Optimización de Procesos 540.258
2019-1

Certamen 2

PAUTA DE CORRECCIÓN

1. (1.5 ptos.) Una fábrica de aceites de cocina compra distintos tipos de aceites, los refina y los mezcla para obtener un producto final. Se pueden adquirir cinco tipos de aceites, que se pueden agrupar en dos categorías: vegetales (VEG) y no-vegetales (ACE). Los precios de los aceites se muestran en la tabla siguiente:

Precios de aceites en k$/ton

VEG1	VEG2	ACE1	ACE2	ACE3
110	120	130	110	115

El producto final se vende a 150 k$/ton. Los aceites requieren diferentes líneas de producción para el refinado. En un mes dado, no se pueden refinar más de 200 ton de aceites vegetales y más de 250 ton de aceites no vegetales. No se pierde masa en el proceso de refinado y el costo de refinado se puede ignorar.
Existe un índice σ que describe la calidad del aceite. El producto final debe tener un índice de calidad entre 3 y 6.

Índice de calidad (σ) para los distintos tipos de aceites.

VEG1	VEG2	ACE1	ACE2	ACE3
8.8	6.1	2.0	4.2	5.0

Se puede suponer que el índice de calidad varía linealmente con la proporción de cada aceite en la mezcla.

a) Formule un problema de programación lineal para responder la siguiente pregunta: ¿Qué política de compra y refinación debe seguir la fábrica para maximizar la utilidad? Defina las variables, función objetivo y restricciones.
b) Formatee el problema para resolver mediante el método simplex.

Respuesta:

a) Las variables del problema corresponden a la masa en ton de casa aceite usado para refinar y mezclar.
Sea:
x_1: Masa (ton/mes) de aceite VEG1
x_2: Masa (ton/mes) de aceite VEG2
x_3: Masa (ton/mes) de aceite ACE1
x_4: Masa (ton/mes) de aceite ACE2
x_5: Masa (ton/mes) de aceite ACE3

Restricciones de capacidad de refinación de aceites vegetales:

$$x_1 + x_2 \leq 200$$

Para aceites no vegetales:

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 250$$

Restricciones de calidad del producto:

$$8.8x_1 + 6.1x_2 + 2x_3 + 4.2x_4 + 5x_5 \leq 6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$8.8x_1 + 6.1x_2 + 2x_3 + 4.2x_4 + 5x_5 \geq 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

Función objetivo a maximizar: (ingresos por ventas) – (costo de materias primas)

$$f = 150(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (110x_1 + 120x_2 + 130x_3 + 110x_4 + 115x_5)$$

Sujeto a las cuatro restricciones de arriba y además:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

b) Para transformar el problema a formato simplex la función objetivo debe ser de minimización, se deben añadir variables de holgura para transformar las inecuaciones en ecuaciones y las variables deben ser todas no negativas.

- Se define la función $g = -f$
- Se simplifican las ecuaciones y se añaden las variables de holgura x_6, x_7, x_8, x_9 que restan o suman dependiendo del signo de la desigualdad.

El problema en formato simplex queda entonces:

Minimizar:

$$g = -40x_1 - 30x_2 - 20x_3 - 40x_4 - 35x_5$$

Sujeto a:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_6 = 200 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = 250 \\ 2.8x_1 + 0.1x_2 - 4x_3 - 1.8x_4 - x_5 + x_8 = 0 \\ 5.8x_1 + 3.1x_2 - 1x_3 + 1.2x_4 + 2x_5 - x_9 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{gathered}$$

2. (2 ptos.) Se tiene el siguiente problema de programación lineal:

Maximizar $f = 4x_1 - x_2$

Sujeto a:
$g_1: x_2 \leq 5$
$g_2: x_2 - x_1 \leq 3$
$g_3: x_1 \leq 7$
$x_1, x_2 \geq 0$

a) Formatee el problema para resolver mediante el método simplex.
b) Resuelva mediante el método simplex.

