$
$x_1 = 500$
$x_2 = 3166$
$g = -775833$

Eliminando las columnas de las variables artificiales:

$$x_3 + 0{,}\bar{6}x_4 + 0{,}\bar{6}x_5 = 6333$$

$$x_1 \quad - x_4 = 500$$

$$x_2 + 0{,}\bar{3}x_4 \quad - 0{,}\bar{6}x_5 = 3166$$

$$-g \quad + 81{,}6\,x_4 + 36{,}6\,x_5 = 775833$$

$$\bar{c}_4 > 0 \quad \bar{c}_5 > 0$$

Esta solución básica factible además es la óptima. 1.3

Entonces, el esquema de ventas que maximiza los ingresos es:

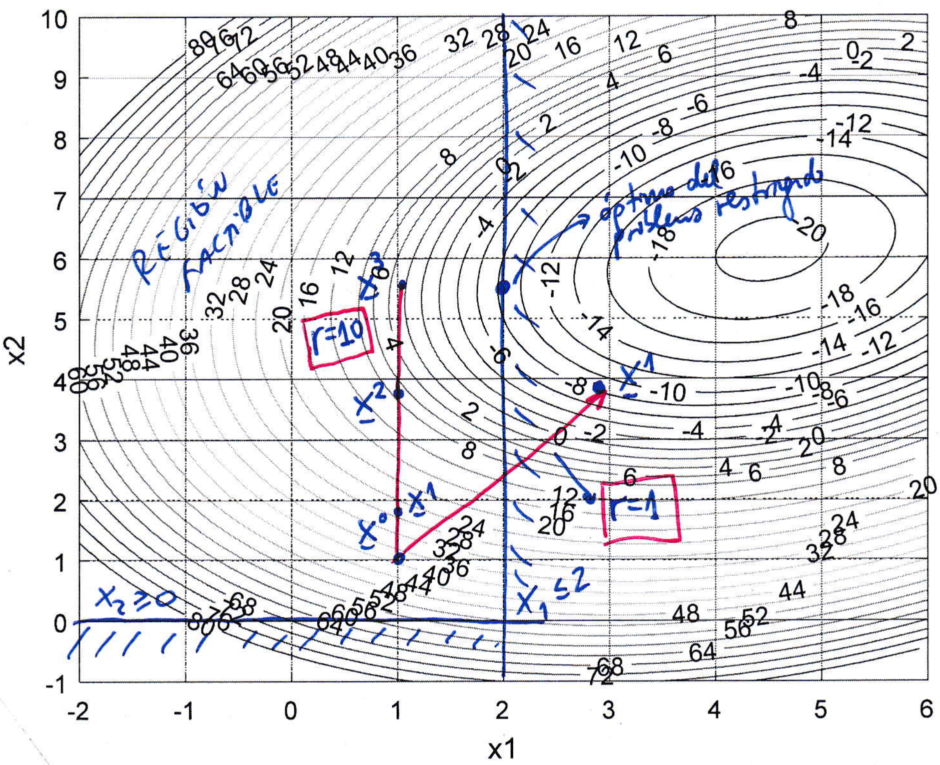
$x_1 = 500$ miembros de medios de comunicación
$x_2 = 3166$ hinchas locales
$x_3 = 6333$ hinchas visitantes

las utilidades son $ 775833

2.

a) Se agregan a la figura las restricciones y se indica la región factible. Además, se indica el óptimo, que es un punto de tangencia con la restricción $x_1 \leq 2$.

$$x^* \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 5,5 \end{bmatrix} \quad f \approx -8,5$$



b). función de penalidad interna:

$$\phi(r_k, \underline{x}) = f(\underline{x}) - r_k \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{g_j(\underline{x})}$$

las restricciones se definen: $g_1 = x_1 - 2 \leq 0$

$g_2 = -x_2 \leq 0$

entonces:

$$\phi = 2(x_1-3)^2 - x_1 x_2 + (x_2-5)^2 - r\left[\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{-x_2}\right]$$

$$\phi = 2(x_1-3)^2 - x_1 x_2 + (x_2-5)^2 - r(x_1-2)^{-1} + r x_2^{-1}$$

c) Para aplicar el método de Newton se calculan las primeras y segundas derivadas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 4(x_1-3) - x_2 + r(x_1-2)^{-2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -x_1 + 2(x_2-5) - r x_2^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 4 - 2r(x_1-2)^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 2 + 2r x_2^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -1 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Hay que resolver: $\underline{\underline{H}}(\underline{x}^{\circ})\,\underline{s} = -\nabla f(\underline{x}^{\circ})$

Reemplazando para $\underline{x}^{\circ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $r = 1$: $f(\underline{x}^{0}) = 23$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$6s_1 - s_2 = 8$$
$$-s_1 + 4s_2 = 10 \quad /\cdot 6$$
$$-6s_1 + 24s_2 = 60$$

