Optimización de Procesos 540.258
2019-1

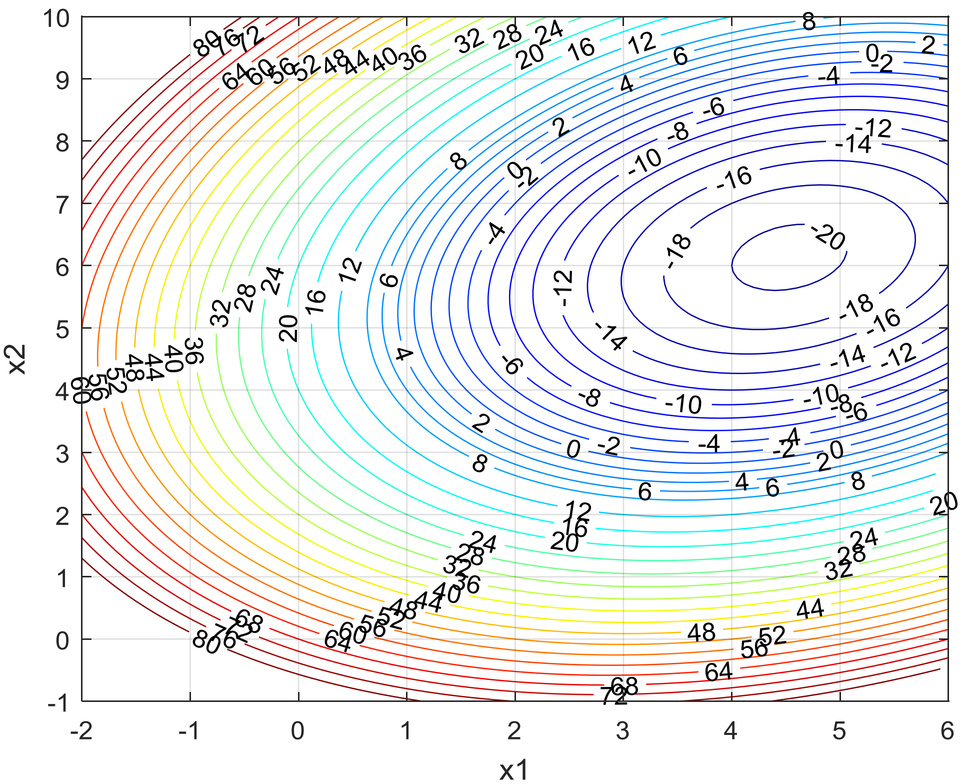
Examen

1. (2 ptos.) Un club de fútbol está planificando la distribución de entradas para un partido. Hay 10.000 asientos disponibles, que deben ser repartidos entre los hinchas locales, los visitantes y los medios de comunicación. Los miembros de medios de comunicación se admiten sin pago, los hinchas locales pagan $45 por entrada y los visitantes $100. Al menos 500 entradas deben reservarse para los medios de comunicación y las entradas para los hinchas locales deben ser al menos la mitad de las entradas para los hinchas visitantes.
Con esas restricciones, el club debe encontrar la distribución de entradas que maximice los ingresos.
a) Formule el problema de optimización definiendo variables, restricciones y grados de libertad.
b) Determine la distribución de entradas que maximiza los ingresos del club utilizando el método simplex para problemas LP.

2. (2 ptos.) Se tiene el siguiente problema de optimización:

Minimizar: $f = 2(x_1 - 3)^2 - x_1 x_2 + (x_2 - 5)^2$
Sujeto a: $x_1 \leq 2$
$x_2 \geq 0$

a) Los contornos de la función se muestran en el gráfico de la página siguiente. Agregue las restricciones y defina la región factible. Por inspección indique en la figura la ubicación del óptimo del problema restringido.
b) Plantee una función de penalidad interna que permita transformar este problema en uno no restringido.
c) Para $r = 1$ y $x_0 = [1 \quad 1]^T$, aplique el método de Newton convencional para minimizar la función de penalidad determinada en (b). Efectúe una iteración. Localice el punto x_1 en la figura y comente sobre la posibilidad de optimizar con estos valores de partida.
d) Para $r = 10$ y $x_0 = [1 \quad 1]^T$, aplique el método de Newton convencional para minimizar la función de penalidad determinada en (b). Efectúe 3 iteraciones, localizando los puntos en la figura y comente sobre la posibilidad de optimizar con estos valores de partida.
e) Explique detalladamente cómo resolvería el problema de optimización utilizando esta función de penalidad (algoritmo).



3. (2 ptos.) Se tiene el siguiente problema de optimización:

Minimizar: $f = x_2 - x_1 + 5$

Sujeto a: $x_2 \geq 0.5x_1^2$
$x_2^2 \geq x_1$

a) ¿Se puede asegurar que el problema tiene un solo mínimo global? Justifique su respuesta sobre la base de fundamentos matemáticos.
b) Utilice las condiciones necesarias de un problema restringido para encontrar el o los puntos estacionarios del problema de manera analítica. Estudie todos los casos posibles de activación de restricciones.
c) Determine el mínimo global y demuestre aplicando las condiciones suficientes que el punto corresponde a un mínimo del problema restringido.

Información adicional

Método de Newton

$$\Delta \underline{x}_k = -\boldsymbol{H}^{-1}(\underline{x}_k)\, \nabla f(\underline{x}_k)$$

Método del gradiente

$$\underline{s}^0 = -\nabla f(\underline{x}_0)$$

Funciones de penalidad interna:

Dado el problema:

Minimizar $f(\boldsymbol{x})$

Sujeto a: $h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i = 1, \dots, m$

$g_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 \qquad j = 1, \dots, r$

Se construye la función:

$$\phi_k = \phi(\boldsymbol{x}, r_k) = f(x) - r_k \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{g_j(\boldsymbol{x})} + \frac{1}{\sqrt{r_k}} \sum_{i=1}^{m} [h_i(x)]^2$$

Problema general de optimización no lineal con restricciones:

Minimizar $f(\boldsymbol{x})$

Sujeto a: $h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad i = 1, \dots, m$

$g_j(\boldsymbol{x}) \geq 0 \qquad j = 1, \dots, r$

Lagrangiana:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j h_j(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{r} u_j (g_j(\boldsymbol{x}) - {\sigma_j}^2)$$

AKB/akb 17-7-2019