Se añade una restricción adicional: $g_4: x_2 + \frac{1}{7}x_1 \geq 3$.

c) Grafique las restricciones y al menos tres contornos de la función objetivo. Identifique la región factible e indique el vértice donde se encuentra el óptimo.
d) Determine el valor de la función y de todas las variables (originales y de holgura) en el óptimo. Identifique las variables básicas y las no básicas.
e) Con ayuda de la figura, explique qué significa que para un restricción la variable de holgura se anule o no.

Respuesta:
a) Para transformar el problema a formato simplex la función objetivo debe ser de minimización, se deben añadir variables de holgura para transformar las inecuaciones en ecuaciones y las variables deben ser todas no negativas.
Se define la función $g = -f$

Minimizar: $g = -4x_1 + x_2$

Sujeto a: $x_2 + x_3 = 5$
$x_2 - x_1 + x_4 = 3$
$x_1 + x_5 = 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

b) Para comenzar a resolver mediante simplex se escribe el problema de manera estándar:

	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b}$	b/a	
	0	1	1	0	0	5	∞	E1
	-1	1	0	1	0	3	-	E2
	1	0	0	0	1	7	7	E3
$-\boldsymbol{g}$	-4	1	0	0	0	0		E4

Se observa que el sistema está en forma canónica con variables básicas x_3, x_4 y x_5. Las variables no básicas son x_1 y x_2.
Esta solución básica es factible porque todas las variables están dentro de sus límites (no negativas). $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ (no básicas) y $x_3 = 5$, $x_4 = 3$ y $x_5 = 7$ (básicas)
Esta solución básica factible no es la óptima porque existe un costo reducido negativo ($c_1 = -4$).
Dado que $c_1 < 0$, x_1 entra al grupo de variables básicas. Se pivotea en el elemento de la columna de x_1 que tiene el b/a más bajo, es decir la tercera fila, lo que hace que x_5 pase a ser variable no básica.

Se efectúa la siguiente operatoria de ecuaciones:
E1’ = E1
E2’ = E2 + E3
E3’ = E3
E4’ = 4xE3 + E4

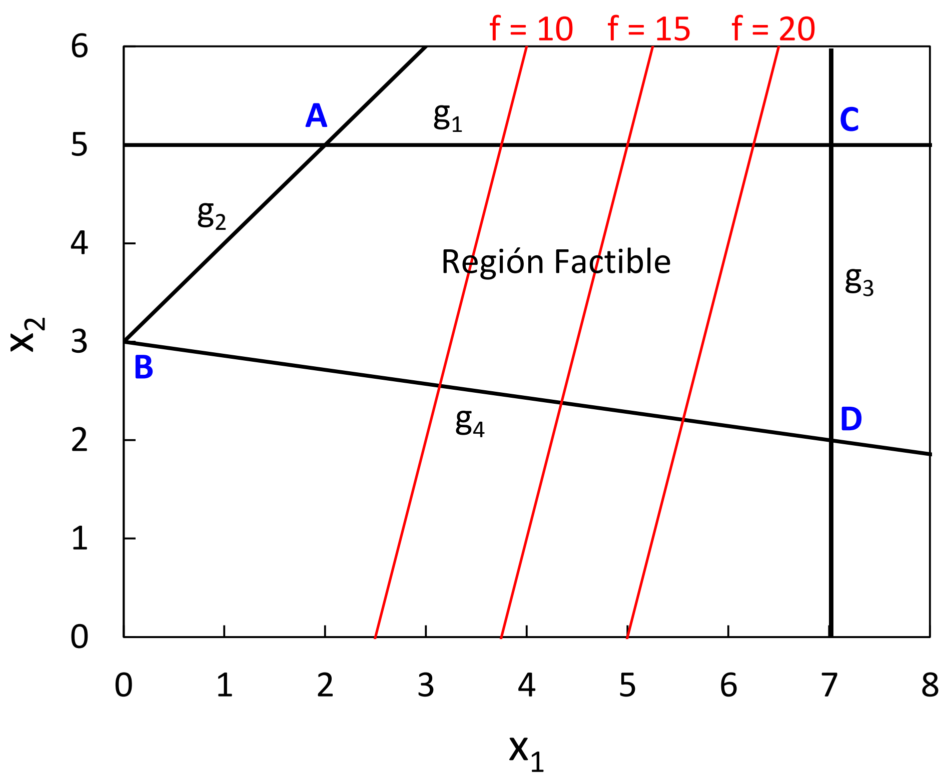
	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b}$	
	0	1	1	0	0	5	E1’
	0	1	0	1	1	10	E2’
	1	0	0	0	1	7	E3’

