Problema 1

$$\min\ Z = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

s.a:
$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

aplica fase 1 correctamente: 0.5

resuelve e interpreta correctamente Cj > 0: 0.5

explica por qué la solución está acotada (aij >= 0): 0.5

más de una solución óptima (Cj = 0) : 0.5

Se escribe el problema en su forma estándar:

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$-Z + 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

El sistema no se encuentra en forma canónica. Luego, hay que aplicar fase I para encontrar una solución básica factible (si existe). Se añaden variables artificiales y_1, y_2 y se minimiza $W = y_1 + y_2$

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 4$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 + y_2 = 6$$
$$-Z + 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$-W + y_1 + y_2 = 0$$

Se transforma a la forma canónica con y_1 e y_2 variables básicas:

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 4 \qquad b/a:\ 2 \text{ menor } *$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 + y_2 = 6 \qquad 6$$
$$-Z + 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$-W - x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -10$$

mín $d_j < 0$

Se pivotea en $2x_2$

$$-x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}y_1 = 2$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 + y_2 = 6$$
$$-Z + 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$-W - x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -10$$

$$-x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}y_1 = 2 \qquad b/a:\ -$$
$$4x_1 - \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 - \tfrac{1}{2}y_1 + y_2 = 4 \qquad 1 \ *$$
$$-Z + 4x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 - \tfrac{1}{2}y_1 = -2$$
$$-W - 4x_1 + \tfrac{1}{2}x_3 - x_4 + \tfrac{3}{2}y_1 = -4$$

mín $d_j < 0$

$$
\begin{array}{l}
-x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}y_1 = 2 \\
x_1 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}y_1 + \frac{1}{4}y_2 = 1 \\
-z + 4x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}y_1 = -2 \\
-w - 4x_1 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 + \frac{3}{2}y_1 = -4
\end{array}
$$

eliminando x_1 de todas ecuaciones excepto la segunda:

$$
\begin{array}{l}
x_2 + \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{4}y_2 = 3 \\
x_1 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{8}y_1 + \frac{1}{4}y_2 = \underline{1} \\
-z + x_3 - y_2 = -6 \\
-w + y_1 + y_2 = 0
\end{array}
$$

* Todos los d_j son ≥ 0 por lo tanto nos encontramos en el mínimo de w
* El mínimo de $w = 0$, por lo tanto se tiene una solución básica factible. Ésta se obtiene eliminando las columnas de y_1 e y_2:

$$
\begin{array}{l}
x_2 + 0{,}375\,x_3 + 0{,}25\,x_4 = 3 \\
x_1 - 0{,}125\,x_3 + 0{,}25\,x_4 = 1 \\
-z + x_3 = -6
\end{array}
$$

* Dado que $c_j'' \geq 0$, la solución es óptima.
* $c_4'' = 0$: Significa que pueden existir otras soluciones. En efecto, si x_4 se hace variable básica, esto no tiene efecto en el valor de z.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ z = 6 \end{array} \right.$$

Si se hace x_4 var. básica y x_2 sale de la base, las operaciones de pivoteo requeridas llevan a:

$$
\begin{array}{l}
4x_2 + 1{,}5\,x_3 + x_4 = 12 \\
x_1 - x_2 - 0{,}5\,x_3 = -2 \\
-z + x_3 = -6
\end{array}
$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 12$, $z = 6$

Solución básica pero no factible ($x_1 < 0$)

Ahora, si x_4 es básica y x_1 sale de la base:

$$
\begin{array}{l}
-x_1 + x_2 + 0{,}5\,x_3 = 2 \\
4x_1 - 0{,}5\,x_3 + x_4 = 4 \\
-z + x_3 = -6
\end{array}
$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $z = 6$

Es otra solución básica factible con el mismo valor de z

* ¿Solución acotada? Sí, porque en ninguna iteración, los coeficientes a'' de la columna pivote eran todos negativos.

(2) variables de decisión x_1: crudo 1 procesado (bbl/día)
x_2: crudo 2 procesado (bbl/día)

$$\underset{\left(\frac{USD}{día}\right)}{\text{Utilidad}} = 1\ \frac{USD}{bbl} \cdot X_1\ \frac{bbl}{día} + 0{,}7 \cdot X_2$$

planteamiento del problema: 0.5

gasolina: $\underset{\frac{bbl\ gasol.}{\cancel{bbl}\ crudo\ 1}}{0{,}65}\ \underset{\frac{\cancel{bbl}\ crudo\ 1}{día}}{X_1} + 0{,}34\ X_2 \leq 6000\ \frac{bbl\ gasol.}{día}$

solución gráfica; 1 pto.

no explicita U* o x1*, x2* (-0.3)

Kerosene $0{,}06\, X_1 + 0{,}09\, X_2 \leq 2400$

Fuel oil $0{,}29\, X_1 + 0{,}57\, X_2 \leq 12000$

El problema de optimización es maximizar $U = X_1 + 0{,}7 X_2$

sujeto a:

