(1) $f = 4x_1^4 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$

Minimiza correctamente la etapa completa del método de Powell: 1.5 puntos.

Determina si las direcciones son conjugadas: 0.5 puntos.

a) una etapa del método de Powell $\underline{x}^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ arbitrario.

$\underline{s}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{s}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(\underline{x}^I) = 9$

paso 0 : $\underline{x}^0 = \underline{x}^I + \lambda \underline{s}^n$

$\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\lambda \end{pmatrix}$

$f(\lambda) = 4 + 3(2+\lambda)^2 - 4(2+\lambda) + 1$

$\frac{df}{d\lambda} = 6(2+\lambda) - 4 = 0$ $\lambda^* = -1{,}333$ $\frac{d^2f}{d\lambda^2} = 6 > 0$ es mínimo

$\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}666 \end{pmatrix}$ $f(\underline{x}^0) = 3{,}67$

paso 1 : $j = 1$ $\underline{x}^1 = \underline{x}^0 + \lambda \underline{s}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}666 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 0{,}666 \end{pmatrix}$

$f(\lambda) = 4(1+\lambda)^4 + 3(0{,}666)^2 - 4(1+\lambda)\cdot 0{,}666 + 1 + \lambda$

$\frac{df}{d\lambda} = 16(1+\lambda)^3 - 4\cdot 0{,}666 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^* = -0{,}52$ $\frac{d^2f}{d\lambda^2} > 0$

$\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 0{,}4704 \\ 0{,}666 \end{pmatrix}$ $f(\underline{x}^1) = 0{,}744$

$j = 2$ $\underline{x}^2 = \underline{x}^1 + \lambda \underline{s}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4704 \\ 0{,}666 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4704 \\ 0{,}666+\lambda \end{pmatrix}$

$f(\lambda) = 4\cdot 0{,}4704^4 + 3(0{,}666+\lambda)^2 - 4\cdot 0{,}4704(0{,}666+\lambda) + 0{,}4704$

$\frac{df}{d\lambda} = 6(0{,}666+\lambda) - 4\cdot 0{,}4704 = 0 \Rightarrow \lambda^* = -0{,}352$ $\frac{d^2f}{d\lambda^2} > 0$

$\underline{x}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4704 \\ 0{,}3142 \end{pmatrix}$ $f(\underline{x}^2) = 0{,}371$

paso 2 : dirección de Powell $\underline{s} = \underline{x}^2 - \underline{x}^0 = \begin{pmatrix} -0{,}5296 \\ -0{,}3518 \end{pmatrix}$

paso 3 : $\underline{x}^3 = \underline{x}^2 + \lambda(\underline{x}^2 - \underline{x}^0)$

$\underline{x}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}4704 \\ 0{,}3142 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5296 \\ -0{,}3518 \end{pmatrix}$

$f(\lambda) = 4(0{,}4704 - 0{,}5296\lambda)^4 + 3(0{,}3142 - 0{,}3518\lambda)^2 - 4(0{,}4704 - 0{,}5296\lambda)(0{,}3142 - 0{,}3518\lambda)$
$+ 0{,}4704 - 0{,}5296\lambda$

Minimizando con Excel (Solver) → $\lambda^* = 1{,}894$

$\underline{X}^3 = \begin{bmatrix} -0{,}5329 \\ -0{,}3522 \end{bmatrix}$ punto final de la 1era etapa de minimización de Powell. Que es el inicial de la siguiente etapa.

$f(\underline{x}^3) = -0{,}588$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^3) = -0{,}012 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}^3) = 0{,}0184 \longrightarrow \underline{x}^*$ es muy cercano a ser mínimo

b) $\underline{S}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_{powell} = \begin{pmatrix} -0{,}5296 \\ -0{,}3518 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 48 x_1^2 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{H}}(\underline{x}^3) = \begin{bmatrix} 13{,}63 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13{,}63 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}5296 \\ -0{,}3518 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$0{,}0075 \approx 0$ las direcciones son conjugadas

A pesar que al ser una función no cuadrática, esto no es garantizado por la manera en que se construyen estas direcciones.

2) $\min f = x_1^2 + 2x_2^2$

s.a: $x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \quad \longrightarrow \quad 5 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \; : g$

$2x_1 - 2x_2 = 1 \qquad\qquad 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \; : h$

Encuentra todos los puntos estacionarios de manera analítica aplicando las condiciones necesarias: 0.6 ptos.

Clasifica los puntos estacionarios: 0.8 ptos.

Efectúa correctamente el análisis de sensibilidad con mult. de Lagrange: 0.6 ptos.

a) $L = x_1^2 + 2x_2^2 - u(5 - x_1^2 - x_2^2 - \sigma^2) + w(2x_1 - 2x_2 - 1)$

puntos estacionarios cumplen

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 = 2x_1 + 2ux_1 + 2w$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 = 4x_2 + 2ux_2 - 2w$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 = 5 - x_1^2 - x_2^2 - \sigma^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = 0 = 2x_1 - 2x_2 - 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 = 2u\sigma$$

Caso 1: g no activa $\begin{cases} u = 0 \\ \sigma \neq 0 \end{cases}$

$2x_1 + 2w = 0 \qquad x_1 = -w$

$4x_2 - 2w = 0 \qquad x_2 = w/2 \quad \rightarrow 2(-w) - 2\left(\frac{w}{2}\right) - 1 = 0 \rightarrow w = -1/3$