$-g$	0	1	0	0	4	28	E4'

Esta solución básica factible es óptima porque todos los costos reducidos son positivos.

Por lo tanto el máximo es $f = -g = 28$
$x_1 = 7$
$x_2 = 0$
$x_3 = 5$
$x_4 = 10$
$x_5 = 0$

c) Se grafican las cuatro restricciones y los contornos de la función objetivo f = 10, 15 y 20:



Se observa que la función alcanza su máximo valor en el vértice D.

d) En el óptimo (vértice D), se intersectan las restricciones g_4 y g_3. Por lo tanto, los valores de las variables x_1 y x_2 son:
$x_1 = 7$
$x_2 = 2$

El problema en formato simplex con la restricción g_4 añadida (lo que implica la adición de una nueva variable de holgura x_6) es:

Minimizar: $g = -4x_1 + x_2$

Sujeto a: $x_2 + x_3 = 5$
$x_2 - x_1 + x_4 = 3$

$x_1 + x_5 = 7$
$x_2 + \frac{1}{7}x_1 - x_6 = 3$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

De las ecuaciones anteriores, dados los valores de x_1 y x_2 se obtiene:
$x_3 = 3$
$x_4 = 8$
$x_5 = 0$
$x_6 = 0$

En este problema hay n = 6 variables y m = 4 ecuaciones. Por lo tanto hay m variables básicas y n-m = 2 variables no básicas. Las variables no básicas en simplex corresponden a las que se anulan en la solución básica factible, es decir x_5 y x_6. Las restantes variables son básicas (x_1, x_2, x_3, x_4)

e) Las variables de holgura x_5 y x_6 se anulan en el óptimo (punto D). Estas son las variables de holgura de las restricciones g_3 y g_4, que son las que en cuya intersección se encuentra el óptimo.
Por lo tanto, las variables de holgura son nulas para un punto que se encuentra sobre una restricción y son no nulas para las restricciones sobre las cuales el punto no se encuentra.

3. (2.5 ptos.) Considere la minimización de la siguiente función:

$$f = 5(x_1 - 2)^4 + 3(x_2 - 5)^4 - 4x_1x_2$$

Con punto inicial: $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) Determine la dirección de minimización del método de Newton.
b) Calcule el punto $\underline{x}_1$ de acuerdo al algoritmo de Newton con t = 1. ¿Es el mínimo direccional?
c) Acote el mínimo en la dirección obtenida con paso fijo δ = 1. Grafique los puntos de iteración en la figura. Estime el valor de t necesario para minimizar. ¿A qué se deben las diferencias con t = 1 dado por Newton convencional?
d) Determine la dirección de minimización del método del gradiente. Grafíquela en la figura y y discuta las causas de su (posible) diferencia con respecto a la dirección que entrega el método de Newton.