$\rightarrow \quad 23 s_2 = 68 \quad \rightarrow \quad s_2 = 2{,}957$

$s_1 = 1{,}826$

entonces: $\underline{x}^1 = \underline{x}^{\circ} + \underline{s}^{\circ}$

$$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}826 \\ 2{,}957 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}826 \\ 3{,}957 \end{pmatrix} \qquad f(\underline{x}^1) = -10$$

Se ubica el punto en el gráfico y se observa que se encuentra fuera de la región factible. Los métodos de penalidad interna <u>requieren trabajar dentro de la región factible</u>. Por lo tanto con este valor de $r = 1$ la minimización diverge.

d) Ahora $r = 10$ y $\underline{x}^{\circ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces $H \cdot \underline{s} = -\nabla f$ toma la forma:

$$\begin{bmatrix} 24 & -1 \\ -1 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$24 s_1 - s_2 = -1 \quad /\cdot 22$$
$$-s_1 + 22 s_2 = 19$$
$$528 s_1 - 22 s_2 = -22$$

$527 s_1 = -3$

$\rightarrow \begin{cases} s_1 = -0{,}0057 \\ s_2 = 0{,}863 \end{cases}$ 2.3

entonces: $\underline{x}^1 = \underline{x}^0 + \underline{S}^0$

$$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}0057 \\ 0{,}863 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9943 \\ 1{,}863 \end{pmatrix} \qquad f(\underline{x}^1) = 16$$

Segunda iteración

$$\begin{bmatrix} 23{,}66 & -1 \\ -1 & 5{,}093 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}16 \cdot 10^{-3} \\ 10{,}149 \end{bmatrix}$$

$$23{,}66\, S_1 - S_2 = -1{,}16 \cdot 10^{-3} \quad / \cdot 5{,}093$$

$$-S_1 + 5{,}093\, S_2 = 10{,}149$$

$$120{,}5\, S_1 - 5{,}093\, S_2 = -5{,}9 \cdot 10^{-3}$$

$$119{,}5\, S_1 = 10{,}143 \quad \longrightarrow \quad S_1 = 0{,}08488$$

$$S_2 = 2{,}0094$$

$$\underline{x}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}9943 \\ 1{,}863 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}08488 \\ 2{,}0094 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}079 \\ 3{,}872 \end{pmatrix} \qquad f(\underline{x}^2) = 4{,}5$$

Tercera iteración:

$$\begin{bmatrix} 29{,}6 & -1 \\ -1 & 2{,}344 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}233 \\ 4{,}002 \end{bmatrix}$$

$$29{,}6\, S_1 - S_2 = -0{,}233 \quad / \cdot 2{,}344$$

$$-S_1 + 2{,}344\, S_2 = 4{,}002$$

$$69{,}38\, S_1 - 2{,}344\, S_2 = -0{,}546$$

$$\underline{-S_1 + 2{,}344\, S_2 = 4{,}002}$$

$$68{,}38\, S_1 = 3{,}456 \qquad S_1 = 0{,}0505$$

$$S_2 = 1{,}7278$$

$$\underline{x}^3 = \begin{bmatrix} 1{,}079 \\ 3{,}872 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0505 \\ 1{,}7278 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1295 \\ 5{,}5998 \end{bmatrix} \qquad f(\underline{x}^3) = 1{,}03$$

Se agregan los puntos en el gráfico.

Se mantienen los puntos dentro de la región factible y acercándose al óptimo.

e) 1.- Dado un valor de r (ojalá grande para evitar los problemas del punto c)). Por ejemplo $r = 10$

2.- Dado un punto inicial $\underline{X}^0$

3- minimizar la función de penalidad.

4.- disminuir r, por ejemplo $r_{K+1} = r_K \cdot 0{,}5$

5.- volver al punto 3 con punto inicial el óptimo obtenido en 3.

6.- detenerse cuando la disminución de r no cambie el óptimo. dentro de una cierta tolerancia.

3. $f = x_2 - x_1 + 5$

s.a. $g_1 = x_2 - 0{,}5\, x_1^2 \geq 0$

$g_2 = x_2^2 - \cancel{x}_1 \geq 0$

a) Para asegurar que el problema tiene un sólo mínimo y éste por lo tanto es global, el problema debe ser convexo. Para probarlo tanto la función como las restricciones deben ser convexas (o las restricciones cóncavas si se escriben como ≥ 0)

$\star$ $f = x_2 - x_1 + 5$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(\underline{\underline{H}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

Los dos valores propios son nulos. La función es convexa y cóncava (lo esperado para funciones lineales)

* $g_1 = x_2 - 0{,}5\,x_1^2$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = -x_1 \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} = -1 \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = 1 \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(-1-\lambda) = 0 \qquad \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -1$$

valores propios nulos y negativos, g_1 es cóncava.