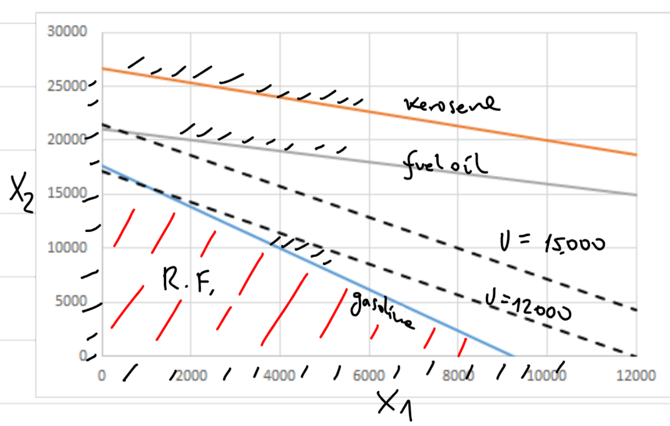
$$0{,}65\, X_1 + 0{,}34\, X_2 \leq 6000$$
$$0{,}06\, X_1 + 0{,}09\, X_2 \leq 2400$$
$$0{,}29\, X_1 + 0{,}57\, X_2 \leq 12.000$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Se grafican las restricciones: $X_2 = \frac{6000 - 0{,}65 X_1}{0{,}34}$ gasolina

$X_2 = \frac{2400 - 0{,}06 X_1}{0{,}09}$ Kerosene

$X_2 = \frac{12000 - 0{,}29 X_1}{0{,}57}$ Fuel oil

Contornos de U: $X_2 = \frac{U - X_1}{0{,}7}$



la región factible está situada en el triángulo formado por los ejes X_1, X_2 y la restricción de gasolina.

El máximo para U se encuentra en la intersección del eje X_2 y la restricción de gasolina.

Así: $X_2 = \frac{6000 - 0{,}65 X_1}{0{,}34} \rightarrow X_2^* = 17647$ bbl/día

$X_1^* = 0$

$U^* = 12352$ USD/día

Se requiere procesar $\left\{\begin{array}{l}17647 \text{ bbl/día de crudo \#2} \\ 0 \text{ bbl/día de crudo \#1}\end{array}\right\}$ para maximizar la utilidad prob 3: método del gradiente 1 pto., Nelder-Mead 1 pto., Gráfico de avances 0.5 ptos.

a) $\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f = x_1^4 - 2x_2x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 5$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 4x_2x_1 + 2x_1 - 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1^2} = 12x_1^2 - 4x_2 + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1^2 + 2x_2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = -4x_1$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x_1^3 - 4x_2x_1 + 2x_1 - 2 \\ -2x_1^2 + 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 12x_1^2 - 4x_2 + 2 & -4x_1 \\ -4x_1 & 2 \end{bmatrix}$$

iteración 1 $\quad \underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \nabla f(\underline{x}^0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{s}^0 = -\nabla f(\underline{x}^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}; \ \underline{\underline{H}}(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$f = 5$

$$t = \frac{-\nabla^T f(\underline{x}^0) \cdot \underline{s}}{\underline{s}^T \cdot \underline{\underline{H}}(\underline{x}^0) \cdot \underline{s}} = 0{,}119 \qquad \underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}119 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}476 \\ 1{,}762 \end{pmatrix}$$

iteración 2 $\quad \underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 1{,}476 \\ 1{,}762 \end{pmatrix} \quad \nabla f(\underline{x}^1) = \begin{pmatrix} 3{,}411 \\ -0{,}833 \end{pmatrix} \quad \underline{s}^1 = \begin{pmatrix} -3{,}411 \\ 0{,}833 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{H}}(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 21{,}095 & -5{,}904 \\ -5{,}904 & 2 \end{bmatrix}$

$f = 4{,}4$

$$t = 0{,}04397 \qquad \underline{x}^2 = \underline{x}^1 + t\,\underline{s}^1 = \begin{pmatrix} 1{,}476 \\ 1{,}762 \end{pmatrix} + 0{,}04397 \begin{pmatrix} -3{,}411 \\ 0{,}833 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}326 \\ 1{,}7986 \end{pmatrix}$$

iteración 3 $\quad \underline{x}^2 = \begin{pmatrix} 1{,}326 \\ 1{,}7986 \end{pmatrix} \quad \nabla f(\underline{x}^2) = \begin{pmatrix} 0{,}438 \\ 0{,}08065 \end{pmatrix} \quad \underline{s}^2 = \begin{pmatrix} -0{,}438 \\ -0{,}08065 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{H}}(\underline{x}^2) = \begin{bmatrix} 15{,}905 & -5{,}304 \\ -5{,}304 & 2 \end{bmatrix}$