$5 - x_1^2 - x_2^2 - \sigma^2 = 0$

$2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$

entonces $x_1 = 1/3$, $x_2 = -1/6$ (A)

y $\sigma^2 = 4{,}86$

Caso 2 g está activa $\begin{cases} u \neq 0 \\ \sigma = 0 \end{cases}$

$2x_1 + 2ux_1 + 2w = 0$

$4x_2 + 2ux_2 - 2w = 0$

$5 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

$2x_1 - 2x_2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + x_2$

$\rightarrow 5 - \left(\frac{1}{2} + x_2\right)^2 - x_2^2 = 0 <$
$x_2 = -1{,}811 \; ; \; x_1 = -1{,}311$ (B)
$x_2 = 1{,}311 \; ; \; x_1 = 1{,}811$ (C)

para el punto B: $u = -1{,}58 \quad w = -0{,}76$

para el punto C: $u = -1{,}42 \quad w = 0{,}76$

Puntos estacionarios

	x_1^*	x_2^*	u	σ^2	w	f^*
A	0,333	−0,166	0	4,86	−0,333	0,166
B	−1,311	−1,811	−1,58	0	−0,76	8,27
C	1,811	1,311	−1,42	0	0,76	6,72

b) puntos B y C tienen $u<0$, por lo tanto no son mínimos del problema
punto A $n=2$ y una restricción activa, hay que hacer un análisis de curvatura:

$$\nabla h = \begin{bmatrix} \partial h/\partial x_1 & \partial h/\partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$$

En el punto A $\quad \nabla_x^2 L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\nabla h \cdot \underline{v} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$2v_1 = 2v_2 \quad \rightarrow \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = v_2$$

$$K = \underline{v}^T \cdot \nabla_x^2 L \cdot \underline{v}$$

$$k = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$k = 6 v_1^2 > 0 \quad \therefore$ el punto A es mínimo

c) $\quad h = 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$

$$h - \xi = 2x_1 - 2x_2 - 1,5 = 0$$

$$\xi = 0,5$$

$$f - f(\underline{x}_0^*) \approx -w\,\xi$$

$$f \cong 0,166 - (-0,333) \cdot 0,5$$

$f \approx 0,3325 \quad$ este es un estimado del mínimo cuando la restricción cambia a $h = 2x_1 - 2x_2 - 1,5 = 0$

(3) minimizar $f = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

s. a: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0$

$x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} - 4 = 0$

a) define correctamente una función de penalidad para encontrar el punto factible: 1 pto.

b) linealiza restricción correctamente: 0.5 ptos.
define dirección en términos de x3: 0.5 ptos.

a) Para encontrar un punto factible inicial se puede utilizar un método de penalidad:

$$p(\underline{x}) = \sum_i p_i(\underline{x})$$

$$p(\underline{x}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1)^2 + \left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} - 4\right)^2$$

Cualquier mínimo de $p(\underline{x}) = 0$ es un punto factible

b) $\underline{x}_0 = [x_{10} \;\; x_{20} \;\; x_{30}]$

Primero se linealizan las restricciones no lineales

$$h_2 \approx h_{20} + \nabla^T h_2(\underline{x}^0)\,[\underline{x} - \underline{x}^0]$$

$$\nabla h_2 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ \frac{2}{3}x_3 \end{bmatrix}$$

Entonces: $$h_2 \approx x_{10}^2 + \frac{x_{20}^2}{2} + \frac{x_{30}^2}{3} - 4 + \left[2x_{10} \;\; x_{20} \;\; \tfrac{2}{3}x_{30}\right] \begin{bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ x_3 - x_{30} \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \underbrace{-x_{10}^2 - \frac{1}{2}x_{20}^2 - \frac{1}{3}x_{30}^2 - 4}_{= C} + 2x_{10}x_1 + x_{20}x_2 + \frac{2}{3}x_{30}x_3 = 0$$

$$h_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1 = 0$$

las dos restricciones ahora son lineales. Se deben despejar x_1 y x_2 (var. básicas) en función de x_3 (var. no básica)

de h_1: $x_1 = 1 - 3x_3 - 2x_2$

en $h_2 \rightarrow$ $C + 2x_{10}(1 - 3x_3 - 2x_2) + x_{20}x_2 + \frac{2}{3}x_{30}x_3 = 0$

$$x_2 = \underbrace{\frac{6x_{10} - \frac{2}{3}x_{30}}{x_{20} - 4x_{10}}}_{A} x_3 - \underbrace{\frac{C - 2x_{10}}{x_{20} - 4x_{10}}}_{B} = Ax_3 - B$$

Entonces $x_1 = 1 - 3x_3 - 2[Ax_3 - B] = 1 + 2B - (3 + 2A)x_3$

Se reemplazan X_1 y X_2 en $f(X)$, entonces $f = f(X_3)$

$$f(X_3) = -\left(1+2B-(3+2A)X_3\right)^2 - (AX_3 - B)^2 - X_3^2$$

la dirección de búsqueda es el negativo del gradiente

$$\frac{df}{dX_3} = 2(3+2A)\left[1+2B-(3+2A)X_3\right] - 2A\left(AX_3 - B\right) - 2X_3$$

$$s = -\frac{df}{dX_3}$$

$X_3 = X_3^0 + \alpha s$ avance del método GRG

La dirección inicial será $-\left.\frac{df}{dX_3}\right|_{X_3^0}$