* $g_2 = x_2^2 - x_1$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} = 2 \qquad \underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2x_2 \qquad \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda(2-\lambda) = 0 \qquad \therefore \quad \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 2$$

valores propios nulos y positivos, g_2 es convexa.

∴ El problema de optimización no es convexo porque escritas como ≥ 0 no todas las restricciones son cóncavas. La función es convexa pero esto no es suficiente.

b) Se define la Lagrangiana:

$$L = f - u_1 g_1 - u_2 g_2$$

$$L = x_2 - x_1 + 5 - u_1\left(x_2 - 0{,}5x_1^2 - \sigma_1^2\right) - u_2\left(x_2^2 - x_1 - \sigma_2^2\right)$$

las condiciones necesarias son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + u_1 x_1 + u_2 = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - u_1 - 2u_2 x_2 = 0 \qquad (b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = x_2 - 0{,}5x_1^2 - \sigma_1^2 = 0 \qquad (c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = x_2^2 - x_1 - \sigma_2^2 = 0 \qquad (d)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_1} = 2u_1\sigma_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_2} = 2u_2\sigma_2$$

Se pueden estudiar los tres casos posibles:

b.1 : las dos restricciones están activas ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)

$u_1 \neq 0$
$u_2 \neq 0$

Ecs. (c) y (d): $\quad x_2 = 0{,}5x_1^2 \rightarrow x_2^2 = 0{,}5^2 x_1^4$

$x_2^2 = x_1$

$$0{,}5^2 x_1^4 - x_1 = 0$$

$$x_1\left(0{,}5^2 x_1^3 - 1\right) = 0 \quad \text{entonces} \quad x_1 = 0$$

$$0{,}5^2 x_1^3 = 1$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{0{,}5^2}\right)^{1/3} = 1{,}587$$

para cada x_1 corresponde un valor de x_2: $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0$

$x_1 = 1{,}587 \rightarrow x_2 = 1{,}259$

Los multiplicadores de Lagrange se obtienen de (a) y (b)

de (a) $\quad u_2 = 1 - u_1 x_1$

en (b) $\quad 1 - u_1 - 2x_2 \cdot (1 - u_1 x_1) = 0$

$$1 - u_1 - 2x_2 + 2x_2 u_1 x_1 = 0$$

$$u_1 (2x_2 x_1 - 1) = 2x_2 - 1$$

$$u_1 = \frac{2x_2 - 1}{2x_2 x_1 - 1}$$

$$y \quad u_2 = 1 - u_1 x_1$$

Entonces:

σ_1	σ_2	u_1	u_2	x_1	x_2	f
0	0	1	1	0	0	5
0	0	0,507	0,196	1,587	1,259	4,672

b.2 $\quad g_1$ está activa y g_2 no está activa: $\quad \sigma_1 = 0 \quad u_1 \neq 0$

$\sigma_2 \neq 0 \quad u_2 = 0$

$-1 + u_1 x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{u_1} = 1$

$1 - u_1 = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = 1$

$x_2 - 0{,}5\, x_1^2 = 0 \quad\quad x_2 = 0{,}5\, x_1^2 = 0{,}5$

$x_2^2 - x_1 - \sigma_2^2 = 0 \quad\quad \sigma_2^2 = x_2^2 - x_1 = -0{,}75$

$\sigma_2 = \sqrt{0{,}75} \cdot i \Rightarrow$ EL PUNTO NO ESTÁ DENTRO DE LA REGIÓN FACTIBLE b.3 g_2 está activa y g_1 no está activa: $\sigma_1 \neq 0 \quad u_1 = 0$

$\sigma_2 = 0 \quad u_2 \neq 0$

$-1 + u_2 = 0 \quad \rightarrow \quad u_2 = 1$

$1 - 2u_2 x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2u_2} = 0{,}5$

$x_2 - 0{,}5x_1^2 - \sigma_1^2 = 0 \quad \sigma_1^2 = x_2 - 0{,}5x_1^2 = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}325$

$\sigma_1 = 0{,}612$

$x_2^2 - x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad 0{,}5^2 = x_1$

En resumen, los puntos estacionarios son:

σ_1	σ_2	u_1	u_2	x_1	x_2	f		TIPO
0	0	1	1	0	0	5	A	DE INTERSECCIÓN
0	0	0,507	0,196	1,587	1,259	4,672	B	DE INTERSECCIÓN
0,612	0	0	1	0,25	0,5	5,25	C	DE TANGENCIA

c) El mínimo global es el punto B, para probar que corresponde a un mínimo basta con verificar que $u_1 > 0$ y $u_2 > 0$ porque se trata de un punto de intersección de dos restricciones $m = 2$ y dado que $n = 2$, se verifica que $n = m$.

Para el punto B esto es cierto, por lo tanto es un mínimo del problema, y es el global al comparar con los otros puntos estacionarios.