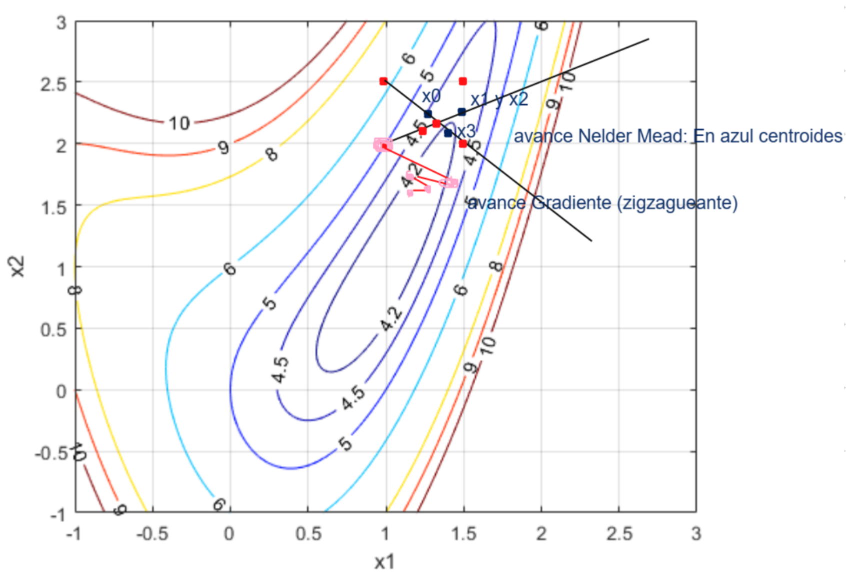
$f = 4{,}11$

$$t = 0{,}07374 \qquad \underline{x}^3 = \begin{pmatrix} 1{,}2937 \\ 1{,}7927 \end{pmatrix}$$

iteración 4 $\quad \underline{x}^3 = \begin{pmatrix} 1{,}2937 \\ 1{,}7927 \end{pmatrix} \longrightarrow \nabla f(\underline{x}^3) = \begin{pmatrix} -0{,}0286 \\ 0{,}238 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{H}}(\underline{x}^3) = \begin{bmatrix} 14{,}913 & -5{,}1748 \\ -5{,}1748 & 2 \end{bmatrix}$

$f = 4{,}10$

$$t = 0{,}2933 \qquad \underline{x}^4 = \underline{x}^3 + t\,\underline{s}^3 = \begin{pmatrix} 1{,}302 \\ 1{,}723 \end{pmatrix} \longrightarrow f = 4{,}09$$



b) NELDER MEAD $\quad f = x_1^4 - 2x_2 x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 5$

$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$f_1 = 5 \quad f_2 = 4,3125 \quad f_3 = 6,25$

ORDENAR DE MENOR A MAYOR (SÍ ES UN PROB. DE MINIMIZACIÓN)

$y_1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$f_1 = 4,3125 \quad f_2 = 5 \quad f_3 = 6,25$

$t=0 \quad \underline{x}^0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \end{pmatrix} \quad f(x^0) = \underline{4,535}$

$\underline{s}^1 = \underline{x}^0 - \underline{y}_3 = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,25 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 \quad x^0 + \underline{s}^1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f = 4,3125$ no es mejor que f_1 es mejor que f_2 → paso 8

Reemplazo y orden

$y_1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$f_1 = 4,3125 \quad f_2 = 4,3125 \quad f_3 = 5$

$t=1 \quad \underline{x}^1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,25 \end{pmatrix} \quad f(\underline{x}^1) = \underline{4,25}$

$\underline{s}^2 = \underline{x}^1 - \underline{y}^3 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 \quad \underline{x}^1 + \underline{s}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad f = 7,25$ no es mejor que f_2 → contraer

$\lambda = \frac{1}{2} \quad \underline{x}^1 + \frac{1}{2}\underline{s}^2 = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 2,375 \end{pmatrix} \quad f = 5,035$

$\lambda = -\frac{1}{2} \quad \underline{x}^1 - \frac{1}{2}\underline{s}^2 = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,125 \end{pmatrix} \quad f = 4,3789$ → mejor que $\lambda = 1$ → paso 8

$y_1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \quad y_3 = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 2,125 \end{pmatrix}$

$f_1 = 4,3125 \quad f_2 = 4,3125 \quad f_3 = 4,3789$

$t=2 \quad \underline{x}^2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,25 \end{pmatrix} \quad f(\underline{x}^2) = \underline{4,25}$

$\underline{s}^3 = \underline{x}^2 - \underline{y}^3 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,125 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1 \quad \underline{x}^2 + \underline{s}^3 = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 2,375 \end{pmatrix} \quad f = 5,035$ no es mejor que f_2 → contraer

$\lambda = \frac{1}{2} \quad \underline{x}^2 + \frac{1}{2}\underline{s}^3 = \begin{pmatrix} 1,625 \\ 2,3125 \end{pmatrix} \quad f = 4,498$

$\lambda = -\frac{1}{2} \quad \underline{x}^2 - \frac{1}{2}\underline{s}^3 = \begin{pmatrix} 1,375 \\ 2,1875 \end{pmatrix} \quad f = 4,2288$ → mejor que $\lambda=1$ → paso 8

$y_1 = \begin{pmatrix} 1,375 \\ 2,1875 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y_3 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

$f_1 = 4,2288 \quad f_2 = 4,3125 \quad f_3 = 4,3125$

⇨ $t=3 \quad \underline{x}^3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \begin{pmatrix} 1,4375 \\ 2,0938 \end{pmatrix}$

$f(\underline{x}^3) = \underline{4,192}$