Respuesta:
a) Primero se deben calcular las derivadas de primer y segundo orden:

$$\frac{df}{dx_1} = 20(x_1 - 2)^3 - 4x_2$$
$$\frac{df}{dx_2} = 12(x_2 - 5)^3 - 4x_1$$
$$\frac{d^2f}{d{x_1}^2} = 60(x_1 - 2)^2$$
$$\frac{d^2f}{d{x_2}^2} = 36(x_2 - 5)^2$$

$$\frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} = \frac{d^2 f}{dx_2 dx_1} = -4$$

En el punto inicial:

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} -32 \\ -100 \end{pmatrix}$$

$$H(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} 60 & -4 \\ -4 & 144 \end{pmatrix}$$

La dirección del método de Newton se puede obtener resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$H(\underline{x}^0)\underline{s} = -\nabla f(\underline{x}^0)$$

$$\begin{pmatrix} 60 & -4 \\ -4 & 144 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 100 \end{pmatrix}$$

que es equivalente a:

$$60s_1 - 4s_2 = 32$$
$$-4s_1 + 144s_2 = 100$$

Se puede multiplicar la primera ecuación por 36:

$$2160s_1 - 144s_2 = 1152$$
$$-4s_1 + 144s_2 = 100$$

Se suman las dos ecuaciones y se pueden obtener luego los valores de las dos componentes del vector $\underline{s}$.

$$\underline{s} = \begin{pmatrix} 0.58 \\ 0.71 \end{pmatrix}$$

Esta es la dirección de minimización del método de Newton.

b) Dada la dirección y el punto inicial, se puede obtener el punto siguiente de las iteraciones del método de Newton:

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + t\underline{s}_0$$

Para t = 1 (Newton convencional):

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.58 \\ 0.71 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.58 \\ 3.71 \end{pmatrix}$$

Dado que la función no es cuadrática el método de Newton no garantiza un mínimo en la primera iteración. Además, se puede localizar el punto $\underline{x}_1$ en el gráfico (ver figura). Claramente no corresponde al mínimo de la función en esa dirección. Adicionalmente, se puede probar evaluando el gradiente en $\underline{x}_1$:

$$\nabla f(\underline{x}^1) = \begin{pmatrix} -16.32 \\ -32.08 \end{pmatrix}$$

El gradiente no es nulo, por lo tanto no es un mínimo.

c) Para acotar el mínimo avanzando en la dirección dada por Newton se puede evaluar:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + t\underline{s}_0$$

Es decir:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0.58\\0.71\end{pmatrix}$$

Se evalúa el valor de $\underline{x}$ para valores de t espaciados en una unidad ($t^{k+1} = t^k + 1$). Para cada punto se evalúa la función.

t	x_1	x_2	$f(\underline{x})$	
0	1	3	41	Punto inicial
1	1.58	3.71	-14.98	Avance del método de Newton convencional
2	2.16	4.42	-37.84	La función disminuye
3	2.74	5.13	-54.72	
4	3.32	5.84	-60.88	
5	3.9	6.55	-19.70	La función aumenta.

El mínimo direccional debe encontrarse entre t =3 y t = 5. (la función es unimodal).

Los puntos para distintos valores de t se muestran en la figura.
En el gráfico se observa que el mínimo direccional (en el que la dirección es tangente a la curva de nivel de la función) estaría entre t = 3 y t = 4 y más cercano a t = 4.

El valor de t necesario para minimizar es mayor que Newton convencional (t = 1). Esto se debe a que la función no es cuadrática, y el ajuste cuadrático de Newton no representa bien la función.

d) La dirección de minimización del método del gradiente es simplemente:

$$\underline{s} = -\nabla f(\underline{x}^0)$$

El gradiente se calculó previamente en ese punto:

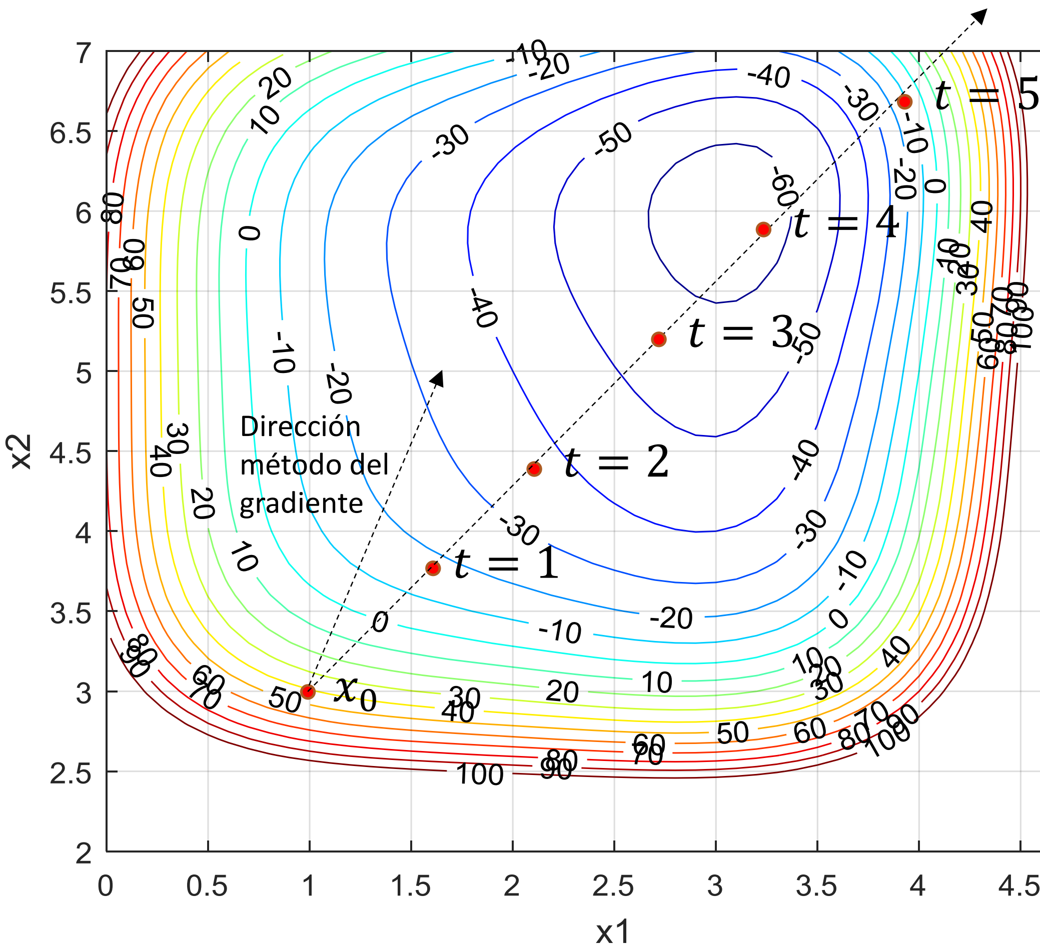
$$\underline{s} = \begin{pmatrix}32\\100\end{pmatrix}$$

Si se avanza un paso arbitrario, por ejemplo t = 0.02, en esa dirección, el punto siguiente es:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 0.02\begin{pmatrix}32\\100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.64\\5\end{pmatrix}$$

Esto sirve para graficar la dirección en la figura.

Se observa que la dirección del gradiente es distinta a la dirección dada por el método de Newton. La diferencia se debe a que el método de Newton utiliza información de la curvatura de la función (Hessiana y gradiente) para definir la dirección, mientras que el método del gradiente sólo utiliza información diferencial de primer orden (gradiente).



Información adicional

Acotación del mínimo con paso fijo:

$$t^{k+1} = t^k + \delta$$

Método de Newton

$$\Delta \underline{x}_k = -\boldsymbol{H}^{-1}(\underline{x}_k)\,\nabla f(\underline{x}_k)$$

Método del gradiente

$$\underline{s}^0 = -\nabla f(\underline{x}_0)$$